

CdL Ingegneria Meccanica

Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 4 febbraio 2026

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Data l'espressione

$$f(x) = x e^{\frac{1}{1-|x|}}$$

- (a) se ne trovi il dominio (massimale) estendendo eventualmente, se e ove possibile, il dominio della funzione. Dopodiché si dica dove la funzione (eventualmente estesa) è continua e dove non lo è;
- (b) si dica se ammette asintoti all'infinito (sia a $+\infty$ che a $-\infty$) ed eventualmente li si trovi.

2. Date le funzioni

$$f(x) = \cos 2x - e^{-2x^2} \quad \text{e} \quad g(x) = \cos 2x - e^{-2(x+x^2)}$$

- (a) se ne scriva lo sviluppo di Taylor fino al quarto ordine in 0;
- (b) si determini per quali valori del parametro $\alpha > 0$ il seguente integrale improprio è convergente:

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{x^\alpha \log(1+x)} dx = \int_0^1 \frac{\cos 2x - e^{-2x^2}}{x^\alpha \log(1+x)} dx.$$

3. Si trovino le soluzioni dei problemi di Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} u' + \frac{1}{t} u = \frac{1}{t^2 + 2t + 5} \\ u(1) = \frac{\log 8}{2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} u' + \frac{1}{t} u = \frac{1}{t^2 + 2t + 5} \\ u(-1) = \frac{\log 4}{2} \end{array} \right.$$

Soluzioni

1. La funzione è definita, o può essere definita, in $\mathbf{R}$. Infatti, a priori, vanno scartati i punti -1 ed 1 e il dominio risulta essere $\mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$. Si osservi però che

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} x e^{\frac{1}{1-|x|}} &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow 1^+} x e^{\frac{1}{1-|x|}} &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} x e^{\frac{1}{1-|x|}} &= 0, & \lim_{x \rightarrow -1^+} x e^{\frac{1}{1-|x|}} &= -\infty.\end{aligned}$$

Di conseguenza $f : \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbf{R}$ può essere estesa ad una funzione definita da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ come segue

$$f(x) = \begin{cases} x e^{\frac{1}{1-|x|}} & \text{per } x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\} \\ 0 & \text{per } x \in \{-1, 1\}. \end{cases}$$

La funzione così definita risulta continua in tutti i punti di $\mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, mentre nei punti -1 e 1 è discontinua.

Per vedere se c'è un asintoto a $+\infty$ prima va valutato il limite all'infinito:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{\frac{1}{1-|x|}} = +\infty,$$

quindi è possibile che f abbia un asintoto obliquo a $+\infty$. Ora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{1-|x|}} = 1,$$

per cui f avrà un asintoto obliquo a $+\infty$ se $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$ esiste ed è un numero reale. Vediamo di calcolarlo: poiché $\frac{1}{1-|x|}$ è infinitesimo per $x \rightarrow +\infty$ si ha (considerando $x > 0$)

$$\begin{aligned}f(x) - x &= x \left[e^{\frac{1}{1-x}} - 1 \right] = x \left[1 + \frac{1}{1-x} + o\left(\frac{1}{1-x}\right) - 1 \right] = x \left[\frac{1}{1-x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \\ &= \frac{x}{1-x} + x o\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{1-x} + \frac{o\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

e passando al limite si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = -1.$$

Per cui f ammette un asintoto obliquo a $+\infty$ e tale asintoto è

$$r(x) = x - 1.$$

In maniera analoga si ottiene che f ammette un asintoto obliquo a $-\infty$ e tale asintoto è

$$s(x) = x + 1.$$

2. (a) - Cominciamo da f . Si ha

$$\begin{aligned}\cos 2x &= 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{4!} + o(x^4) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4), \\ e^{-2x^2} &= 1 - 2x^2 + \frac{(-2x^2)^2}{2} + o(x^4) = 1 - 2x^2 + 2x^4 + o(x^4),\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}f(x) &= 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) - (1 - 2x^2 + 2x^4 + o(x^4)) = \\ &= 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - 1 + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4) = \\ &= -\frac{4}{3}x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

Per quanto riguarda la g è sufficiente calcolare il seguente sviluppo:

$$\begin{aligned}e^{-2(x+x^2)} &= 1 - 2(x+x^2) + \frac{(-2(x+x^2))^2}{2} + \frac{(-2(x+x^2))^3}{3!} + \\ &+ \frac{(-2(x+x^2))^4}{4!} + o((-2(x+x^2))^4) = \\ &= 1 - 2x - 2x^2 + \frac{4}{2}(x^2 + 2x^3 + x^4) - \frac{8}{6}(x^3 + 3x^4 + o(x^4)) + \frac{2}{3}(x^4 + o(x^4)) + o(x^4) = \\ &= 1 - 2x + 4x^3 + 2x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 4x^4 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) = \\ &= 1 - 2x + \frac{8}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^4 + o(x^4),\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}g(x) &= \cos 2x - e^{-2(x+x^2)} = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \left(1 - 2x + \frac{8}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^4 + o(x^4)\right) = \\ &= 2x - 2x^2 - \frac{8}{3}x^3 + 2x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

(b) - L'intervallo di integrazione è finito e l'unico punto di $[0, 1]$ nel quale la funzione ha un asintoto verticale è 0 poiché

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^\alpha \log(1+x)} = +\infty.$$

Quindi 0 è l'unico punto dove andare a controllare il comportamento della funzione integranda. Il denominatore è asintotico a $x^{\alpha+1}$: infatti sviluppando in 0 la funzione $x \mapsto \log(1+x)$ si ha

$$x^\alpha \log(1+x) = x^\alpha (x + o(x)) = x^{\alpha+1} + o(x^{\alpha+1}),$$

oppure applicando uno dei limiti notevoli si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha \log(1+x)}{x^{\alpha+1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \quad \text{per ogni } \alpha > 0.$$

Il numeratore, dal punto (a), è asintotico a x^4 poiché

$$f(x) = -\frac{4}{3}x^4 + o(x^4).$$

Di conseguenza la funzione integranda è asintotica in 0 a

$$\frac{x^4}{x^{\alpha+1}} = \frac{1}{x^{\alpha-3}},$$

per cui l'integrale converge se e solo se $\alpha - 3 < 1$, cioè $\alpha < 4$.

3. Cominciamo con il risolvere l'equazione

$$u' + \frac{1}{t} u = \frac{1}{t^2 + 2t + 5}.$$

Chiamando $a(t)$ la funzione $1/t$ e A una sua primitiva si ha

$$A(t) = \log |t|.$$

Una generica soluzione u sarà allora

$$u(t) = e^{-A(t)} \left[\int \frac{|t|}{t^2 + 2t + 5} dt + c \right] = \frac{1}{|t|} \left[\int \frac{|t|}{t^2 + 2t + 5} dt + c \right]. \quad (1)$$

Per $t > 0$ si ha:

$$\frac{t}{t^2 + 2t + 5} = \frac{t}{(t+1)^2 + 4} = \frac{t+1}{(t+1)^2 + 4} - \frac{1}{(t+1)^2 + 4}.$$

Integriamo il termine di questa uguaglianza integrando i due addendi nel membro di destra. Una primitiva del primo sarà

$$\int \frac{t+1}{(t+1)^2 + 4} dt = \frac{1}{2} \log((t+1)^2 + 4).$$

Per il secondo addendo scriviamo

$$\int \frac{1}{(t+1)^2 + 4} dt = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{t+1}{2}\right)^2 + 1} dt.$$

Ponendo $y := \frac{t+1}{2}$ si ottiene

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{y^2 + 1} dy = \frac{1}{2} \arctg y,$$

da cui

$$\int \frac{t}{t^2 + 2t + 5} dt = \frac{1}{2} \left[\log((t+1)^2 + 4) - \operatorname{arctg} \left(\frac{t+1}{2} \right) \right].$$

Una generica soluzione u per $t > 0$ allora sarà

$$u(t) = \frac{1}{2t} \left[\log((t+1)^2 + 4) - \operatorname{arctg} \left(\frac{t+1}{2} \right) \right] + \frac{c}{t}.$$

Imponendo la condizione iniziale si ottiene il valore di c :

$$u(1) = \frac{1}{2} (\log 8 - \operatorname{arctg} 1) + c = \frac{\log 8}{2} - \frac{\pi}{8} + c \stackrel{\text{cond. in.}}{=} \frac{\log 8}{2}$$

da cui

$$c = \frac{\pi}{8}.$$

La soluzione è data da

$$u(t) = \frac{1}{2t} \left[\log((t+1)^2 + 4) - \operatorname{arctg} \left(\frac{t+1}{2} \right) \right] + \frac{\pi}{8} \frac{1}{t}.$$

Per $t < 0$, da (1), si ha che una generica soluzione u è

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{|t|} \left[\int \frac{|t|}{t^2 + 2t + 5} dt + c \right] = \\ &= -\frac{1}{t} \left[-\int \frac{t}{t^2 + 2t + 5} dt + c \right] = \frac{1}{t} \left[\int \frac{t}{t^2 + 2t + 5} dt - c \right] \end{aligned}$$

che, data la compensazione dei segni e visto che c è una costante generica, sostanzialmente è la stessa espressione di prima. Otterremo quindi

$$u(t) = \frac{1}{2t} \left[\log((t+1)^2 + 4) - \operatorname{arctg} \left(\frac{t+1}{2} \right) \right] - \frac{c}{t}$$

da cui

$$u(-1) = -\frac{1}{2} \log 4 + c = \frac{\log 4}{2} \quad \implies \quad c = \log 4.$$

La soluzione è data da

$$u(t) = \frac{1}{2t} \left[\log((t+1)^2 + 4) - \operatorname{arctg} \left(\frac{t+1}{2} \right) \right] - \frac{\log 4}{t}.$$