CdL Ingegneria Meccanica

Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 29 gennaio 2024

CdL Ingegneria Meccanica

Prova scritta di Analisi Matematica 1 - Integrazione

Padova, 29 gennaio 2024

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Si trovino tutte le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} &u'' - 5u' + 6u = 0, \\ &u'' - 5u' + 6u = \operatorname{sen} x, \\ &u'' - 5u' + 6u = \operatorname{sen} x + e^{3x}. \end{aligned}$$

2. Si studi <u>in dettaglio</u> la funzione f definita dall'espressione

$$f(x) = \log\left(e^x - x\right).$$

Dopodiché si dica, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, quante soluzioni ha l'equazione

$$f(x) = \lambda.$$

3. Si calcoli

$$\int \frac{\log(x^2 + 2x + 5)}{x^2}\, dx.$$

4 . Si studi la seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(n \operatorname{sen} \frac{1}{n}\right).$$

Soluzioni

1. Il polinomio caratteristico associato all'equazione differenziale è

$$D^2 - 5D + 6 = 0$$

che ha come soluzioni 3 e 2. Le soluzioni sono quindi date da

$$c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} .$$

Per quanto riguarda la seconda basta cercare tra le soluzioni del tipo

$$v(x) = a \operatorname{sen} x + b \cos x.$$

Calcolando le espressioni di v' e v'' e inserendole nell'equazione si ottengono i valori per a e b:

$$a = b = \frac{1}{10}.$$

Infine, poiché il dato e^{3x} nella terza equazione è anche soluzione dell'omogenea cerchiamo una soluzione del tipo

$$w(x) = c\, x\, e^{3x}.$$

Calcolando le espressioni di w' e w'' e inserendole nell'equazione si ottiene che $c = 1$. Quindi infine le soluzioni dell'ultima equazione sono date da

$$u(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{10} \operatorname{sen} x + \frac{1}{10} \cos x + x\, e^{3x} , \qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R} .$$

2. Innanzitutto si osservi che l'espressione data è definita per ogni valore di $x \in \mathbf{R}$. Infatti la funzione è definita se

$$e^x - x > 0.$$

Poiché (si è visto a lezione)

$$e^x \geqslant x + 1 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbf{R} \qquad \text{(e l'uguaglianza vale se e solo se } x = 0) \qquad (1)$$

si ha in particolare che $e^x - x > 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.
Oppure, studiando la funzione $h(x) = e^x - x$, si ha che h ammette minimo perché $\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$ e tale minimo è un valore positivo.
Svolgendo i limiti agli estremi del dominio si ottiene:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty , \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty .$$

La funzione ha un asintoto obliquo: infatti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 , \qquad \lim_{x\to+\infty} \big[f(x) - x\big] = 0 .$$

Studiamo ora le derivate. Si ha

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}\,.$$

Per quanto visto prima il denominatore è sempre positivo. Si conclude che

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{per } x < 0\,, \\ = 0 & \text{per } x = 0\,, \\ > 0 & \text{per } x > 0\,. \end{cases}$$

Da ciò si conclude anche che $x = 0$ è punto di minimo assoluto e che $f(0) = 0$. Derivando ulteriormente si ha

$$f''(x) = \frac{1}{(e^x - x)^2}\left[e^x(e^x - x) - (e^x - 1)^2\right] = \frac{e^x(2 - x) - 1}{(e^x - x)^2}\,.$$

Per studiare il segno della derivata seconda si può procedere come segue.
Un modo è il seguente: si può studiare la funzione $g(x) = e^x(2 - x) - 1$. Si ha

$$g'(x) = e^x(2 - x) - e^x = e^x(1 - x)$$

che risulta positiva per $x < 1$, nulla per $x = 1$, negativa per $x > 1$. Quindi la funzione g ha un massimo in 1 dove vale $e - 1 > 0$. Poiché

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -1, \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$$

si ha che la funzione g, e di conseguenza f'', è positiva in un intervallo (x_1, x_2) con $x_2 > 1$. Per stabilire il segno di x_1 è sufficiente valutare g in 0:

$$g(0) = 1 > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 0 \in (x_1, x_2)$$

e di conseguenza $x_1 < 0$.
Un altro modo è il seguente: si ha che

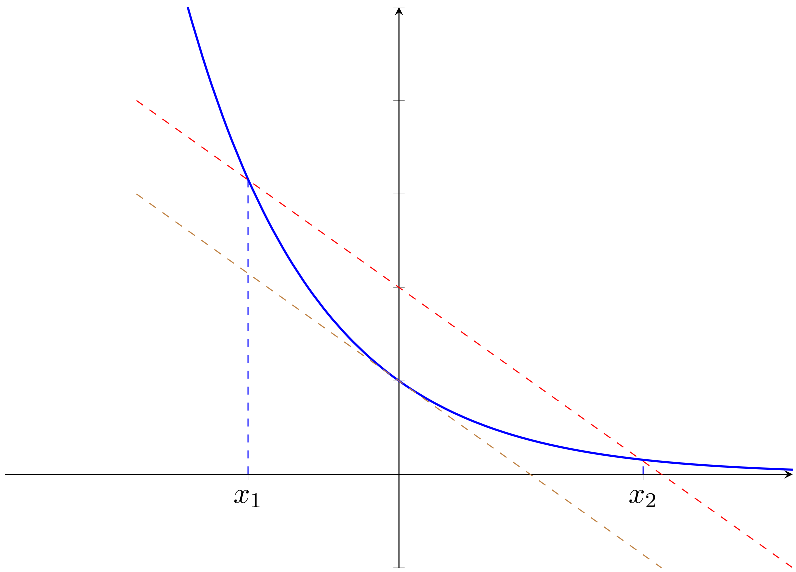
$$e^x(2 - x) - 1 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{-x} < (2 - x).$$

Usando (1) si ricava che

$$e^{-x} \geqslant 1 - x \quad \Longleftrightarrow \quad e^{-x} + x - 1 \geqslant 0$$

per ogni $x \in \mathbf{R}$ e l'uguaglianza vale se e solo se $x = 0$. Dalla convessità della funzione $x \mapsto e^{-x}$ si deduce che esistono due valori $x_1 < 0$ e $x_2 > 0$ per i quali

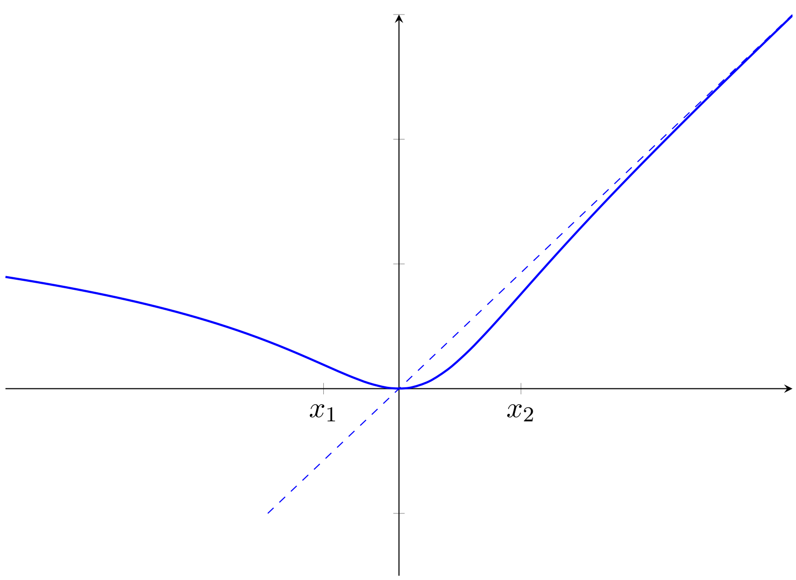
$$e^{-x} < 2 - x = 1 - x + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (x_1, x_2).$$



Di conseguenza vi sono due, e solo due, cambi di concavità (in x_1 e in x_2) e

$$f''(x) \begin{cases} < 0 & \text{per } x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)\,, \\ = 0 & \text{per } x = x_1 \text{ o } x = x_2\,, \\ > 0 & \text{per } x \in (x_1, x_2)\,. \end{cases}$$

Il grafico è il seguente



Per concludere, l'equazione $f(x) = \lambda$ ha esattamente

$$\text{una soluzione per } \lambda = 0, \qquad \text{due soluzioni per } \lambda > 0$$

e nessuna soluzione per $\lambda < 0$.

3. Integrando per parti si ha

$$\int \frac{\log(x^2+2x+5)}{x^2}\,dx = -\frac{\log(x^2+2x+5)}{x} + \int \frac{2x+2}{x(x^2+2x+5)}\,dx\,.$$

Per integrare il termine a destra scriviamo

$$\frac{2x+2}{x(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5} \tag{2}$$

e cerchiamo A, B, C. Imponendo

$$(A+B)x^2 + (2A+C)x + 5A = 2x+2$$

si ottengono i valori

$$A = \frac{2}{5}, \qquad B = -\frac{2}{5}, \qquad C = \frac{6}{5}.$$

Per quanto riguarda il primo addendo del termine di destra in (2) si ha

$$\frac{2}{5}\int \frac{1}{x}\,dx = \frac{2}{5}\log|x| + c_1.$$

Per quanto riguarda il secondo:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{5}\,\frac{2x-6}{x^2+2x+5} &= -\frac{1}{5}\,\frac{2x+2}{x^2+2x+5} + \frac{1}{5}\,\frac{8}{x^2+2x+5} = \\ &= -\frac{1}{5}\,\frac{2x+2}{x^2+2x+5} + \frac{8}{5}\,\frac{1}{(x+1)^2+4}. \end{aligned}$$

Nuovamente, il primo addendo è integrabile direttamente e si ha

$$-\frac{1}{5}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx = -\frac{1}{5}\,\log(x^2+2x+5) + c_2.$$

Infine

$$\frac{8}{5}\,\frac{1}{4}\int \frac{1}{(x+1)^2+4}\,dx = \frac{2}{5}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\,dx$$

che, dopo il cambio di variabile $y = (x+1)/2$, dà

$$\frac{4}{5}\,\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c_3.$$

Si ha quindi che l'insieme delle primitive è dato da

$$-\frac{\log(x^2+2x+5)}{x} + \frac{2}{5}\log|x| - \frac{1}{5}\log(x^2+2x+5) + \frac{4}{5}\,\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$$

al variare di $c \in \mathbf{R}$.

4. Innanzitutto si osservi che i termini della serie hanno segno negativo.
Si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} n \operatorname{sen} \frac{1}{n} = 1$$

per cui, scrivendo

$$n \operatorname{sen} \frac{1}{n} = 1 + \left(n \operatorname{sen} \frac{1}{n} - 1 \right)$$

si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(n \operatorname{sen} \frac{1}{n}\right)}{n \operatorname{sen} \frac{1}{n} - 1} = 1\,.$$

Di conseguenza la serie data ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n \operatorname{sen} \frac{1}{n} - 1 \right)\,.$$

Ora:

$$\operatorname{sen} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

per cui

$$n \operatorname{sen} \frac{1}{n} - 1 = -\frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

e quindi il termine generale della serie è asintotico a $-\frac{1}{6n^2}$ e di conseguenza la serie risulta convergente (ad un valore negativo).