CdL Ingegneria Meccanica

Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 20 gennaio 2025

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte. Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione. Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Si calcolino i seguenti integrali indefiniti

$$\int \frac{t-1}{t^3-2t^2+3t}\,dt\,, \qquad \int \frac{t^3-2t^2+4t-1}{t^3-2t^2+3t}\,dt\,.$$

2. Si studi <u>in dettaglio</u> la funzione g data dall'espressione

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x<0 \\ f(x)+\sqrt{2}\,\pi & x>0\,. \end{cases}$$

dove

$$f(x) = 1-\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x} - \sqrt{1+x^2}\,.$$

Dopodiché si dica, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, quante soluzioni hanno le equazioni

$$g(x)=\lambda\,, \qquad f(x)=\lambda.$$

Infine si estenda f in 0 definendola $f(0) := \lim_{x\to 0^-} f(x)$ e, senza fare alcun calcolo, si disegni approssimativamente il grafico di

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$$

basandosi esclusivamente sul grafico di f e sulle informazioni ottenute precedentemente.

3. Si studino i seguenti integrali impropri al variare di $\alpha > 0$:

$$\int_0^{\pi/2} \left(\frac{\log(1+\sqrt{x})}{\mathrm{sen}\,x}\right)^{\alpha} dx\,, \qquad \int_0^{\pi} \left(\frac{\log(1+\sqrt{x})}{\mathrm{sen}\,x}\right)^{\alpha} dx\,.$$

Soluzioni

1. Poiché il numeratore non ha grado inferiore al grado del denominatore dobbiamo dividere i due polinomi tra loro. In questo caso possiamo scrivere

$$t^3 - 2t^2 + 4t - 1 = t^3 - 2t^2 + 3t + t - 1$$

da cui

$$\frac{t^3 - 2t^2 + 4t - 1}{t^3 - 2t^2 + 3t} = 1 + \frac{t-1}{t^3 - 2t^2 + 3t}$$

Integriamo il secondo addendo. Cerchiamo A, B, C in modo tale che

$$\frac{t-1}{t^3 - 2t^2 + 3t} = \frac{t-1}{t(t^2 - 2t + 3)} = \frac{At + B}{t^2 - 2t + 3} + \frac{C}{t}\,.$$

Poiché

$$\frac{At + B}{t^2 - 2t + 3} + \frac{C}{t} = \frac{Ct^2 - 2Ct + 3C + At^2 + Bt}{t(t^2 - 2t + 3)}$$

si ottiene il sistema

$$\begin{cases} A = -C \\ B - 2C = 1 \\ 3C = -1 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} A = 1/3 \\ B = 1/3 \\ C = -1/3 \end{cases}$$

da cui

$$\int \frac{t^3 - 2t^2 + 4t - 1}{t^3 - 2t^2 + 3t}\,dt = \int dt - \frac{1}{3}\int \frac{1}{t}\,dt + \frac{1}{3}\int \frac{t+1}{t^2 - 2t + 3}\,dt\,. \tag{1}$$

Si ha facilmente che

$$\int dt - \frac{1}{3}\int \frac{1}{t}\,dt = t - \frac{1}{3}\log|t| + c_1\,, \qquad c_1 \in \mathbf{R}\,.$$

Concentriamo la nostra attenzione ora sull'ultimo integrale del termine di destra di (1):

$$\int \frac{t+1}{t^2 - 2t + 3}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t - 2 + 4}{t^2 - 2t + 3}\,dt = \frac{1}{2}\left[\int \frac{2t-2}{t^2 - 2t + 3}\,dt + 2\int \frac{1}{t^2 - 2t + 3}\,dt\right]\,.$$

Il primo dei due addendi si integra immediatamente, e si ha

$$\frac{1}{2}\int \frac{2t-2}{t^2 - 2t + 3}\,dt = \frac{1}{2}\log(t^2 - 2t + 3) + c_2\,, \qquad c_2 \in \mathbf{R}\,.$$

Per l'ultimo invece:

$$t^2 - 2t + 3 = t^2 - 2t + 1 + 2 = (t-1)^2 + 2 = 2\left[\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1\right]$$

e, ponendo
$$y = \frac{t-1}{\sqrt{2}},$$
si ottiene che l'integrale $\int \frac{1}{t^2-2t+3}\,dt$ è trasformato in
$$\frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{2}}{y^2+1}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg} y + c_3\,, \qquad c_3 \in \mathbf{R}\,.$$
Infine si ha quindi che l'insieme delle primitive è dato da
$$\begin{aligned}\int \frac{t^3-2t^2+4t-1}{t^3-2t^2+3t}\,dt &= \\ &= t - \frac{1}{3}\,\log|t| + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\log(t^2-2t+3) + \frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right] + c = \\ &= t - \frac{1}{3}\,\log|t| + \frac{1}{6}\,\log(t^2-2t+3) + \frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\frac{t-1}{\sqrt{2}} + c\,, \qquad c \in \mathbf{R}\,.\end{aligned}$$

2. Studiamo dapprima f.
Innanzitutto si osservi che l'espressione data è definita per ogni valore di $x \neq 0$, per cui il dominio è $\mathbf{R}\setminus\{0\}$.
I limiti agli estremi del dominio sono
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty\,,$$
$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,, \qquad \lim_{x\to0^+} f(x) = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.$$
La funzione ammette anche due asintoti all'infinito. Infatti
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = -1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty}\big(f(x)+x\big) = 1$$
e
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-x\big) = 1\,.$$
Calcoliamo ora le derivate. Si ha
$$f'(x) = -\sqrt{2}\,\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{2}-x\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\,.$$
Innanzitutto
$$\operatorname{dom}(f') = \mathbf{R}\setminus\{0\}\,.$$
Vediamo dove si annulla f': essendo $\sqrt{2}$ positivo si ha
$$f'(x) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \sqrt{2} = x\sqrt{1+x^2} \quad\Longleftrightarrow\quad 2 = x^2\,(1+x^2)\,,\ x>0\,.$$

Risolvendo, l'unica radice ammissibile è $x = 1$. Studiando il segno di f' a questo punto si ottiene che

$$f'(x) \begin{cases} = 0 & \text{per } x = 1 \\ > 0 & \text{per } x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \\ < 0 & \text{per } \cup (1, +\infty). \end{cases}$$

Studiamo i limiti di f' in 0. Si ha:

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \sqrt{2}\,. \tag{2}$$

il punto $x = 1$ risulta di massimo locale. Valutando $f(1)$ si ottiene

$$f(1) = 1 - \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\,1 - \sqrt{2} = 1 - \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4} + 1\right) < 0\,,$$

per cui $x = 1$ risulta di massimo locale (non può essere il massimo di f dal momento che il limite in 0, da sinistra, è positivo) .
Veniamo alla derivata seconda. Si ha:

$$f''(x) = \frac{1}{(1 + x^2)^2}\left[\left(-\sqrt{1 + x^2} - \frac{2\,x^2}{2\sqrt{1 + x^2}}\right)(1 + x^2) - 2\,x\big(\sqrt{2} - x\sqrt{1 + x^2}\big)\right] =$$

$$= \ldots = -\frac{\sqrt{1 + x^2} + 2\sqrt{2}\,x}{(1 + x^2)^2}$$

quindi si ha

$$\mathrm{dom}\,(f'') = \mathbf{R} \setminus \{0\}\,.$$

Si osservi che

$$\lim_{x \to 0^-} f''(x) = \lim_{x \to 0^+} f''(x) = -1\,. \tag{3}$$

Studiamone il segno. Si ha

$$f''(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{1 + x^2} < -2\sqrt{2}\,x\,.$$

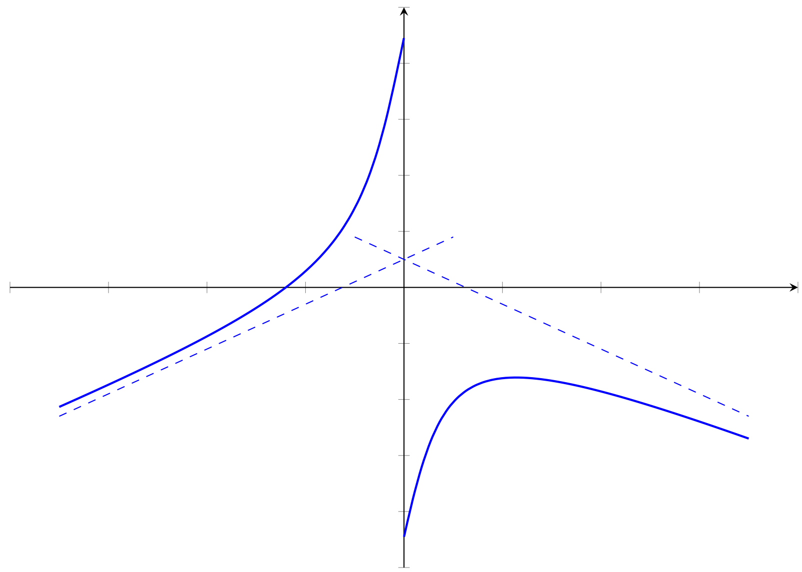
Per $x \in (0, +\infty)$ quest'ultima disuguglianza non è verificata, mentre per $x < 0$:

$$1 + x^2 < 8\,x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 > \frac{1}{7} \quad \Longleftrightarrow \quad x < -\frac{1}{\sqrt{7}}\,.$$

Per cui risulta

$$f''(x) \begin{cases} = 0 & \text{per } x = -\frac{1}{\sqrt{7}} \\ > 0 & \text{per } x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{7}}\right) \\ < 0 & \text{per } x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{7}}, 0\right) \cup (0, +\infty). \end{cases}$$

Il grafico è evidenziato in figura, anche se il cambio di concavità è minimo e non è evidente.



L'equazione $f(x) = \lambda$:

$$
\begin{aligned}
&\text{non ha soluzione per } \lambda \geqslant \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,,\\
&\text{ha una (sola) soluzione per } f(1) < \lambda < \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,,\\
&\text{ha due (sole) soluzioni per } \lambda = f(1) \text{ o } \lambda \leqslant -\frac{\pi}{\sqrt{2}}\,,\\
&\text{ha tre (sole) soluzioni per } -\frac{\pi}{\sqrt{2}} < \lambda < f(1)\,.
\end{aligned}
$$

Infine veniamo alla funzione g, il cui grafico è riportato più in basso.
La funzione g, definita in $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, può essere estesa per continuità anche in 0.
La funzione così definita risulta non solo continua, ma grazie a (2) derivabile con derivata prima continua in 0.
Grazie a (3) risulta anche derivabile due volte con derivata seconda continua in 0.
Quindi si ha, perlomeno,

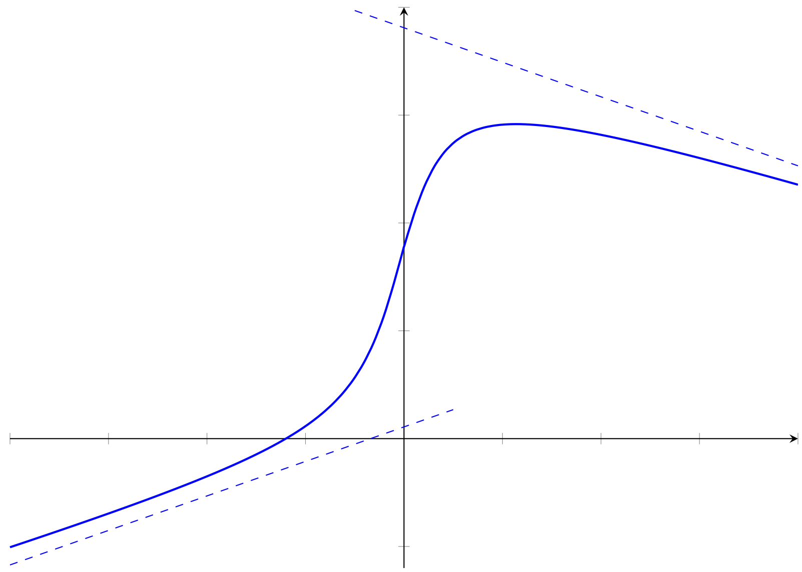
$$g \in C^2(\mathbf{R})\,.$$

Ha un punto di massimo assoluto in $x = 1$, e il suo valore è

$$g(1) = f(1) + \sqrt{2}\,\pi = 1 - \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4} + 1\right) + \sqrt{2}\,\pi = 1 + \sqrt{2}\left(\frac{3}{4}\,\pi - 1\right),$$

e non ha minimo. Ha due asintoti,

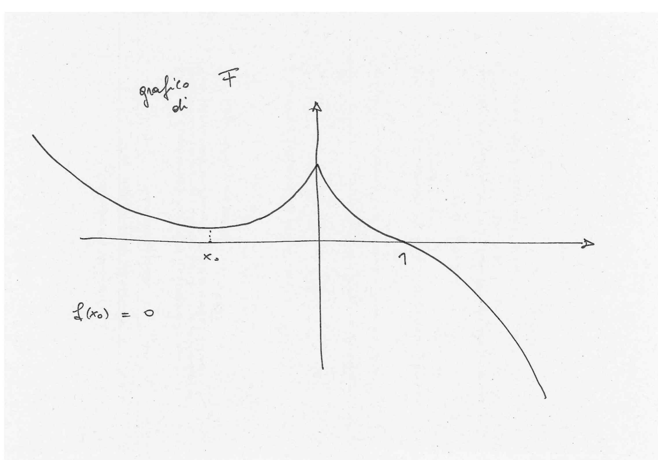
$$x + 1 \quad \text{a } -\infty \qquad \text{e} \qquad -x + 1 + \sqrt{2}\,\pi \quad \text{a } +\infty\,.$$



L'equazione $g(x) = \lambda$:

$$\begin{aligned}&\text{non ha soluzione per } \lambda > g(1)\,,\\ &\text{ha una (sola) soluzione per } \lambda = g(1)\,,\\ &\text{ha due (sole) soluzioni per } \lambda < g(1)\,.\end{aligned}$$

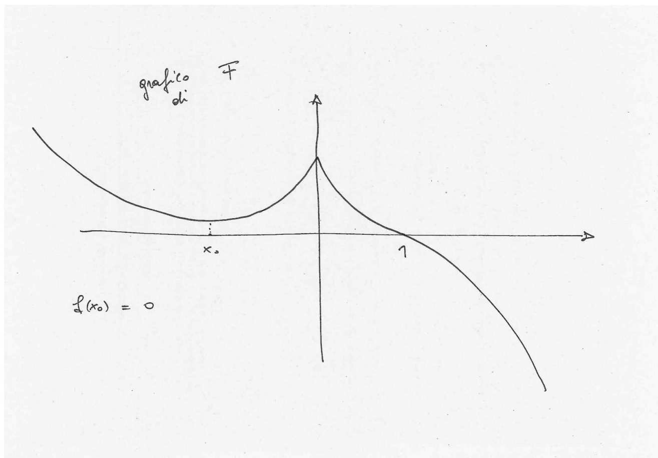
Infine riportiamo il (un possibile) grafico fi F.



Si osservi come:

$F(1) = 0$,
in 1 ci sia un cambio di concavità,
F sia derivabile tranne nel punto $x = 0$ dove F, continua, presenta uno spigolo.

Si osservino inoltre gli intervalli di monotonia e di concavità o convessità di F (ricavabile dal segno e dagli intervalli di monotonià di f).
L'unica cosa sulla quale non possiamo essere più precisi è il punto di minimo locale x_o, non possiamo conoscerne il valore senza un calcolo preciso, e quindi nemmeno sapere se è positivo, negativo, nullo.



3. Il secondo integrale va risolto dividendo in due parti l'intervallo poiché il denominatore si annulla sia in 0 che in π, ma il numeratore non ha un comportamento altrettanto simmetrico. Innanzitutto si osservi che la quantità in gioco è sempre positiva, per cui l'integrale sarà finito o infinito, ma non indeterminato.
Dividiamo per semplicità l'integrale nel modo seguente

$$\int_0^\pi \left(\frac{\log(1+\sqrt{x})}{\operatorname{sen} x}\right)^\alpha dx = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\log(1+\sqrt{x})}{\operatorname{sen} x}\right)^\alpha dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\frac{\log(1+\sqrt{x})}{\operatorname{sen} x}\right)^\alpha dx$$

cosicché studiamo entrambi gli integrali facendo due studi separati.
Per il primo dei due bisogna fare i due seguenti sviluppi di Taylor:

$$\log(1+\sqrt{x}) = \sqrt{x} + o(\sqrt{x}) = \sqrt{x}\left(1 + \frac{o(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)$$
$$\operatorname{sen} x = x + o(x) = x\left(1 + \frac{o(x)}{x}\right)$$

da cui

$$\left(\frac{\log(1+\sqrt{x})}{\operatorname{sen} x}\right)^\alpha = \frac{1}{x^{\alpha/2}}\left(\frac{1+\frac{o(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}}{1+\frac{o(x)}{x}}\right)^\alpha$$

che, poiché

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1+\frac{o(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}}{1+\frac{o(x)}{x}}\right)^\alpha = 1,$$

è chiaramente confrontabile con $1/x^{\alpha/2}$, per cui il primo dei due integrali è finito per $\alpha < 2$.

Per quanto riguarda il secondo la cosa è più semplice in quanto il numeratore è una quantità compresa fra i due numeri positivi $(\log(1+\sqrt{\pi/2}))^\alpha$ e $(\log(1+\sqrt{\pi}))^\alpha$ e quindi è sufficiente analizzare il denominatore. Lo sviluppo di $x \mapsto \operatorname{sen} x$ nel punto π è

$$\operatorname{sen} x = -(x-\pi) + o(|x-\pi|) = -(x-\pi)\left(1 + \frac{o(|x-\pi|)}{(\pi - x)}\right).$$

Si osservi che la quantità $-(x-\pi)$ è positiva per $x \in (\pi/2, \pi)$, per cui ha senso elevarla ad α reale.

In conclusione la funzione integranda è confrontabile con $1/(-(x-\pi))^\alpha$ in quanto

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\left(\frac{\log(1+\sqrt{x})}{\operatorname{sen} x}\right)^\alpha}{\frac{1}{(-(x-\pi))^\alpha}} = \lim_{x\to\pi^-} \frac{\left(\frac{\log(1+\sqrt{x})}{\operatorname{sen} x}\right)^\alpha}{\frac{1}{(\pi-x))^\alpha}} = \big(\log(1+\sqrt{\pi})\big)^\alpha$$

e quindi integrabile in senso generalizzato per $\alpha < 1$, che è anche la limitazione su α affinché tutto l'integrale risulti finito.