CdL Ingegneria Meccanica

Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 15 settembre 2023

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Si studi il seguente integrale improprio

$$\int_0^1 \log \frac{1}{x^2}\, dx.$$

2. Si studi in dettaglio la funzione f definita dall'espressione

$$f(x) = \log\left(\frac{1+|x-1|}{x^2}\right).$$

3. Si calcoli

$$\int \frac{x+\sqrt{x+1}}{2x+1}\, dx.$$

4 . Si studi il seguente limite al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x+\frac{\alpha}{2}x^2+\frac{x^3}{6}} + \alpha x - 1}{x + \operatorname{sen}(\alpha x)}$$

Soluzioni

1. Scrivendo $\log \frac{1}{x^2} = -2\log x$, si può calcolare direttamente l'integrale (che quindi risulta convergente) integrando per parti

$$\int_0^1 \log \frac{1}{x^2}\, dx = -2 \int_0^1 \log x \, dx = -2 \left[x \log x \Big|_0^1 - \int_0^1 dx \right] = 2$$

dove con $x \log x \Big|_0^1$ si intende

$$1 \log 1 - \lim_{x \to 0^+} x \log x = 0.$$

Diversamente, se non si usa l'uguaglianza scritta sopra, si può stimare l'integrale come segue: con il cambio di variabile

$$y = \frac{1}{x}$$

l'integrale diventa

$$\int_{+\infty}^1 \left(-\frac{1}{y^2} \right) \log y^2 \, dy = \int_1^{+\infty} \frac{\log y^2}{y^2}\, dy.$$

Per confronto si ha che tale integrale converge: infatti (anziché $3/2$ si può considerare un qualunque $p \in (1,2)$)

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{\frac{\log y^2}{y^2}}{\frac{1}{y^{3/2}}} = 0$$

per cui, poiché

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{y^{3/2}}\, dy \qquad \text{è convergente,}$$

lo è anche l'integrale di partenza.

Un terzo modo è un confronto diretto senza fare un cambio di variabile (anziché $1/2$ si può considerare un qualunque $p \in (0,1)$):

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^{1/2}}} = \lim_{x \to 0} \sqrt{x}\, \log \frac{1}{x^2} = 0$$

e siccome $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ è convergente, lo è anche l'integrale dato.

2. Innanzitutto si osservi che l'espressione data è definita per ogni valore di x diverso da zero, quindi prendiamo come dominio di f l'insieme

$$\mathrm{dom}\,(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

In tale insieme la funzione risulta continua.
Svolgiamo i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty\,,$$
$$\lim_{x\to0^-} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty\,.$$

Per svolgere i calcoli per le derivate si può procedere mantendo per f. l'espressione con il modulo oppure, come è più conveniente in questo caso, dividere l'espressione di f a seconda del segno di $x-1$: scriviamo

$$f(x) = \begin{cases} \log\dfrac{1}{x} & \text{se } x \geqslant 1\,, \\[2ex] \log\dfrac{2-x}{x^2} & \text{se } x < 1\,, \end{cases}$$

dove si sottointende (e si sottointenederà) che le scritture sono valide per x appartenente al dominio di f, quindi, nel secondo caso, con $x < 1$ si intende $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$.
Si osservi che, volendo studiare il segno di f, in particolare per $x < 1$ si ha:

$$f(x) = 0 \quad \text{se e solo se} \quad \frac{2-x}{x^2} = 1$$

che ha come soluzione -2 (per $x \geqslant 1$ la cosa è immediata). In conclusione si ha

$$f(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } x < -2\,, \\ = 0 & \text{se } x = -2\,, \\ > 0 & \text{se } x \in (-2, 0) \cup (0, 1)\,, \\ = 0 & \text{se } x = 1\,, \\ < 0 & \text{se } x > 1\,. \end{cases}$$

La derivata prima è data da

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} & \text{se } x > 1\,, \\[2ex] \dfrac{x-4}{x(2-x)} & \text{se } x < 1\,. \end{cases}$$

Per vedere se f è derivabile in 1 possiamo fare il calcolo diretto oppure valutare i due limiti (destro e sinistro) di f' in 1:

$$\lim_{x\to1^-} f'(x) = -3\,, \qquad \lim_{x\to1^+} f'(x) = -1,$$

quindi

$$\mathrm{dom}\,(f') = \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$$

e il punto 1 è un punto angoloso. Infine il segno di f' è dato da (con $x \in \operatorname{dom}(f')$)

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } x > 0\,, \\ > 0 & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

Per quanto riguarda la derivata seconda si ha

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{se } x > 1\,, \\ \dfrac{x^2 - 8x + 8}{x^2(2-x)^2} & \text{se } x < 1\,, \end{cases}$$

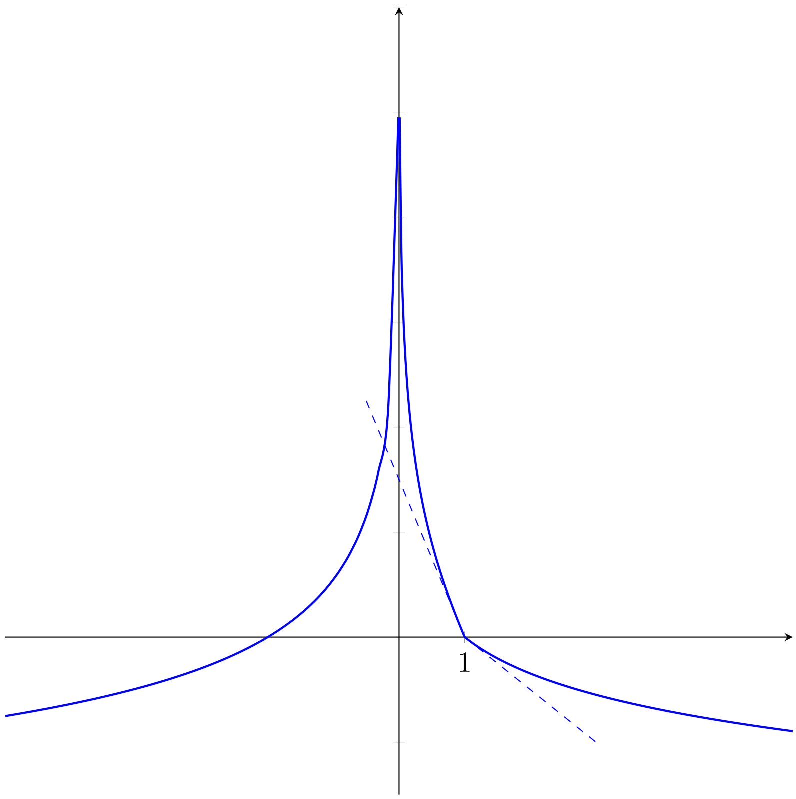
e

$$\operatorname{dom}(f'') = \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}\,.$$

Studiandone il segno si ottiene immediatamente che per $x > 1$ la derivata seconda di f è positiva. Per $x < 1$ va studiato il segno di $x^2 - 8x + 8$. Gli zeri di questo polinomio sono $4 - 2\sqrt{2}$ e $4 + 2\sqrt{2}$, entrambi maggiori di 1 (si ha che $4 - 2\sqrt{2} > 1 \Leftrightarrow 3 > 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 9 > 8$).
Per cui f'' risulta positiva anche per $x < 1$, dove è definita. Per cui

$$f'' > 0 \qquad \text{in } \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$$

da cui si deduce che f è convessa negli intervalli contenuti nel suo dominio e in particolare in $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, +\infty)$.
Il grafico è il seguente



3. Sostituendo una nuova variabile t a $\sqrt{x+1}$ si ottiene

$$x = t^2 - 1, \qquad dx = 2t\,dt.$$

Otteniamo il nuovo integrale

$$\int \frac{t^2 - 1 + t}{2(t^2-1)+1}\, 2t\,dt.$$

Dividendo il polinomio a numeratore per quello a denominatore si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{t^2 - 1 + t}{2(t^2-1)+1}\, 2t &= \frac{(2t^2+2t-2)t}{2t^2-1} = \frac{[(2t^2-1)+(2t-1)]t}{2t^2-1} = \\ &= t + \frac{2t^2-t}{2t^2-1} = t + \frac{2t^2-1-t+1}{2t^2-1} = \\ &= t + 1 - \frac{t-1}{2t^2-1}. \end{aligned}$$

Ora

$$\frac{t-1}{2t^2-1} = \frac{1}{4}\,\frac{4t}{2t^2-1} - \frac{1}{2t^2-1}$$

e infine

$$\frac{1}{2t^2-1} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{1}{2}\,\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{t-\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{2}\,\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{t+\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

per cui

$$\frac{t^2-1+t}{2(t^2-1)+1}\,2t = t+1-\frac{1}{4}\,\frac{4t}{2t^2-1}+\frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{2}}{t-\frac{1}{\sqrt{2}}}-\frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{2}}{t+\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Integrando si ha

$$\frac{t^2}{2}+t-\frac{1}{4}\,\log(2t^2-1)+\frac{\sqrt{2}}{4}\,\log\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{\sqrt{2}}{4}\,\log\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+c\,.$$

A questo punto, sostituendo a t la quantità $\sqrt{x+1}$ si ottengono le primitive cercate.

4. Usiamo gli sviluppi di Taylor. Sviluppando il primo termine del numeratore fino al terzo ordine si ha

$$\begin{aligned} e^{x+\frac{\alpha}{2}x^2+\frac{x^3}{6}} &= 1+x+\frac{\alpha}{2}x^2+\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2}\left(x+\frac{\alpha}{2}x^2+\frac{x^3}{6}\right)^2+\frac{1}{6}\left(x+\frac{\alpha}{2}x^2+\frac{x^3}{6}\right)^3+ \\ &\quad + o\left(\left(x+\frac{\alpha}{2}x^2+\frac{x^3}{6}\right)^3\right) = \\ &= 1+x+\frac{\alpha}{2}x^2+\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2}\left(x^2+\alpha x^3\right)+\frac{1}{6}\,x^3+o(x^3) \end{aligned}$$

per cui il numeratore diventa

$$e^{x+\frac{\alpha}{2}x^2+\frac{x^3}{6}}+\alpha\,x-1 = (1+\alpha)x+\frac{1+\alpha}{2}\,x^2+\left(\frac{1}{3}+\frac{\alpha}{2}\right)\,x^3+o(x^3).$$

Il denominatore invece è

$$x+\operatorname{sen}(\alpha x) = (1+\alpha)x-\frac{\alpha^3}{6}\,x^3+o(x^3).$$

Entrambi sono infinitesimi di ordine 1, a meno che α non sia -1. Si ha quindi che il limite richiesto è

$$1 \quad \text{per ogni } \alpha\neq -1\,, \qquad -1 \quad \text{se } \alpha = -1\,.$$