CdL Ingegneria Meccanica

Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 10 luglio 2023

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Si studi <u>in dettaglio</u>, per quanto possibile, la funzione F definita dall'espressione

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^t}{(t+2)(t-2)^{1/3}}\,dt,$$

tracciandone un grafico qualitativo.

Si dica poi quante soluzioni ha l'equazione

$$F(x) = \lambda \qquad \text{al variare del parametro } \lambda \in [0, +\infty).$$

2. Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{n^8+n^4+1}}{n^2+n+1}\right)\right]\left[\operatorname{sen}\left(\frac{n^2+n+1}{\sqrt{n^8+n^4+1}}\right)\right].$$

3. Si scriva lo sviluppo di Taylor fino al sesto ordine nel punto $x = 0$ della funzione

$$f(x) = \sqrt{1 + \operatorname{sen}^3 x}\,.$$

4 . Si calcoli

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{(|x|-2)(x+2)}\,dx\,.$$

Soluzioni

1. Innanzitutto si osservi che

$$\int_0^2 \frac{e^t}{(t+2)(t-2)^{1/3}}\,dt \qquad \text{e} \qquad \int_0^{-2} \frac{e^t}{(t+2)(t-2)^{1/3}}\,dt$$

sono integrali impropri, il primo convergente, il secondo divergente positivamente. Analogamente è convergente l'integrale

$$\int_2^a \frac{e^t}{(t+2)(t-2)^{1/3}}\,dt$$

qualunque sia $a > 2$. Di conseguenza il dominio di F risulta essere

$$\mathrm{dom}(F) = (-2, +\infty).$$

Come già detto si ha

$$\lim_{x\to -2^+} F(x) = +\infty.$$

Vediamo il limite all'altro estremo del dominio:

$$\lim_{x\to +\infty} F(x) = \int_0^2 \frac{e^t}{(t+2)(t-2)^{1/3}}\,dt + \lim_{x\to +\infty} \int_2^x \frac{e^t}{(t+2)(t-2)^{1/3}}\,dt = +\infty.$$

Vediamo la derivata prima:

$$F'(x) = \frac{e^x}{(x+2)(x-2)^{1/3}}.$$

La derivata ha come dominio l'insieme $(-2, 2) \cup (2, +\infty)$. Inoltre

$$F'(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } x \in (-2, 2) \\ > 0 & \text{se } x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

e

$$\lim_{x\to -2^-} F'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to -2^+} F'(x) = +\infty,$$

quindi in -2 il grafico di F ha una cuspide.
Proviamo a studiare la derivata seconda, che ha lo stesso dominio di F':

$$\begin{aligned} F''(x) &= \left(\frac{1}{(x+2)(x-2)^{1/3}}\right)^2 \left[e^x(x+2)(x-2)^{1/3} - e^x(x-2)^{1/3} - \frac{1}{3}e^x \frac{x+2}{(x-2)^{2/3}}\right] = \\ &= \frac{e^x(x-2)^{1/3}}{(x+2)^2(x-2)^{2/3}} \left[(x+2) - 1 - \frac{1}{3}\frac{x+2}{x-2}\right] = \\ &= \frac{e^x(x-2)^{1/3}}{(x+2)^2(x-2)^{2/3}} \, \frac{3(x+2)(x-2) - 3(x-2) - (x+2)}{3(x-2)} = \\ &= \frac{e^x}{(x+2)^2(x-2)^{2/3}} \, \frac{3x^2 - 4x - 8}{3(x-2)^{2/3}}. \end{aligned}$$

L'unico termine che contribuisce al segno della derivata seconda è $3x^2 - 4x - 8$, in quanto gli altri fattori sono tutti positivi. Tale polinomio ha le due radici

$$x_1 = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{28}}{3} = \frac{2}{3}\left(1 - \sqrt{7}\right) \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{28}}{3} = \frac{2}{3}\left(1 + \sqrt{7}\right).$$

Poiché

$$2 = \sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9} = 3$$

si ha che

$$-\frac{4}{3} = \frac{2}{3}(1-3) < x_1 < \frac{2}{3}(1-2) = -\frac{2}{3}$$

e quindi in particolare appartiene al dominio di F, e

$$x_2 > \frac{2}{3}(1+2) = 2.$$

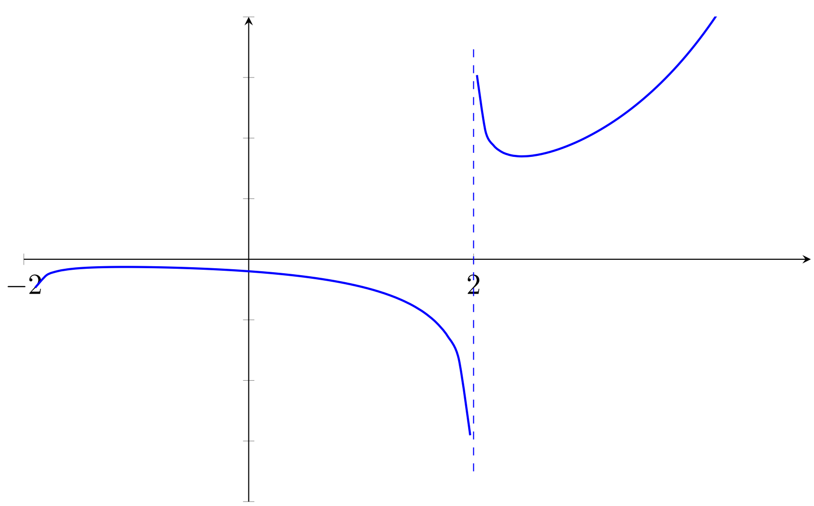
Di conseguenza

$$F''(x) \begin{cases} > 0 & \text{se } x \in (-2, x_1), \\ = 0 & \text{se } x = x_1, \\ < 0 & \text{se } x \in (x_1, 2) \cup (2, x_2), \\ = 0 & \text{se } x = x_2, \\ > 0 & \text{se } x \in (x_2, +\infty). \end{cases}$$

La funzione non presenta asintoti: infatti (per la regola di de l'Hôpital)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{(x+2)(x-2)^{1/3}} = +\infty.$$

Quello che segue è il grafico di F' (quello di F è più in basso)



Inoltre si osservi che la funzione F non ha massimo, nemmeno massimi locali, e ammette minimo nel punto 2, il cui valore (che non riusciamo a calcolare esplicitamente, ma che è negativo) è

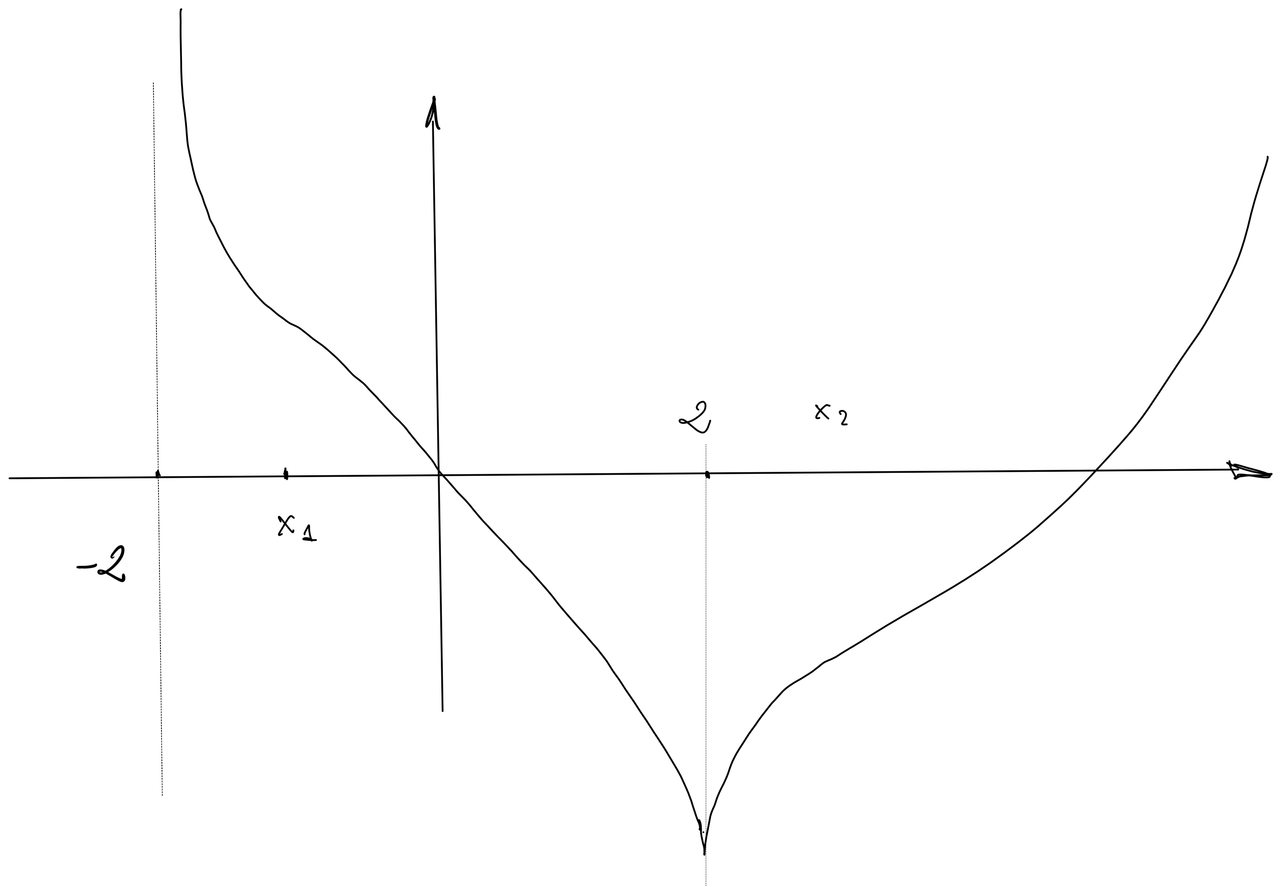
$$\int_0^2 \frac{e^t}{(t+2)(t-2)^{1/3}}\,dt\,.$$

Il grafico è riportato nella pagina che segue.

Infine, per rispondere all'ultimo quesito, l'equazione

$$F(x) = \lambda$$

ha sempre due, e solamente due, soluzioni per ogni $\lambda \geqslant 0$, visto che f è prima strettamente decrescente, poi strettamente crescente a ha limite $+\infty$ agli estremi del dominio.



-2
x_1
2
x_2

2. Si ha che

$$\left|\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{n^8+n^4+1}}{n^2+n+1}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n^2+n+1}{\sqrt{n^8+n^4+1}}\right)\right| \leqslant \operatorname{sen}\left(\frac{n^2+n+1}{\sqrt{n^8+n^4+1}}\right)$$

e quest'ultimo termine è (positivo e) asintotico a $1/n^2$ dal momento che

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n^2+n+1}{\sqrt{n^8+n^4+1}}\right)}{\frac{1}{n^2}} &= \lim_{n\to+\infty} n^2\operatorname{sen}\left(\frac{n^2+n+1}{\sqrt{n^8+n^4+1}}\right) = \\ &= \lim_{n\to+\infty} n^2\operatorname{sen}\left(\frac{n^2(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^4\sqrt{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^8}}}\right) = 1,\end{aligned}$$

di conseguenza la serie è assolutamente convergente, e quindi anche semplicemente convergente.

3. Prima di tutto si osservi che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^3} = 1$$

per cui, per arrivare al sesto ordine, dovrebbe essere sufficiente sviluppare la funzione $t \mapsto \sqrt{1+t}$ fino al secondo ordine. Scriviamo

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}\,t - \frac{1}{8}\,t^2 + o(t^2)$$

da cui

$$\begin{aligned}f(x) = \sqrt{1+\operatorname{sen}^3 x} &= 1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^3 x - \frac{1}{8}\operatorname{sen}^6 x + o(\operatorname{sen}^6 x) = \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^3 - \frac{1}{8}\,(x+o(x))^6 + o(x^6).\end{aligned}$$

Ora

$$\begin{aligned}&\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^3 = x^3 - 3\,x^2\,\frac{x^3}{6} + o(x^6)\\ &(x+o(x))^6 = x^6 + o(x^6)\end{aligned}$$

da cui infine

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}\,x^3 - \frac{1}{4}\,x^5 - \frac{1}{8}\,x^6 + o(x^6).$$

4. Si osservi che

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{(|x|-2)(x+2)}\,dx = -\int_{-1}^{0} \frac{x^2}{(x+2)^2}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{x^2}{x^2-4}\,dx\,.$$

Calcoliamo il primo dei due:

$$-\int_{-1}^{0} \frac{x^2}{(x+2)^2}\,dx = -\int_{-1}^{0} dx + \int_{-1}^{0} \frac{4x+4}{x^2+4x+4}\,dx = 1 + \int_{-1}^{0} \frac{4x+4}{x^2+4x+4}\,dx.$$

Scriviamo

$$\frac{4x+4}{x^2+4x+4} = 2\,\frac{2x+2}{x^2+4x+4} = 2\,\frac{2x+4-2}{x^2+4x+4} = 2\,\frac{2x+4}{x^2+4x+4} - \frac{4}{(x+2)^2}$$

da cui si ottiene

$$\int_{-1}^{0} \frac{4x+4}{x^2+4x+4}\,dx = 2\,\log(x^2+4x+4)\Big|_{-1}^{0} + \frac{4}{x+2}\Big|_{-1}^{0} = 2\log 4 + 2 - 4$$

da cui

$$-\int_{-1}^{0} \frac{x^2}{(x+2)^2}\,dx = -3 + \log 16\,.$$

Per quanto riguarda il secondo si ha:

$$\int_{0}^{1} \frac{x^2}{x^2-4}\,dx = 1 + \int_{0}^{1} \frac{4}{x^2-4}\,dx\,.$$

Cercando delle costanti A, B tali che

$$\frac{4}{x^2-4} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2}$$

si ottengono

$$A = -1, \qquad B = 1,$$

da cui

$$\int_{0}^{1} \frac{4}{x^2-4}\,dx = -\log|x+2|\Big|_{0}^{1} + \log|x-2|\Big|_{0}^{1} = -\log(x+2)\Big|_{0}^{1} + \log(2-x)\Big|_{0}^{1} = -\log 3\,.$$

Il valore dell'integrale definito richiesto è quindi dato da

$$-3 + \log 16 + 1 - \log 3 = -2 + \log\frac{16}{3}\,.$$