

CdL Ingegneria Meccanica

Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 15 settembre 2025

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Data la funzione $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$ si dica se f è prolungabile per continuità in 0, definendo una nuova funzione, ancora denominata f , con dominio $\mathbf{R}$. Nel caso lo sia, si dica se tale estensione è derivabile, di classe C^1 , derivabile due volte, di classe C^2 in $\mathbf{R}$.

2. Si studi la convergenza della seguente serie:

$$\sum_n (\operatorname{arctg} n - \operatorname{sen} n) \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{n} - \operatorname{sen} \frac{1}{n} \right).$$

3. Si calcoli l'area della figura compresa tra il grafico della funzione $f(x) = \arcsen x$, la retta tangente al grafico di f nel punto $(0, 0)$ e le due rette $x = 0$ e $x = 1$.

4. Si trovino tutte le soluzioni delle equazioni differenziali

$$y'' - 3y' + 2y = 0,$$

$$y'' - 3y' + 2y = x,$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x,$$

$$y'' - 3y' + 2y = x + e^x.$$

Soluzioni

1. Chiaramente la funzione può essere estesa a 0 visto che esiste finito il limite (in particolare, è uguale a 1)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x).$$

Inoltre, poiché esiste finito anche il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

ed è uguale al precedente tale estensione, ponendo $f(0) := 1$, risulta continua in $\mathbf{R}$ (visto che per $x \neq 0$ lo è).

Per $x \neq 0$ la funzione è derivabile, infinite volte. Di conseguenza il problema è verificare la derivabilità solamente nel punto 0.

Per farlo abbiamo tre opzioni, la terza più rapida, la prima che richiede più calcoli delle altre:

- la prima è calcolare il limite del rapporto incrementale in 0, e se questo esiste finito va poi verificata la continuità di f' (idem con f'');
- la seconda è sfruttare un corollario della regola di de l'Hôpital, calcolando i limiti (destro e sinistro) di f' in 0. Se tali limiti esistono finiti deduciamo direttamente che f è derivabile e la sua derivata continua (analogo procedimento per la derivata seconda);
- la terza: scrivere lo sviluppo di Taylor della funzione f intorno a 0 (dando per scontato che $f \in C^2(\mathbf{R} \setminus \{0\})$).

2) Vediamole tutte e tre, cominciando dalla seconda opzione e calcoliamo la derivata prima per $x \neq 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{x}{1+x^2} - \arctg x \right). \quad (1)$$

Per vedere se è derivabile calcoliamo ora $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$. Poiché

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} \left(\frac{x}{1+x^2} - \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} \left(\frac{-\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}{1+x^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

e, analogamente, si calcola il limite per x che tenda a 0 da destra.

Quindi, per il corollario della regola di de l'Hôpital menzionato sopra, f è derivabile in 0 e $f'(0) = 0$ e, dai limiti appena calcolati, la derivata prima risulta continua.

Essendo poi f di classe C^1 in $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, si conclude che $f \in C^1(\mathbf{R})$.

Passiamo alla derivata seconda procedendo come fatto prima per la derivata prima: per $x \neq 0$ si ha

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} \left(2 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} - \frac{2 + 4x^2}{(1 + x^2)^2} \right).$$

Sviluppando nuovamente l'arcotangente si ha

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{x^2} \left(2 \frac{x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x} - \frac{2 + 4x^2}{(1 + x^2)^2} \right) = \frac{1}{x^2} \left(2 - \frac{2}{3} x^2 + o(x^2) - \frac{2 + 4x^2}{(1 + x^2)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{x^2(1 + x^2)^2} \left(\left(2 - \frac{2}{3} x^2 \right) (1 + x^2)^2 - 2 - 4x^2 + o(x^2) \right) = \\ &= \frac{1}{x^2(1 + x^2)^2} \left(2 - \frac{2}{3} x^2 + 2x^2 \left(2 - \frac{2}{3} x^2 \right) + x^4 \left(2 - \frac{2}{3} x^2 \right) - 2 - 4x^2 + o(x^2) \right) = \\ &= \frac{1}{x^2(1 + x^2)^2} \left(-\frac{2}{3} x^2 + o(x^2) \right). \end{aligned}$$

Passando al limite si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f''(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f''(x) = -\frac{2}{3}.$$

Analogamente a prima, la funzione risulta derivabile due volte con derivata continua in $\mathbf{R}$, quindi $f \in C^2(\mathbf{R})$, e $f''(0) = -\frac{2}{3}$.

1) Volendo procedere con il primo metodo, dobbiamo vedere se f è derivabile calcolando (se possibile) direttamente la derivata prima. Usando gli sviluppi scritti sopra si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{3} + o(x^2)}{x} = 0 = f'(0).$$

Questo ci dice solamente che f è derivabile in 0. Per vedere che f' è continua va comunque verificato se vale (fatto sopra)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0) = 0.$$

Volendo calcolare direttamente la derivata seconda si calcola, usando (1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^2} \left(\frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x \right)}{x}.$$

Sviluppando si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{x^2} \left(\frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x \right)}{x} &= \frac{1}{x^3} \left(\frac{x}{1+x^2} - x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) = \\ &= \frac{1}{x^3} \frac{1}{1+x^2} \left(x - x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - x^3 \right) = \\ &= \frac{1}{x^3} \frac{1}{1+x^2} \left(-\frac{2}{3} x^3 + o(x^3) \right) = \frac{1}{1+x^2} \left(-\frac{2}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right) \end{aligned}$$

e passando al limite si ritrova il risultato ottenuto precedentemente. Nuovamente va effettuata la verifica

$$\lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = f''(0)$$

per dedurre la continuità di f'' in 0.

3) Terza possibilità: dallo sviluppo (si osservi il grado dell'o piccolo)

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

si ha che, per $x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4) \right) = 1 - \frac{x^2}{3} + o(x^3).$$

Per cui questo sviluppo, che è quello al terzo ordine, è estendibile anche per $x = 0$ e coincide con lo sviluppo di f che, essendo lo sviluppo al terzo ordine, risulta sicuramente di classe $C^2(\mathbf{R})$. Siccome (a questo punto per $x \in \mathbf{R}$ e intorno a 0, visto che l'arcotangente è stata sviluppata attorno a 0)

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{3} + o(x^3).$$

A questo punto osserviamo un fatto generale: se una funzione g è derivabile in un punto, in tale punto g è anche continua. Da questo discende il fatto che se una funzione è derivabile due volte in un punto, la sua derivata prima è continua in tale punto, e così via per derivate di ordine più alto.

Dallo sviluppo appena scritto di f , che è al terzo ordine, deduciamo che f è derivabile (almeno) tre volte in 0, da cui f , la sua derivata prima e la sua derivata seconda esistono in 0 e sono inoltre continue!

Si conclude che $f \in C^2(\mathbf{R})$ ottenendo anche i valori

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad \frac{f''(0)}{2} = -\frac{1}{3} \implies f''(0) = -\frac{2}{3}.$$

2. Abbiamo due modi, il primo diretto, il secondo (più breve) studiando la convergenza assoluta.

Gli sviluppi di Taylor al terzo ordine di seno e arcotangente sono:

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} x &= x - \frac{x^3}{3} + o(x^3), \\ \operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \end{aligned}$$

da cui il secondo fattore del generico addendo della serie è dato da (si osservi che è definitivamente negativo)

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{n} - \operatorname{sen} \frac{1}{n} = -\frac{1}{3} \frac{1}{n^3} + \frac{1}{6} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = -\frac{1}{6} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right). \quad (2)$$

Per quanto riguarda il primo fattore del generico addendo della serie, si ha che questo non ha limite per $n \rightarrow +\infty$, però valgono due stime. La prima dall'alto è immediata:

$$\operatorname{arctg} n - \operatorname{sen} n \leq \frac{\pi}{2} + 1 \quad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}. \quad (3)$$

Per una stima dal basso bisogna fare più attenzione: fissato $\epsilon > 0$ arbitrario si ha che esiste un $\bar{n}$ tale che

$$\operatorname{arctg} n \geq \frac{\pi}{2} - \epsilon \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Di conseguenza si ha

$$\operatorname{arctg} n - \operatorname{sen} n \geq \frac{\pi}{2} - \epsilon - 1 \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Poiché $\frac{\pi}{2} - 1 > 0$ si può scegliere ϵ in modo tale da rendere la quantità $\frac{\pi}{2} - \epsilon - 1$ positiva. Prendendo, ad esempio,

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right),$$

si ottiene che, definitivamente!,

$$\operatorname{arctg} n - \operatorname{sen} n \geq \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) > 0. \quad (4)$$

Da (3) e (4) e da (2) si ha (si osservi che il termine $\operatorname{arctg} \frac{1}{n} - \operatorname{sen} \frac{1}{n}$ è, almeno definitivamente, negativo) che, definitivamente,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) \left(-\frac{1}{6} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \leq \\ & \leq (\operatorname{arctg} n - \operatorname{sen} n) \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{n} - \operatorname{sen} \frac{1}{n} \right) \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \left(-\frac{1}{6} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right). \end{aligned}$$

Entrambe le serie di termine generico il primo o il terzo membro di questa serie di disuguaglianze convergono, confrontandole con la serie $\sum_n \frac{1}{n^3}$. Per il criterio del confronto si conclude che la serie data diverge negativamente.

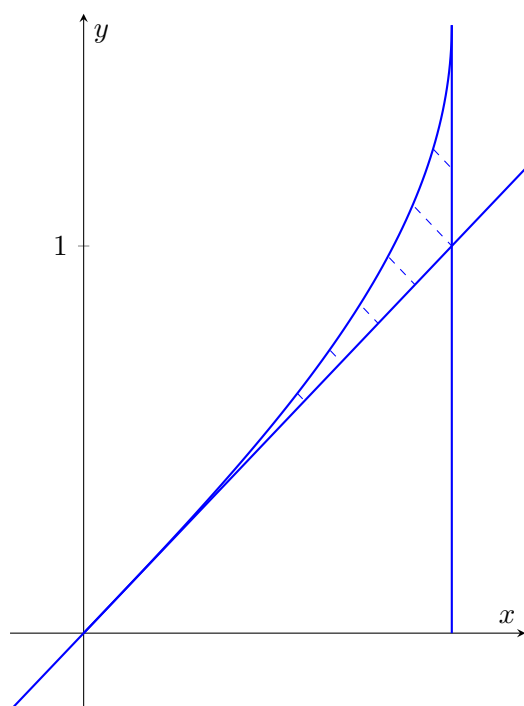
Altro modo è studiare la convergenza assoluta, che avrà come conseguenza la convergenza semplice:

$$\left| (\operatorname{arctg} n - \operatorname{sen} n) \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{n} - \operatorname{sen} \frac{1}{n} \right) \right| \leq \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) \left(\frac{1}{6} \frac{1}{n^3} + \left| o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right| \right)$$

da cui si deduce la convergenza come sopra.

3. La figura è quella tratteggiata nella figura che segue. Per calcolarne l'area è sufficiente calcolare l'area del sottografico di f tra 0 e 1 per poi sottrarre l'area del triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$. Questo perché la retta tangente alla funzione f in $(0,0)$ è la retta $r(x) = x$.

Ovviamente, essendo la funzione f crescente, la retta tangente si trova al di sotto del grafico di f .



Integrando per parti per valutare l'area del sottografico di f tra 0 e 1 si ottiene:

$$\int \arcsen x \, dx = x \arcsen x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = x \arcsen x + \sqrt{1-x^2} + c$$

da cui, valutando tra 0 e 1,

$$\int_0^1 \arcsen x \, dx = \frac{\pi}{2} - 1.$$

La retta tangente è data da

$$r(x) = f(0) + f'(0)(x-0) = x.$$

L'area del triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ è chiaramente data da $1/2$, per cui l'area della figura è

$$\frac{\pi}{2} - 1 - \frac{1}{2} = \frac{\pi - 3}{2}.$$

4. Risolviamo prima l'omogenea:

$$y'' - 3y' + 2y = (D^2 - 3D + 2)y = 0$$

e le soluzioni del polinomio caratteristico sono 1 e 2, per cui le soluzioni dell'equazione omogenea sono

$$c_1 e^x + c_2 e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}.$$

Per risolvere la seconda equazione troviamo una soluzione v_1 dell'equazione $y'' - 3y' + 2y = x$, per la terza una soluzione v_2 dell'equazione $y'' - 3y' + 2y = e^x$.

Per trovare v_1 cerchiamo tra le funzioni del tipo

$$v_1(x) = ax + b.$$

Derivando v_1 e inserendo le informazioni ottenute nell'equazione si ottengono

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{3}{4}.$$

Per trovare v_2 si osservi che e^x è anche soluzione dell'omogenea, quindi cerchiamo v_2 tra le funzioni del tipo

$$v_2(x) = c x e^x.$$

Derivando:

$$v_2'(x) = c(xe^x + e^x), \quad v_2''(x) = c(xe^x + 2e^x),$$

quindi, inserendo nell'equazione, si ricava $c = -1$.

Infine per la quarta è sufficiente sommare le soluzioni della seconda a quelle della terza:

$$c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} - x e^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}.$$