CdL Ingegneria Meccanica

Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 8 luglio 2024

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Si studino i seguenti integrali impropri ($\alpha, \beta > 0$):

$$\int_0^1 \frac{1}{\log x}\, dx\,, \qquad \int_0^1 \frac{(3-2x-x^2)^\alpha}{|\log x|^\beta}\, dx.$$

2. Si studi in dettaglio la funzione f definita dall'espressione

$$f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}\, \frac{1}{1-x}.$$

Dopodiché si dica, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, quante soluzioni ha l'equazione

$$f(x) = \lambda.$$

3. Si calcoli il seguente integrale

$$\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1} \operatorname{arctg} x\, dx\,.$$

4 . Si calcoli il seguente limite al variare di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x+x^2+x^3} + \sqrt{1-\alpha x - \alpha x^2} - 2}{\sqrt{1+x^{3/2}} + \cos x^{3/4} - 2}.$$

Soluzioni

1. Il problema, in entrambi gli integrali, è dato dal fatto che il denominatore si annulla in 1. Poiché

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\log x}{x-1} = 1$$

si ha che il primo integrale diverge (negativamente) poiché ha lo stesso carattere di

$$\int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx\,.$$

Per quanto riguarda il secondo, poiché

$$3-2x-x^2 = (1-x)(3+x)$$

si ha che l'integranda nel secondo integrale è asintotica nel punto 1 a

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{(3-2x-x^2)^\alpha}{|\log x|^\beta}}{\frac{1}{(1-x)^{\beta-\alpha}}} = 1$$

e quindi converge se e solo se $\beta-\alpha<1$.

2. La funzione non è definita per $x=1$, quindi il dominio naturale (per ora) è $\mathbf{R}\setminus\{1\}$.
Svolgendo i limiti agli estremi del dominio si ottiene

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$$

e per questo motivo si può estendere la funzione f ad una funzione definita anche nel punto 1 definendola uguale a 0. Chiameremo per semplicità ancora f la nuova funzione che, a questo punto, ha come dominio $\mathbf{R}$.
Vediamo di studiarne la derivata prima. Si ha

$$f'(x) = e^{\frac{1}{1-x}}\,\frac{1}{(1-x)^2}\left[1+\frac{1}{1-x}\right] = e^{\frac{1}{1-x}}\,\frac{1}{(1-x)^2}\left[\frac{2-x}{1-x}\right].$$

Per studiare il segno di f' è sufficiente studiare il segno della quantità $(2-x)/(1-x)$ visto che $e^{\frac{1}{1-x}}\,\frac{1}{(1-x)^2}$ è positivo per ogni $x\neq 2$:

$$\frac{2-x}{1-x}\begin{cases} =0 & \text{per } x=2\\ <0 & \text{per } x\in(1,2)\\ >0 & \text{per } x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)\end{cases}$$

per cui

$$f'(x)\begin{cases} = 0 & \text{per } x = 2 \\ < 0 & \text{per } x \in (1,2) \\ > 0 & \text{per } x \in (-\infty,1) \cup (2,+\infty). \end{cases}$$

Si osservi che

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = 0.$$

Studiamo la derivata seconda. Scrivendo

$$f'(x) = e^{\frac{1}{1-x}}\,\frac{2-x}{(1-x)^3}$$

si ha

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{\frac{1}{1-x}}\,\frac{2-x}{(1-x)^5} + e^{\frac{1}{1-x}}\,\frac{3(2-x)(1-x)^2-(1-x)^3}{(1-x)^6} = \\ &= e^{\frac{1}{1-x}}\left[\frac{2-x}{(1-x)^5} + \frac{3(2-x)(1-x)-(1-x)^2}{(1-x)^5}\right] = \\ &= e^{\frac{1}{1-x}}\left[\frac{2-x+2x^2-7x+5}{(1-x)^5}\right] = \\ &= e^{\frac{1}{1-x}}\,\frac{1}{(1-x)^4}\left[\frac{2x^2-8x+7}{1-x}\right] \end{aligned}$$

per cui studiare il segno della derivata seconda si riduce a studiare il segno di $(2x^2 - 7x + 5)/(1-x)$. Si ha che

$$2x^2-8x+7>0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in (-\infty,1) \cup \left(1, 2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right),$$

$$1-x>0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in (-\infty,1)$$

per cui

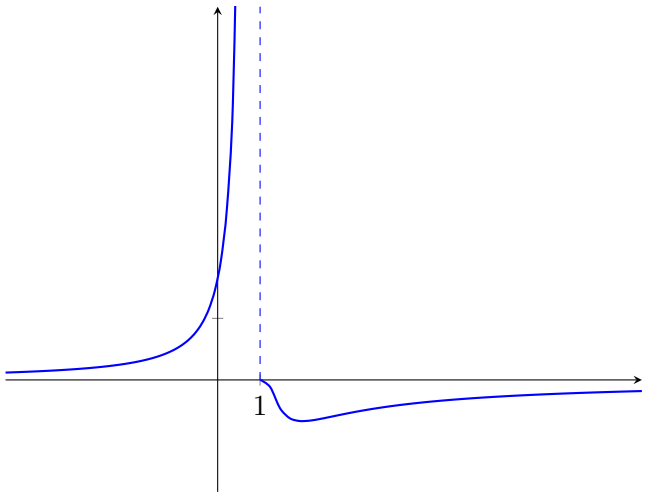
$$f''(x)\begin{cases} = 0 & \text{per } x = 2-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \vee x = 2+\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ < 0 & \text{per } x \in \left(1, 2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right) \\ > 0 & \text{per } x \in (-\infty,1) \cup \left(2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

Questi dati forniscono informazioni riguardo la convessità della funzione f.
Il punto $x = 2$, stazionario, è punto di minimo locale, visto che in un intorno di 2 $f'' > 0$. La stessa conclusione si trae dallo studio del segno di f', essendo $x = 2$ l'unico punto stazionario, f negativa per $x > 1$, decrescente per $x \in (1,2)$, crescente

per $x > 2$. Inoltre f è positiva per $x < 1$, quindi il punto $x = 2$ è anche di minimo assoluto. Il minimo assoluto è

$$f(2) = -\frac{1}{e}.$$

La funzione non ammette massimo (assoluto) poiché è illimitata.
Il grafico è riportato nella figura che segue:



Il numero di soluzioni all'equazione richiesta $f = \lambda$ è:

$$\begin{array}{ll} 0 & \text{per } \lambda < -\dfrac{1}{e}, \\ 1 & \text{per } \lambda = -\dfrac{1}{e}, \\ 2 & \text{per } -\dfrac{1}{e} < \lambda < 0, \\ 1 & \text{per } \lambda \geqslant 0. \end{array}$$

3. Prima di tutto dividiamo il polinomio a numeratore per il polinomio a denominatore, ottenendo

$$x^3 + x + 1 = (x^2 + 1)\, x + 1\,.$$

Di conseguenza

$$\int \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1} \operatorname{arctg} x \, dx = \int x \operatorname{arctg} x \, dx + \int \frac{1}{x^2 + 1} \operatorname{arctg} x \, dx.$$

Integriamo il primo (per parti):

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{arctg} x \, dx &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{1+x^2} \, dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \left(x - \operatorname{arctg} x\right) + c_1 \, .\end{aligned}$$

con $c_1 \in \mathbf{R}$. Il secondo è immediato e risulta

$$\int \frac{1}{x^2+1} \operatorname{arctg} x \, dx = \frac{1}{2}\big(\operatorname{arctg} x\big)^2 + c_2 \qquad (c_2 \in \mathbf{R}) \, .$$

Sommando si conclude.

4. Lo sviluppo di Taylor in 0 al terzo ordine di $f(x) = e^{x+x^2+x^3}$ è

$$\begin{aligned}f(x) &= 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{1}{2}(x + x^2 + x^3)^2 + \frac{1}{6}(x + x^2 + x^3)^3 + o\big((x + x^2 + x^3)^3\big) = \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{1}{2}(x^2 + 2x^3) + \frac{1}{6}\, x^3 + o(x^3) = \\ &= 1 + x + \frac{3}{2}\, x^2 + \frac{13}{6}\, x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

Lo sviluppo di Taylor in 0 al terzo ordine di $g(x) = \sqrt{1 - \alpha x - \alpha x^2}$ è (supponendo $\alpha \neq 0$)

$$\begin{aligned}g(x) &= 1 + \frac{1}{2}\big(-\alpha x - \alpha x^2\big) - \frac{1}{8}\big(-\alpha x - \alpha x^2\big)^2 + \frac{1}{16}\big(-\alpha x - \alpha x^2\big)^3 + o(x^3) = \\ &= 1 - \frac{\alpha}{2} x - \frac{\alpha}{2} x^2 - \frac{\alpha^2}{8} x^2 - \frac{\alpha^2}{4} x^3 - \frac{1}{16} \alpha^3 x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

per cui a numeratore otteniamo

$$\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) x + \left(\frac{3}{2} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{8}\right) x^2 + \left(\frac{13}{6} - \frac{\alpha^2}{4} - \frac{1}{16}\alpha^3\right) x^3 + o(x^3).$$

Per quanto riguarda il denominatore si ha

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + x^{3/2}} &= 1 + \frac{1}{2} x^{3/2} - \frac{1}{8} x^3 + o(x^3) \\ \cos x^{3/4} &= 1 - \frac{x^{3/2}}{2} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)\end{aligned}$$

da cui il denominatore si riduce a

$$-\frac{1}{8} x^3 + \frac{x^3}{12} + o(x^3) = -\frac{1}{24} x^3 + o(x^3).$$

Raccogliendo opportunamente e passando al limite facendo attenzione agli o piccoli si ottiene che il valore del limite quindi è:

$$\frac{\frac{13}{6}-1-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{24}}=-16 \qquad \text{per } \alpha=2,$$

mentre

$$\begin{aligned}\text{per } \alpha\neq 2\text{:} \qquad &\text{se } 1-\frac{\alpha}{2}>0 \ (\alpha<2) \ \text{ il limite è } \ -\infty,\\ &\text{se } 1-\frac{\alpha}{2}<0 \ (\alpha>2) \ \text{ il limite è } \ +\infty,\end{aligned}$$

infatti in questo caso il numeratore è

$$\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)x+\left(\frac{3}{2}-\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha^2}{8}\right)x^2+\left(\frac{13}{6}-\frac{\alpha^2}{4}-\frac{1}{16}\alpha^3\right)x^3+o(x^3)=\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)x+o(x),$$

e il limite si riduce a

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)x+o(x)}{-\frac{1}{24}x^3+o(x^3)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\left(1-\frac{\alpha}{2}+\frac{o(x)}{x}\right)}{-x^3\left(\frac{1}{24}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right)}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}\ \frac{1-\frac{\alpha}{2}+\frac{o(x)}{x}}{\frac{1}{24}+\frac{o(x^3)}{x^3}}.$$