CdL Ingegneria Meccanica

Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 16 febbraio 2024

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Si studino i seguenti integrali impropri:

$$i)\qquad \int_1^{+\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)dx\,,$$

$$ii)\qquad \int_1^{+\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)^{\alpha}\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)^{\beta}dx\,,\qquad \alpha,\beta>0\,.$$

2. Si studi <u>in dettaglio</u> la funzione f definita dall'espressione

$$f(x)=e^x\sqrt[3]{1-e^{-x}}.$$

Dopodiché si dica, al variare di $\lambda\in\mathbf{R}$, quante soluzioni ha l'equazione

$$f(x)=\lambda.$$

3. Si trovino, se esistono, le soluzioni ai due seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'=\dfrac{x\log x}{2y}\\ y(1)=1\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases} y'=\dfrac{x\log x}{2y}\\ y(1)=-1\end{cases}$$

4 . Si calcoli il seguente limite al variare di $\alpha,\beta>0$:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^\beta}{e^{1-\cos x}-\cosh\alpha x}$$

Soluzioni

1. Il problema è dato dal fatto che il dominio è illimitato. Si osservi che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1}{\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}$$

in quanto, considerando lo sviluppo Taylor di $t\mapsto\sqrt{1+t}$ in 0, si ha

$$\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1=\left(1+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-1=\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

per cui la funzione integranda risulta asintotica a $+\infty$ alla funzione $1/x$ in quanto

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)}{\frac{1}{x^2}\,x}=\frac{1}{2}.$$

Di conseguenza l'integrale improprio ha lo stesso carattere dell'integrale

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx \qquad \text{il quale diverge positivamente.}$$

Per quanto riguarda il secondo punto si ha che la funzione integranda risulta asintotica a $+\infty$ alla funzione

$$\frac{1}{x^{2\alpha}}\,x^{\beta}.$$

Di conseguenza l'integrale improprio ha lo stesso carattere dell'integrale

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{2\alpha-\beta}}\,dx \qquad \text{il quale converge se e solo se } 2\alpha-\beta>1.$$

2. Innanzitutto si osservi che l'espressione data è definita per ogni valore di $x\in\mathbf{R}$. Svolgendo i limiti agli estremi del dominio si ottiene:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0\,, \qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

e

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty,$$

quindi la funzione non ha un asintoto all'infinito.
Si osserva che f in 0 vale 0, è positiva per $x>0$, negativa per $x<0$.
Studiamo ora le derivate. Si ha

$$f'(x)=e^x\sqrt[3]{1-e^{-x}}\;+\;\frac{1}{3}\,\frac{e^xe^{-x}}{(1-e^{-x})^{2/3}}=\frac{3e^x(1-e^{-x})+1}{3(1-e^{-x})^{2/3}}=\frac{3e^x-2}{3(1-e^{-x})^{2/3}}.$$

Si osservi che

$$\operatorname{dom}(f') = \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

e che

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty\,.$$

Studiamone ora il segno: il denominatore è positivo per ogni $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, il numeratore

$$3e^x - 2 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^x > \frac{2}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad x > \log\frac{2}{3}.$$

Per cui

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{per } x \in \left(-\infty, \log\frac{2}{3}\right)\,, \\ = 0 & \text{per } x = \log\frac{2}{3}\,, \\ > 0 & \text{per } x \in \left(\log\frac{2}{3}, 0\right) \cup (0, +\infty) \end{cases}$$

e il punto $\bar{x} = \log\frac{2}{3}$ è punto di minimo assoluto e il valore

$$f\left(\log\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \qquad \text{è il minimo assoluto.}$$

Derivando ulteriormente

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{9(1-e^{-x})^{4/3}}\left[9e^x(1-e^{-x})^{2/3} - 2(3e^x-2)(1-e^{-x})^{-1/3}e^{-x}\right] = \\ &= \frac{(1-e^{-x})^{-1/3}}{9(1-e^{-x})^{4/3}}\left[9e^x(1-e^{-x}) - 2(3e^x-2)e^{-x}\right] = \\ &= \frac{1}{9(1-e^{-x})^{5/3}}\left[9e^x - 9 - 6 + 4e^{-x}\right] = \\ &= \frac{e^{-x}}{9(1-e^{-x})^{5/3}}\left[9e^{2x} - 15e^x + 4\right] \end{aligned}$$

e

$$\operatorname{dom}(f'') = \mathbf{R} \setminus \{0\}\,.$$

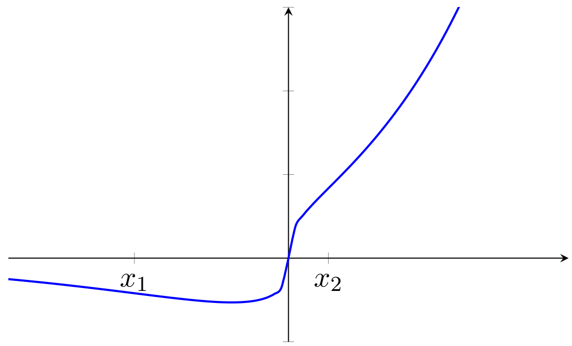
Come già visto, il segno di $1 - e^{-x}$ è positivo per x positivo, negativo per x negativo. Rimane quindi da studiare il termine tra parentesi quadre. Chiamando y la quantità e^x si ha che

$$\begin{aligned} 9y^2 - 15y - 4 < 0 \qquad &\Longleftrightarrow \qquad y \in \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right), \\ 9y^2 - 15y - 4 > 0 \qquad &\Longleftrightarrow \qquad y \in \left(0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right) \end{aligned}$$

quindi

$$f''(x) \begin{cases} < 0 & \text{per } x \in \left(-\infty, \log\frac{1}{3}\right) \cup \left(0, \log\frac{4}{3}\right)\,, \\ = 0 & \text{per } x = \log\frac{1}{3} \text{ o } x = \log\frac{4}{3}\,, \\ > 0 & \text{per } x \in \left(\log\frac{1}{3}, 0\right) \cup \left(\log\frac{4}{3}, +\infty\right)\,. \end{cases}$$

Il grafico è il seguente ($x_1 = \log\frac{1}{3}$, $x_2 = \log\frac{4}{3}$)



Per concludere, l'equazione $f(x) = \lambda$ ha esattamente

$$\text{una soluzione per } \lambda > 0 \quad \text{e per } \lambda = -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{2}},$$
$$\text{due soluzioni per } \lambda \in \left(-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 0\right).$$

3. Dapprima integriamo l'equazione separando le variabili:

$$2yy' = x \log x$$

da cui

$$y^2(x) = \int x \log x \, dx = \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx + c = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + c$$

da cui si hanno le due possibilità

$$y(x) = \sqrt{\frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + c} \qquad \text{o} \qquad y(x) = -\sqrt{\frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + c}\ .$$

In entrambi i casi si ha

$$y^2(1) = 1 \qquad \text{e} \qquad y^2(1) = -\frac{1}{4} + c,$$

da cui si ottiene $c = 5/4$. Di conseguenza nel primo caso si ha

$$y(x) = \sqrt{\frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + \frac{5}{4}}\ ,$$

nel secondo

$$y(x) = -\sqrt{\frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + \frac{5}{4}}\ .$$

4. Lo sviluppo di Taylor del coseno iperbolico al quarto ordine in 0 è

$$\cosh\, t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) = \frac{1}{2}\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{4!} + 1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{4!} + o(t^4)\right) =$$
$$= 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + o(t^4)$$

per cui

$$\cosh \alpha x = 1 + \alpha^2\, \frac{x^2}{2} + \alpha^4 \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\,.$$

Sviluppando l'altro addendo del denominatore si ha:

$$1 - \cos x = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\,,$$
$$e^{1-\cos x} = e^{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^4)} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^4) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)^2 =$$
$$= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^4) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} + o(x^6)\right) =$$
$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + o(x^4)\,.$$

Per cui

$$e^{1-\cos x} - \cosh \alpha x = (1 - \alpha^2)\frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{12} - \frac{\alpha^4}{24}\right) x^4 + o(x^4).$$

Il limite è quindi

$$\text{se } \alpha \neq 1 \qquad \begin{cases} +\infty & \text{se } \beta \in (0,2) \ \text{ e } \ 1 - \alpha^2 > 0 \\ -\infty & \text{se } \beta \in (0,2) \ \text{ e } \ 1 - \alpha^2 < 0 \\ \frac{2}{1-\alpha^2} & \text{se } \beta = 2 \\ 0 & \text{se } \beta > 2 \end{cases}$$

e

$$\text{se } \alpha = 1 \qquad \begin{cases} +\infty & \text{se } \beta \in (0,4) \\ \frac{1}{\frac{1}{12} - \frac{1}{24}} = 24 & \text{se } \beta = 4 \\ 0 & \text{se } \beta > 4. \end{cases}$$