

CdL Ingegneria Meccanica

Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 19 gennaio 2026

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Data l'equazione

$$x = \operatorname{arctg}(\lambda x)$$

(a) - si determini per quali valori del parametro $\lambda \in \mathbf{R}$ l'equazione ammette soluzione, ed eventualmente quante, nell'insieme $[0, +\infty)$.

(b) - Si dica poi, per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$, se la funzione $f_\lambda(x) = x - \operatorname{arctg}(\lambda x)$ ammette minimo in $[0, +\infty)$ ed eventualmente si dica quale.

2. Si studi la convergenza delle seguenti serie al variare del parametro $\alpha > 0$:

$$\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{1 + \alpha^{2n}}}, \quad \sum_n \frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^{2\alpha}}}}, \quad \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{1 + \alpha^{2n}}} \frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^{2\alpha}}}}.$$

3. Si calcolino i seguenti limiti:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x - \log(1 + x^2)}{\sqrt[3]{1 + x^4} - \cos x^3},$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \operatorname{sen} x - \log(1 + x^2)}{\sqrt[3]{1 + x^4} - \cos x^3},$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x - \log(1 + x^2)}{\log(1 + x + x^3) - \log(1 + x) + 1 - e^{x^3}}.$$

Soluzioni

1. Detta f_λ la funzione

$$f_\lambda : [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}, \quad f_\lambda(x) := x - \operatorname{arctg}(\lambda x),$$

si ha che

$$f_\lambda(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_\lambda(x) = +\infty. \quad (1)$$

Studiamo f_λ in $[0, +\infty)$. Calcoliamo la derivata di f_λ

$$f'_\lambda(x) = 1 - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2 x^2}$$

e imponendo $f'_\lambda = 0$ si ha:

$$\frac{1}{1 + \lambda^2 x^2} [1 + \lambda^2 x^2 - \lambda] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda^2 x^2 = \lambda - 1.$$

Da ciò si ricava che la derivata di f_λ si annulla in $(0, +\infty)$ solo se $\lambda > 1$. Per $\lambda = 1$ la derivata si annulla solo in $x = 0$. Inoltre si ha che

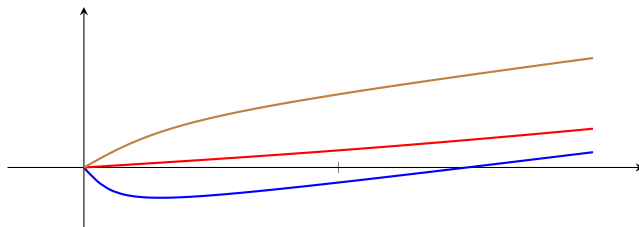
$$f'_\lambda(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda^2 x^2 > \lambda - 1, \quad f'_\lambda(x) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda^2 x^2 < \lambda - 1.$$

Quindi per $\lambda \leq 1$ si ha che f_λ è strettamente crescente e, poiché f_λ è continua, si annulla in 0 e solo in 0.

Per $\lambda > 1$ si ha che

$$f'_\lambda(x) \begin{cases} < 0 & \text{per } x \in \left(0, \frac{\sqrt{\lambda-1}}{\lambda}\right), \\ = 0 & \text{per } x = \frac{\sqrt{\lambda-1}}{\lambda}, \\ > 0 & \text{per } x > \frac{\sqrt{\lambda-1}}{\lambda}. \end{cases} \quad (2)$$

Nella figura che segue un esempio (in rosso) con $\lambda \in (0, 1)$, uno (in blu) con $\lambda > 1$, uno (in marrone) con $\lambda < 0$.



- (a) Ricavando da (2) gli intervalli di crescita e decrescenza di f_λ e usando (1) si deduce che per $\lambda > 1$ $f_\lambda(x) = 0$ ha due soluzioni in $[0, +\infty)$, $x = 0$ e una soluzione positiva (maggiore di $\frac{\sqrt{\lambda-1}}{\lambda}$), per $\lambda \leq 1$ l'equazione ha una sola soluzione in $[0, +\infty)$, data da $x = 0$.

- (b) Per $\lambda > 1$ dalla crescenza e decrescenza di f_λ si deduce che f_λ ha minimo assoluto nel punto $x_\lambda = \frac{\sqrt{\lambda-1}}{\lambda}$, mentre per $\lambda \leq 1$, poiché f_λ è strettamente crescente, ha minimo assoluto in 0.

2. 1^a serie) Nel caso in cui $\alpha \in (0, 1)$ il generico termine della prima serie si confronta con α^n . Stimando direttamente come segue

$$\frac{\alpha^n}{\sqrt{1 + \alpha^{2n}}} < \alpha^n,$$

oppure utilizzando il confronto asintotico

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\alpha^n}{\sqrt{1 + \alpha^{2n}}}}{\alpha^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^{2n}}} = 1,$$

si ha che la prima serie converge per $\alpha \in (0, 1)$.

Nel caso in cui $\alpha \geq 1$ si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{1 + \alpha^{2n}}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{se } \alpha = 1, \\ 1 & \text{se } \alpha > 1, \end{cases}$$

oppure si può stimare

$$\frac{\alpha^n}{\sqrt{1 + \alpha^{2n}}} > \frac{\alpha^n}{\sqrt{2\alpha^{2n}}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

quindi, non valendo la condizione necessaria per la convergenza, si ottiene che la serie diverge positivamente.

2^a serie) La seconda serie si studia con il criterio del confronto: per ogni $\alpha > 0$ il termine generico è asintotico ad $\frac{1}{n^\alpha}$, per cui la serie diverge per $\alpha \leq 1$ e converge per $\alpha > 1$. Infatti

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^{2\alpha}}}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^{2\alpha}}}} = 1.$$

3^a serie) Veniamo alla terza serie. Come già osservato, i due fattori (entrambi positivi per $\alpha > 0$)

$$\frac{\alpha^n}{\sqrt{1 + \alpha^{2n}}} \quad \text{e} \quad \frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^{2\alpha}}}}$$

hanno comportamenti diversi a seconda del valore di α e quindi converrà concentrarsi sul fattore che converge, stimandolo opportunamente. Si hanno le seguenti stime:

$$\text{per } \alpha > 1 : \quad \frac{\alpha^n}{\sqrt{1 + \alpha^{2n}}} < 1 \quad \text{e} \quad \frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^{2\alpha}}}} < \frac{1}{n^\alpha}, \quad (3)$$

$$\text{per } \alpha < 1 : \quad \frac{\alpha^n}{\sqrt{1 + \alpha^{2n}}} < \alpha^n \quad \text{e} \quad \frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^{2\alpha}}}} < 1. \quad (4)$$

Usando (3) si ottiene che

$$\text{per } \alpha > 1 : \quad \frac{\alpha^n}{\sqrt{1 + \alpha^{2n}}} \frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^{2\alpha}}}} < \frac{1}{n^\alpha}$$

per cui, per il criterio del confronto, la serie converge (se $\alpha > 1$), usando (4) si ottiene che

$$\text{per } \alpha < 1 : \quad \frac{\alpha^n}{\sqrt{1 + \alpha^{2n}}} \frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^{2\alpha}}}} < \alpha^n,$$

per cui, per il criterio del confronto, la serie converge se $\alpha \in (0, 1)$.

Nel caso in cui α è uguale ad 1 si ottiene che la serie è

$$\sum_n \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \sum_n \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 + n^2}}.$$

Poiché

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1 + n^2}}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

per confronto con la serie armonica $\sum_n \frac{1}{n}$ questa serie diverge.

Concludendo: la terza serie

diverge positivamente per $\alpha = 1$,

converge per ogni altro valore positivo di α .

3. Per il primo e il terzo limite dobbiamo considerare gli sviluppi di Taylor delle funzioni. Ci serviranno gli sviluppi al quarto ordine.

(a) - Si ha

$$\begin{aligned} x \operatorname{sen} x - \log(1 + x^2) &= x \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right) - \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \right) = \\ &= x^2 - \frac{x^4}{3!} - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) = \frac{x^4}{3} + o(x^4) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1 + x^4} - \cos x^3 &= 1 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) - \left(1 - \frac{x^6}{2} + o(x^6) \right) = \\ &= \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) + \frac{x^6}{2} + o(x^6) = \frac{x^4}{3} + o(x^4) \end{aligned}$$

di conseguenza

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x - \log(1 + x^2)}{\sqrt[3]{1 + x^4} - \cos x^3} = 1.$$

(b) - Per questo gli sviluppi non servono. In questo caso si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \operatorname{sen} x - \log(1 + x^2)}{\sqrt[3]{1 + x^4} - \cos x^3} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\operatorname{sen} x - \frac{\log(1+x^2)}{x} \right)}{x^{\frac{4}{3}} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^4}} - \frac{\cos x^3}{x^{4/3}} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} x - \frac{\log(1+x^2)}{x}}{x^{\frac{1}{3}} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^4}} - \frac{\cos x^3}{x^{4/3}} \right)} = 0. \end{aligned}$$

(c) - Sviluppando il denominatore al quart'ordine si ottiene (nelle seguenti uguaglianze i termini x^k con k superiore a 4 sono stati inglobati in $o(x^4)$)

$$\begin{aligned} \log(1 + x + x^3) &= x + x^3 - \frac{(x + x^3)^2}{2} + \frac{(x + x^3)^3}{3} - \frac{(x + x^3)^4}{4} + o(x^4) = \\ &= x + x^3 - \frac{1}{2}(x^2 + 2x^4) + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) = \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{4}x^4 + o(x^4); \\ \log(1 + x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4); \\ e^{x^3} &= 1 + x^3 + \frac{x^6}{2} + o(x^6) = 1 + x^3 + o(x^4). \end{aligned}$$

Mettendo assieme le cose

$$\begin{aligned}\log(1+x+x^3) - \log(1+x) + 1 - e^{x^3} &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{4}x^4 + \\ &\quad - \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right) + \\ &\quad + 1 - (1+x^3) + o(x^4) = \\ &= -x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

da cui

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x - \log(1+x^2)}{\log(1+x+x^3) - \log(1+x) - e^{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{-x^4 + o(x^4)} = -\frac{1}{3}.$$