

CdL Ingegneria Meccanica

Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 2 luglio 2025

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. *i*) Si scriva lo sviluppo di Taylor al quinto ordine in 0 della funzione

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^{x^2} + e^{-x^2}) - \left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right)^2;$$

- ii*) è possibile stabilire dallo sviluppo trovato precedentemente se $x = 0$ è un punto stazionario per f ?

Se sì, si può anche dire quale sia la sua natura? Se no, perché?

2. Si calcoli il valore del seguente integrale definito

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (t^2 - t + 1) \operatorname{sen}(t + |t|) dt.$$

3. Si studi la serie

$$\sum \left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]$$

4. Dato il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'' + 6u' + 9u = 0 \\ u'(0) = \alpha \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

- i*) si trovi la soluzione;

- ii*) si dica se la soluzione ammette massimo e/o minimo nel suo dominio al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$ e si dica se esiste (ed eventualmente lo si trovi) un valore del parametro α per cui la corrispondente soluzione del problema di Cauchy assume valore massimo uguale a 4.

Soluzioni

1. Premessa: si ha che $\cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$ per cui

$$\begin{aligned}\cosh t &= \frac{1}{2} \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + o(t^n) + \right. \\ &\quad \left. + 1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{t^n}{n!} + o(t^n) \right) = \\ &= \begin{cases} 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + o(t^n) & \text{se } n \text{ è pari} \\ 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + o(t^n) & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}\end{aligned}$$

i) Dallo sviluppo appena calcolato si ha allora che:

$$\begin{aligned}\cosh x^2 &= 1 + \frac{x^4}{2} + o(x^5), \\ (\cosh x)^2 &= \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) \right)^2 = \\ &= \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) \right) + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + o(x^5) \right) + \left(\frac{x^4}{4!} + o(x^5) \right) = \\ &= 1 + x^2 + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\end{aligned}$$

da cui

$$\cosh x^2 - (\cosh x)^2 = -x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^5).$$

ii) Guardando tale sviluppo si deduce che il punto $x = 0$ è un punto stazionario ed inoltre è punto di massimo locale poiché $f'(0) = 0$ e $f''(0) = -2 < 0$.

2. Il primo integrale si riduce a

$$\int_0^{\pi/2} (t^2 - t + 1) \sin 2t \, dt.$$

Integrando per parti (due volte) si ha

$$\int_0^{\pi/2} (t^2 - t + 1) \sin 2t \, dt = (t^2 - t + 1) \left(-\frac{1}{2} \cos 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (2t - 1) \cos 2t \, dt$$

dopodiché

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} (2t-1) \cos 2t \, dt &= (2t-1) \left(\frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2 \frac{1}{2} \sin 2t \, dt = \\ &= (2t-1) \left(\frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \cos 2t \Big|_0^{\pi/2}.\end{aligned}$$

Tirando le somme si ottiene il valore:

$$\begin{aligned}&\left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - \frac{\pi}{2} + 1 \right) \left(-\frac{1}{2} (-1) \right) - \left(-\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \cos \pi - \frac{1}{2} \cos 0 \right] = \\ &= \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right] = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

3. Scrivendo

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e^{\log(1+\frac{1}{n})^n} = e^{n \log(1+\frac{1}{n})}$$

e sviluppando in 0 la funzione $t \mapsto \log(1+t)$ si ottiene

$$n \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) = n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) = 1 - \frac{1}{2n} + o \left(\frac{1}{n} \right),$$

da cui, sviluppando anche l'esponenziale,

$$\begin{aligned}e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n &= e \left[1 - e^{n \log(1+\frac{1}{n})-1} \right] = e \left[1 - e^{1-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})-1} \right] = \\ &= e \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right) \right] = \frac{e}{2n} + o \left(\frac{1}{n} \right).\end{aligned}$$

Per confronto con la serie armonica la serie di partenza diverge.

4. Il polinomio caratteristico associato all'equazione differenziale è

$$D^2 + 6D + 9 = 0$$

che ha come soluzione 3 con molteplicità due. Una generica soluzione dell'omogenea è quindi data da

$$u(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}.$$

Imponiamo i dati iniziali: poiché

$$u'(x) = -3c_1 e^{-3x} - 3c_2 x e^{-3x} + c_2 e^{-3x}$$

dobbiamo imporre

$$u'(0) = -3c_1 + c_2 = \alpha, \quad u(0) = c_1 = 0,$$

da cui la soluzione del problema di Cauchy è

$$u(x) = \alpha x e^{-3x}.$$

Chiaramente la funzione non ammette minimo per $\alpha > 0$, visto che in questo caso $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha x e^{-3x} = -\infty$, ma ammette massimo per il seguente motivo:

è positiva per $x \in (0, +\infty)$, vale 0 in 0 e ha limite 0 a $+\infty$.

Viceversa, la funzione non ammette massimo per $\alpha < 0$, visto che in questo caso $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha x e^{-3x} = +\infty$, ma ammette minimo. Per $\alpha = 0$ la funzione è costante e ammette sia minimo che massimo in ogni punto.

Supposto ora che $\alpha > 0$ cerchiamo il valore massimo e imponiamo che sia 4. Imponendo la derivata nulla si ha

$$u'(x) = -3\alpha x e^{-3x} + \alpha e^{-3x} = 0 \implies -3x + 1 = 0 \implies x = \frac{1}{3}.$$

Valutando la u in $1/3$ e imponendo che in tal punto la funzione assuma il valore 4 si ottiene

$$u(1/3) = \frac{\alpha}{3} e^{-1} = 4 \implies \alpha = 12 e.$$