CdL Ingegneria Meccanica

Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 5 febbraio 2025

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Si studi la convergenza delle serie

$$\sum_n \frac{\operatorname{sen} n \, \log n}{2025 + n^2}\,, \qquad\qquad \sum_n \left(\sqrt[3]{8n^3 + 3n} - 2n\right)^{\alpha}, \quad \alpha > 0\,.$$

2. Dopo aver trovato il dominio (massimale) della funzione f si dica quante soluzioni ha l'equazione

$$f(x) = \frac{\log^4 x}{x^2} - \alpha = 0 \qquad \text{al variare di } \alpha \in \mathbf{R}.$$

3. Si scrivano gli sviluppi di Taylor in $x = 0$ di ordine 3 e di ordine 4 della funzione f e si dica se la funzione g è infinitesima in 0 ed eventualmente si dica qual è il suo ordine di infinitesimo in 0 al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, dove

$$f(x) = e^{x+x^2}; \qquad\qquad g(x) = e^{-x+\frac{\alpha}{2}x^2+\frac{x^3}{6}} + \alpha^2 x - 1\,, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

4. Si trovino tutte le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} &u'' - 5u' + 6u = 0,\\ &u'' - 5u' + 6u = \operatorname{sen} x,\\ &u'' - 5u' + 6u = \operatorname{sen} x + e^{3x}. \end{aligned}$$

Soluzioni

1. Vediamo la prima. Si verifica che converge assolutamente, infatti:

$$\left|\frac{\operatorname{sen} n \, \log n}{2025+n^2}\right| \leqslant \frac{\log n}{2025+n^2} \leqslant \frac{\log n}{n^2}$$

e il termine a destra può essere confrontato con $1/n^p$ con p arbitrario tra 1 e 2. Infatti si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\log n}{n^2}}{\frac{1}{n^p}} = 0$$

per cui, poiché la serie $\sum_n \frac{1}{n^p}$ converge, converge (usando il confronto asintotico) anche la serie $\sum_n \frac{\log n}{n^2}$, per cui la serie data converge assolutamente e infine, usando il criterio della convergenza assoluta, anche semplicemente.

Un altro modo è usare il criterio di condensazione di Cauchy: la funzione

$$f(x) = \frac{\log x}{x^2}$$

è definitivamente decrescente. Infatti la sua derivata

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2)^2}\left[\frac{1}{x}\,x^2 - 2x\log x\right] = \frac{1}{x^4}\left[x\big(1-2\log x\big)\right] = \frac{1-2\log x}{x^3}$$

è continua e inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = -\infty\,.$$

A questo punto si può concludere che la serie

$$\sum_n \frac{\log n}{n^2}$$

ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_n 2^n\,\frac{n\log 2}{4^n}\,.$$

A questo punto usando il criterio asintotico della radice n-esima, poiché

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n\,\frac{n\log 2}{4^n}} = \frac{1}{2}\,,$$

si conclude.

La seconda si può studiare usando gli sviluppi di Taylor:

$$\begin{aligned}\Big(\sqrt[3]{8n^3+3n} - 2n\Big)^\alpha &= (2n)^\alpha\Big(\sqrt[3]{1+\frac{3}{8}\,\frac{1}{n^2}} - 1\Big)^\alpha = \\ &= (2n)^\alpha\left(1+\frac{1}{3}\,\frac{3}{8}\,\frac{1}{n^2} - 1 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^\alpha = (2n)^\alpha\left(\frac{1}{8\,n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^\alpha.\end{aligned}$$

Poiché

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)^\alpha \left(\frac{1}{8\,n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^\alpha}{\frac{1}{n^\alpha}} = \frac{1}{4^\alpha}$$

si deduce che la quantità in esame è asintotica a $1/n^\alpha$, e quindi la serie data converge per $\alpha > 1$ e diverge positivamente per $\alpha \leqslant 1$.

2. La funzione f risulta definita per $x \in (0, +\infty) =: D$, e solo per $x \in D$, per cui D è anche il suo dominio massimale.
Per semplicità chiamiamo g la funzione $f + \alpha$, cioè

$$g(x) = \frac{\log^4 x}{x^2}\,.$$

Si ha che

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0\,.$$

Derivando g si ha

$$g'(x) = \frac{1}{x^4}\Big[4\,x\,\log^3 x - 2\,x\,\log^4 x\Big] = 2\,\frac{\log^3 x}{x^3}\Big[2 - \log x\Big]\,.$$

Allora la derivata di g si annulla se

$$\log x = 0 \qquad \text{oppure se} \qquad \log x = 2\,,$$

cioè per

$$x = 1 \qquad \text{o} \qquad x = e^2\,.$$

Si ha che

$$g(1) = 0 \qquad \text{e} \qquad g(e^2) = \frac{2^4}{e^4} = \left(\frac{2}{e}\right)^4\,.$$

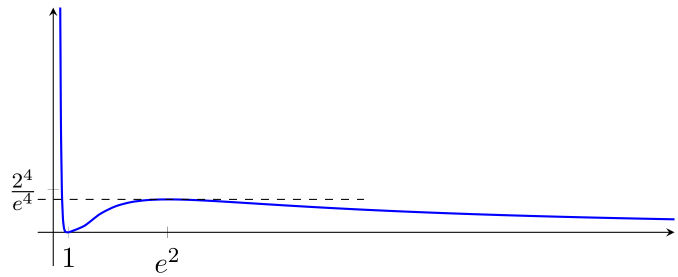
Quindi si ha

$$\begin{array}{lll} g'(x) < 0 & \text{per} & x \in (0,1) \cup (e^2, +\infty) \\ g'(x) = 0 & \text{per} & x = 1 \text{ o } x = e^2 \\ g'(x) > 0 & \text{per} & x \in (1, e^2) \end{array}$$

e, ricordiamo,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0\,.$$

Nel punto di massimo locale e^2 la funzione g assume il valore $\frac{4}{e^2}$. Volendo tracciare un grafico di g, si ha



In conclusione si ha che $g = \alpha$

$$\begin{aligned}
\text{non ha soluzioni per} \qquad & \alpha < 0 \\
\text{ha una sola soluzione } (x = 1) \text{ per} \qquad & \alpha = 0 \quad \text{e} \quad \alpha > \frac{2^4}{e^4} \\
\text{ha tre soluzioni per} \qquad & \alpha \in \left(0, \frac{2^4}{e^4}\right) \\
\text{ha due soluzioni per} \qquad & \alpha = \frac{2^4}{e^4}.
\end{aligned}$$

3. Sviluppiamo la funzione $g(t) = e^t$ in 0 fino al terzo ordine

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}\,t^2 + \frac{1}{6}\,t^3 + o(t^3).$$

Valutando poi g in $x + x^2$ si ottiene, per quanto riguarda il terzo ordine,

$$\begin{aligned}
e^{x+x^2} &= 1 + x + x^2 + \frac{1}{2}\,(x + x^2)^2 + \frac{1}{6}\,(x + x^2)^3 + o\big((x + x^2)^3\big) = \\
&= 1 + x + x^2 + \frac{1}{2}\,(x^2 + 2x^3) + \frac{1}{6}\,x^3 + o(x^3) = \\
&= 1 + x + \frac{3}{2}\,x^2 + \frac{7}{6}\,x^3 + o(x^3)\,.
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda il quart'ordine invece:

$$\begin{aligned}
e^{x+x^2} &= 1 + x + x^2 + \frac{1}{2}\,(x + x^2)^2 + \frac{1}{6}\,(x + x^2)^3 + \frac{1}{24}\,(x + x^2)^4 + o\big((x + x^2)^4\big) = \\
&= 1 + x + x^2 + \frac{1}{2}\,\big(x^2 + 2x^3 + x^4\big) + \frac{1}{6}\,(x^3 + 3x^4) + \frac{1}{24}\,x^4 + o(x^4) = \\
&= 1 + x + \frac{3}{2}\,x^2 + \frac{7}{6}\,x^3 + \frac{25}{24}\,x^4 + o(x^4)\,.
\end{aligned}$$

Venendo a g, sviluppando al terz'ordine in 0 si ha:

$$
\begin{aligned}
g(x) &= e^{-x+\frac{\alpha}{2}x^2+\frac{x^3}{6}} + \alpha^2 x - 1 = \\
&= 1 - x + \frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}\left(-x + \frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(-x + \frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{x^3}{6}\right)^3 + \\
&\qquad + o\left(-x + \frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{x^3}{6}\right) + \alpha^2 x - 1 = \\
&= 1 - x + \frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}\left(x^2 - \alpha\, x^3\right) - \frac{1}{6}\,x^3 + o(x^3) + \alpha^2 x - 1 = \\
&= (\alpha^2 - 1)x + \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\right)x^2 - \frac{\alpha}{2}\,x^3 + o(x^3)
\end{aligned}
$$

quindi la funzione g è infinitesima in 0, il suo sviluppo in 0 è

$$
g(x) = \begin{cases} (\alpha^2 - 1)x + o(x) & \text{se } \alpha^2 \neq 1\,, \\ x^2 + o(x^2) & \text{se } \alpha = 1\,, \\ \dfrac{1}{2}\,x^3 + o(x^3) & \text{se } \alpha = -1\,, \end{cases}
$$

e quindi l'ordine di infinitesimo è

$$
1 \quad \text{per } \alpha^2 \neq 1\,, \qquad 2 \quad \text{per } \alpha = 1\,, \qquad 3 \quad \text{per } \alpha = -1\,.
$$

4. Il polinomio caratteristico associato all'equazione differenziale è

$$
D^2 - 5D + 6 = 0
$$

che ha come soluzioni 3 e 2. Le soluzioni sono quindi date da

$$
c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}\,.
$$

Per quanto riguarda la seconda basta cercare tra le soluzioni del tipo

$$
v(x) = a \operatorname{sen} x + b \cos x.
$$

Calcolando le espressioni di v' e v'' e inserendole nell'equazione si ottengono i valori per a e b:

$$
a = b = \frac{1}{10}.
$$

Infine, poiché il dato e^{3x} nella terza equazione è anche soluzione dell'omogenea cerchiamo una soluzione del tipo

$$
w(x) = c\, x\, e^{3x}.
$$

Calcolando le espressioni di w' e w'' e inserendole nell'equazione si ottiene che $c = 1$. Quindi infine le soluzioni dell'ultima equazione sono date da

$$
u(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{10} \operatorname{sen} x + \frac{1}{10} \cos x + x\, e^{3x}\,, \qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}\,.
$$