CdL Ingegneria Meccanica

Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 17 febbraio 2023

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Si studi in dettaglio la funzione f definita dall'espressione

$$f(x) = x \exp\left(\frac{2+x}{2-x}\right),$$

tracciandone un grafico qualitativo (si ricorda che $\exp t = e^t$).
(Suggerimento: la funzione ha uno o due asintoti all'infinito, che vanno trovati.)
Si dica quante soluzioni ha l'equazione

$$f(x) = \lambda \qquad \text{al variare del parametro } \lambda \in \mathbf{R}.$$

2. Si studino le serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \operatorname{sen} n,$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\beta}{n^\alpha} - \log\left(1 + \frac{\alpha}{n^\beta}\right)\right), \qquad \alpha, \beta > 0.$$

3. Si calcoli

$$\int \frac{2x-7}{4x^2-32x+72}\, dx.$$

4. Si trovino tutte le soluzioni delle equazioni differenziali

$$y'' - 3y' + 2y = 0,$$
$$y'' - 3y' + 2y = x,$$
$$y'' - 3y' + 2y = e^x,$$
$$y'' - 3y' + 2y = x + e^x.$$

Soluzioni

1. La funzione f, a priori, non è definita per $x = 2$, quindi

$$\mathrm{dom}(f) = \mathbf{R} \setminus \{2\}.$$

Studiamo i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 0\,,$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty\,.$$

La funzione può quindi essere estesa ad $\mathbf{R}$ definendo una nuova funzione, che chiameremo ancora f, così definita

$$f(x) = \begin{cases} x\,\exp\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right) & x \neq 2, \\ 0 & x = 2. \end{cases}$$

La derivata di f, per $x \neq 2$, è

$$f'(x) = \left[1 + \frac{4x}{(2-x)^2}\right] \exp\left(\frac{2+x}{2-x}\right) = \frac{x^2+4}{(2-x)^2} \exp\left(\frac{2+x}{2-x}\right) \qquad x \neq 2.$$

Per $x = 2$ si può valutare il limite del rapporto incrementale,

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2}\, x\,\exp\left(\frac{2+x}{2-x}\right),$$

oppure (perché?) il limite di f' in 2, cioè

$$\lim_{x\to 2^+} \left[1 + \frac{4x}{(2-x)^2}\right] \exp\left(\frac{2+x}{2-x}\right).$$

In entrambi i casi si ottiene 0. Il segno di f' è quindi il seguente:

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & x \neq 2, \\ = 0 & x = 2, \end{cases}$$

quindi f è crescente in $(-\infty, 2)$ e anche in $[2, +\infty)$.
Studiamo ora la derivata seconda, definita anch'essa, a priori, in $\mathbf{R} \setminus \{2\}$. Si ha

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left[\frac{2x(2-x)^2 + 2(2-x)(x^2+4)}{(2-x)^4} + \frac{(2-x)+(2+x)}{(2-x)^2}\right] \exp\left(\frac{2+x}{2-x}\right) = \\ &= \left[\frac{-4x^2+16x+16}{(2-x)^4} + \frac{4(2-x)^2}{(2-x)^4}\right] \exp\left(\frac{2+x}{2-x}\right) = \\ &= \frac{32}{(2-x)^4} \exp\left(\frac{2+x}{2-x}\right) > 0 \qquad \text{per ogni } x \neq 2, \end{aligned}$$

quindi f è convessa in $(-\infty, 2)$ e in $(2, +\infty)$.
Vediamo se f ha degli asintoti all'infinito. Cominciamo da $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{2+x}{2-x}\right) = \frac{1}{e},$$

e per vedere se c'è un asinototo a $+\infty$ va verificato che il seguente limite esista finito:

$$\lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - e^{-1}x\right] = \lim_{x\to+\infty} x \left[\exp\left(\frac{2+x}{2-x}\right) - e^{-1}\right].$$

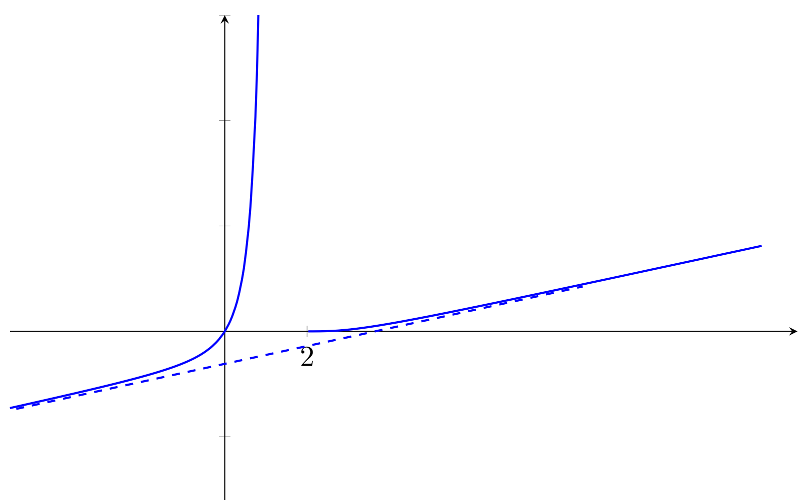
Si osservi che (considerando lo sviluppo di Taylor in 0 della funzione $t \mapsto e^t$)

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{2+x}{2-x}\right) - e^{-1} &= e^{-1}\left[e^{\frac{2+x}{2-x}+1} - 1\right] = e^{-1}\left[e^{\frac{4}{2-x}} - 1\right] = \\ &= e^{-1}\left[\frac{4}{2-x} + o\left(\frac{4}{2-x}\right)\right],\end{aligned}$$

per cui

$$\lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - e^{-1}x\right] = \lim_{x\to+\infty} x\, e^{-1}\left[\frac{4}{2-x} + o\left(\frac{4}{2-x}\right)\right] = -\frac{4}{e}.$$

Di conseguenza f ha la retta $x \mapsto e^{-1}x - 4e^{-1}$ come asintoto obliquo a $+\infty$.
Allo stesso modo si verifica che la stessa retta è asinotot obliquo per f anche a $-\infty$.
Il grafico di f è quindi il seguente



Venendo all'ultimo quesito: l'equazione ha esattamente una soluzione per ogni $\lambda < 0$ e due soluzioni per ogni $\lambda \geqslant 0$ (avendo esteso la funzione nel punto 2).

2. La prima serie non è a termini di segno costante. Sviluppando il logaritmo al secondo ordine il termine n-esimo della prima delle due serie diventa

$$\left|\left(\frac{1}{n}-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\operatorname{sen} n\right| = \left|\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\operatorname{sen} n\right| \leqslant \frac{1}{2n^2}+\left|o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|.$$

Poiché

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{2n^2}+\left|o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$$

per il criterio del confronto asintotico si ha che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{2n^2}+\left|o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|\right] \qquad \text{converge,}$$

quindi la serie di partenza (per il criterio del confronto) converge assolutamente e quindi semplicemente.

Passiamo alla seconda serie: sviluppando nuovamente il logaritmo al secondo ordine

$$\frac{\beta}{n^\alpha}-\log\left(1+\frac{\alpha}{n^\beta}\right)=\frac{\beta}{n^\alpha}-\frac{\alpha}{n^\beta}+\frac{\alpha^2}{2n^{2\beta}}+o\left(\frac{1}{n^{2\beta}}\right).$$

Nel caso $\alpha<\beta$ questo termine è

$$\frac{\beta}{n^\alpha}-\frac{\alpha}{n^\beta}+\frac{\alpha^2}{2n^{2\beta}}+o\left(\frac{1}{n^{2\beta}}\right)=\frac{1}{n^\alpha}\left(\beta-\frac{\alpha}{n^{\beta-\alpha}}+\frac{\alpha^2}{2n^{2\beta-\alpha}}+o\left(\frac{1}{n^{2\beta-\alpha}}\right)\right),$$

termine che è asintotico a $\frac{1}{n^\alpha}$. Se $\alpha\leqslant 1$ la serie diverge, se $\alpha>1$ la serie converge. In maniera analoga si tratta il caso $\alpha>\beta$: in questo caso se $\beta\leqslant 1$ la serie diverge, se $\beta>1$ la serie converge.

Rimangono i casi $\alpha=\beta$: in questi casi

$$\frac{\beta}{n^\alpha}-\log\left(1+\frac{\alpha}{n^\beta}\right)=\frac{\beta^2}{2n^{2\beta}}+o\left(\frac{1}{n^{2\beta}}\right).$$

Anche in questi casi si conclude con il confronto asintotico: se $2\beta>1$ la serie converge, diversamente la serie diverge.

3. Prima di tutto si osservi che il polinomio $4x^2-32x+72$ non ha zeri reali. Inoltre

$$4x^2-32x+72=4(x^2-8x+18) \qquad \text{e} \qquad \frac{d}{dx}(x^2-8x+18)=2x-8.$$

Quindi

$$\int\frac{2x-7}{4x^2-32x+72}\,dx=\frac{1}{4}\left[\int\frac{2x-8}{x^2-8x+18}\,dx+\int\frac{1}{x^2-8x+18}\,dx\right].$$

Il primo dei due integrali è

$$\int \frac{2x-8}{x^2-8x+18}\,dx = \log(x^2-8x+18)+c_1, \qquad c_1 \in \mathbf{R},$$

il secondo

$$\int \frac{1}{x^2-8x+18}\,dx = \int \frac{1}{(x-4)^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x-4}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-4}{\sqrt{2}}+c_2$$

con $c_2 \in \mathbf{R}$. In conclusione

$$\int \frac{2x-7}{4x^2-32x+72}\,dx = \frac{1}{4}\log(x^2-8x+18)+\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-4}{\sqrt{2}}\right)+c, \qquad c \in \mathbf{R}.$$

4. Risolviamo prima l'omogenea:

$$y''-3y'+2y = (D^2-3D+2)y = 0$$

e le soluzioni del polinomio caratteristico sono 1 e 2, per cui le soluzioni dell'equazione omogenea sono

$$c_1e^x + c_2e^{2x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}.$$

Per risolvere la seconda equazione troviamo una soluzione v_1 dell'equazione $y''-3y'+2y = x$, per la terza una soluzione v_2 dell'equazione $y''-3y'+2y = e^x$.
Per trovare v_1 cerchiamo tra le funzioni del tipo

$$v_1(x) = ax+b.$$

Derivando v_1 e inserendo le informazioni ottenute nell'equazione si ottengono

$$a = \frac{1}{2}, \qquad b = \frac{3}{4}.$$

Per trovare v_2 si osservi che e^x è anche soluzione dell'omogenea, quindi cerchiamo v_2 tra le funzioni del tipo

$$v_2(x) = c\,x\,e^x.$$

Derivando:

$$v_2'(x) = c(xe^x+e^x), \qquad v_2''(x) = c(xe^x+2e^x),$$

quindi, inserendo nell'equazione, si ricava $c = -1$.
Infine per la quarta è sufficiente sommare le soluzioni della seconda a quelle della terza:

$$c_1e^x + c_2e^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} - xe^x, \qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}.$$