CdL Ingegneria Meccanica

Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 16 settembre 2024

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{3}\Big[x\log^3 x - 3x\log^2 x + 6x\log x - 6x\Big] - \frac{a}{2}\,x^2$$

se ne trovi il dominio (massimale) D e si dica quante soluzioni ha l'equazione (per $x \in D$)

$$f''(x) = 0$$

al variare del parametro $a \in \mathbf{R}$.

2. Si studino le seguenti serie al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\sum (-1)^n \frac{n}{36+n^2}\,, \qquad \sum \left(\frac{36+n^2}{n}\right)^{\alpha} \alpha^n\,.$$

3. Si trovino tutte le soluzioni delle seguente equazione differenziale:

$$2\,u'' + 32\,u = 17\,e^x.$$

4 . Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left((1+x)^{\frac{1}{x}} - e\right)\,\log\left(\cos(x^{1/4})\right)}{\sqrt{1+x^{3/2}} - 1}\,.$$

Soluzioni

1. Valutiamo le derivate della funzione f, che risulta definita solo per $x \in (0, +\infty) =: D$. Si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3}\Big[\log^3 x + 3\log^2 x - 3\log^2 x - 6\log x + 6\log x + 6 - 6\Big] - a\,x = \\ &= \frac{1}{3}\,\log^3 x - a\,x \end{aligned}$$

e quindi

$$f''(x) = \frac{\log^2 x}{x} - a\,.$$

Per rispondere alla domanda possiamo semplicemente cercare quante soluzioni ha l'equazione

$$\frac{\log^2 x}{x} = a\,. \tag{1}$$

Consideriamo la funzione

$$g(x) := \frac{\log^2 x}{x}\,.$$

Si ha che

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} g(x) = 0\,.$$

Per trovare gli zeri di f'' vediamo quando $g = a$ e per far ciò studiamo e deriviamo g. Si ha

$$g'(x) = \frac{1}{x^2}\Big[2\,\log x - \log^2 x\Big]\,.$$

Allora la derivata di g si annulla se

$$\log x = 0 \qquad \text{oppure se} \qquad \log x = 2\,,$$

cioè per

$$x = 1 \qquad \text{o} \qquad x = e^2\,.$$

Si ha che

$$g(1) = 0 \qquad \text{e} \qquad g(e^2) = 2\,.$$

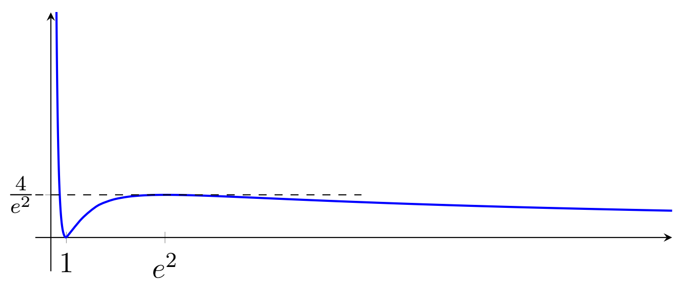
Quindi si ha

$$\begin{array}{lll} g'(x) < 0 & \text{per} & x \in (0,1) \cup (e^2, +\infty) \\ g'(x) = 0 & \text{per} & x = 1 \text{ o } x = e^2 \\ g'(x) > 0 & \text{per} & x \in (1, e^2) \end{array}$$

e, ricordiamo,

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0\,.$$

Nel punto di massimo locale e^2 la funzione g assume il valore $\frac{4}{e^2}$. Volendo tracciare un grafico di g, si ha



In conclusione si ha che $g = a$

$$\begin{aligned} \text{non ha soluzioni per} \qquad & a < 0 \\ \text{ha una sola soluzione per} \qquad & a = 0 \quad \text{e} \quad a > \frac{4}{e^2} \\ \text{ha tre soluzioni per} \qquad & a \in \left(0, \frac{4}{e^2}\right) \\ \text{ha due soluzioni per} \qquad & a = \frac{4}{e^2}. \end{aligned}$$

Il problema può essere risolto anche trasformando l'uguaglianza (1) in

$$\log^2 x - ax = 0\,,$$

ma in tal modo la risoluzione risulta un pochino più elaborata (anche se la tecnica rimane quella utilizzata precedentemente).

2. Si ha che

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\left| \left(\frac{36 + n^2}{n} \right)^{\alpha} \alpha^n \right|} = |\alpha|.$$

Questo ci dice che la serie converge assolutamente, e quindi anche semplicemente, per $\alpha \in (-1, 1)$; che diverge positivamente per $\alpha > 1$; che non converge per $\alpha < -1$, ma essendo in questo caso a segni alterni risulta indeterminata.
Rimangono i casi $|\alpha| = 1$. Se $\alpha = 1$ la serie si riduce a

$$\sum \frac{36 + n^2}{n},$$

che ovviamente diverge positivamente (andando a $+\infty$ il termine n-esimo).
Infineer $\alpha = -1$ la serie diventa

$$\sum (-1)^n \frac{n}{36 + n^2} \,.$$

Il termine $\frac{n}{36+n^2}$ è positivo ed infinitesimo. Bisogna vedere se è decrescente in n. Vediamo tre modi diversi di mostrare che lo è definitivamente.
Il primo è quello diretto: detta $a_n := \frac{n}{36+n^2}$, chiedersi se $a_{n+1} < a_n$ è equivalente a

$$36 < n^2 + n,$$

e questa, evidentemente, è vera per $n \geqslant 6$, e comunque definitivamente.
Un altro modo è quello di usare la disuguaglianza

$$2\,a\,b \leqslant a^2 + b^2 \qquad \text{e vale l'uguaglianza se e solo se} \qquad a = b\,.$$

Si ha che la quantità (prendendo $a = n$ e $b = 6$)

$$a_n := \frac{n}{36 + n^2} \qquad \text{è massima per } n = 6,$$

dopodiché si può mostrare per induzione che $a_{n+1} < a_n$ per ogni $n \geqslant 6$.
Un terzo modo è derivare la funzione

$$f(x) = \frac{x}{36 + x^2}, \qquad x > 0,$$

e verificare che f è decrescente per $x \geqslant 6$. Di conseguenza la successione $(a_n)_n$ è, oltre che positiva ed infinitesima, definitivamente decrescente e quindi la serie converge per il criterio di Leibniz.
In conclusione la serie

$$\begin{aligned} \text{converge per} \qquad & \alpha \in [-1, 1), \\ \text{diverge positivamente per} \qquad & \alpha \in [1, +\infty), \\ \text{è indeterminata per} \qquad & \alpha \in (-\infty, -1). \end{aligned}$$

3. Partiamo dall'equazione omogenea: il polinomio caratteristico è

$$2\,\lambda^2 + 32 = 2(\lambda^2 + 16) = 0$$

le cui soluzioni sono

$$4\,i \qquad \text{e} \qquad -\,4\,i\,.$$

Di conseguenza le soluzioni della prima equazione sono date da

$$u(x) = c_1\,\cos 4x + c_2\,\mathrm{sen}\,4x\,, \qquad \text{al variare di } c_1, c_2 \in \mathbf{R}\,.$$

Per quanto riguarda l'equazione non omogenea, l'annichilatore per la funzione $x \mapsto e^x$ è $D-1$, quindi cerchiamo le soluzioni della seconda equazione tra le soluzioni dell'equazione omogenea

$$(D-1)(D^2+16)u = 0\,,$$

cioè tra le funzioni del tipo

$$u(x) = c_1\,\cos 4x + c_2 \operatorname{sen} 4x + c_3 e^x\,, \qquad \text{al variare di } c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}\,.$$

Ma poiché i primi due termini di questa combinazione sono soluzioni dell'omogenea, è sufficiente limitarsi a cercare tra le funzioni del tipo

$$v(x) = c_3\, e^x\,.$$

Si ha

$$v'(x) = v''(x) = c_3\, e^x\,,$$

per cui inserendo nell'equazione si ha

$$2(v'' + 16\,v) = 2(c_3\, e^x + 16\, c_3\, e^x) = 17\, e^x$$

da cui $c_3 = 1/2$.

4. Partiamo dal termine $(1+x)^{\frac{1}{x}} - e$:

$$\begin{aligned}
&(1+x)^{\frac{1}{x}} - e = e^{\log(1+x)^{\frac{1}{x}}} - e = e\big(e^{\frac{\log(1+x)}{x}-1} - 1\big),\\
&\frac{\log(1+x)}{x} = \frac{1}{x}\Big[x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\Big] = 1 - \frac{x}{2} + o(x),\\
\implies\quad &(1+x)^{\frac{1}{x}} - e = e\big(e^{-\frac{x}{2}+o(x)} - 1\big) = e\left(-\frac{x}{2} + o(x)\right) = -\frac{e}{2}\,x + o(x).
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda il secondo fattore del primo limite si ha:

$$\begin{aligned}
\log\big(\cos(x^{1/4})\big) &= \log\big(1 + (\cos(x^{1/4}) - 1)\big) = \\
&= \cos(x^{1/4}) - 1 + o(\cos(x^{1/4}) - 1) = -\frac{1}{2}\sqrt{x} + o(\sqrt{x})
\end{aligned}$$

Il denominatore è semplicemente

$$\sqrt{1 + x^{3/2}} = 1 + \frac{1}{2}x^{3/2} + o(x^{3/2}).$$

Per cui

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} \frac{\big((1+x)^{\frac{1}{x}} - e\big)\,\log\big(\cos(x^{1/4})\big)}{\sqrt{1+x^{3/2}} - 1} = \\
&\qquad = \lim_{x\to 0^+} \frac{\big(-\frac{e}{2}\,x + o(x)\big)\big(-\sqrt{x}/2 + o(\sqrt{x})\big)}{\frac{1}{2}x^{3/2} + o(x^{3/2})} = \\
&\qquad = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e}{4}\,x^{3/2} + o(x^{3/2})}{\frac{1}{2}x^{3/2} + o(x^{3/2})} = \frac{e}{2}\,.
\end{aligned}$$