CdL Ingegneria Meccanica

Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 1° luglio 2026

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. a) Si studi in dettaglio la funzione data dall'espressione

$$f(x) = x\big(1 + \log|x|\big)^2 .$$

Dopodiché

b) si dica quanti punti stazionari ha la funzione $g_\lambda(x) := f(x) - \lambda x$ nell'insieme $(0, +\infty)$ al variare del parametro $\lambda \in \mathbf{R}$;

c) data l'espressione $f_\alpha(x) = |x|^\alpha \big(1 + \log|x|\big)^2$ si dica quali sono i tre insiemi A, B, C definiti da (eventualmente estendo il dominio di definizione)

$$\begin{aligned} A &:= \{\alpha \in \mathbf{R} \,|\, f_\alpha \text{ definita in } \mathbf{R}\}, \\ B &:= \{\alpha \in \mathbf{R} \,|\, f_\alpha \text{ definita e derivabile in } \mathbf{R}\}, \\ C &:= \{\alpha \in \mathbf{R} \,|\, f_\alpha \in C^1(\mathbf{R})\} \end{aligned}$$

2. Si studi la convergenza delle seguenti serie al variare del parametro $\alpha > 0$:

$$\sum_n \left[\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} - \sqrt[3]{1 + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right] ,$$

$$\sum_n \left[\cos\left(\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \right) - 1 \right] .$$

Cosa si può dire (della seconda serie) per $\alpha \leqslant 0$?

3. Si risolvano i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \big(x \operatorname{arctg} \sqrt{x}\big)\, y = x \operatorname{arctg} \sqrt{x} \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' + \big(x \operatorname{arctg} \sqrt{x}\big)\, y = x \operatorname{arctg} \sqrt{x} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Soluzioni

1. Punto a) - La funzione f è definita per $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Facendo i limite agli estremi del dominio,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to0^-} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to0^+} f(x) = 0,$$

ci si rende conto che f può essere estesa anche a 0 e tale estensione risulta continua. Consideriamo d'ora in poi f definita in $\mathbf{R}$.

Vediamo se f ha degli asintoti all'infinito:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$

quindi f non ha asintoti a $+\infty$ e, per simmetria (f è dispari), nemmeno a $-\infty$.

Calcoliamo la derivata prima: per $x > 0$ abbiamo

$$f'(x) = (1+\log x)^2 + 2\,x(1+\log x)\,\frac{1}{x} = (1+\log x)(3+\log x)\,.$$

Per $x < 0$, eseguendo i calcoli o data la disparità di f, si ha

$$f'(x) = (1+\log(-x))(3+\log(-x))\,.$$

Infine, per $x = 0$ si ha

$$f'(0) = \lim_{h\to0} \frac{h(1+\log h)^2}{h} = +\infty\,.$$

Di conseguenza f' si annulla se

$$x = -\frac{1}{e} \quad \vee \quad x = -\frac{1}{e^3} \quad \vee \quad x = \frac{1}{e} \quad \vee \quad x = \frac{1}{e^3}\,.$$

Per $x > 0$ si ha che

$$f''(x) = \frac{2(2+\log x)}{x},$$

il cui segno è il seguente:

$$f''(x) \begin{cases} > 0 & \text{per } x \in \left(\dfrac{1}{e^2}, +\infty\right) \\ = 0 & \text{per } x = \dfrac{1}{e^2}, \\ < 0 & \text{per } x \in \left(0, \dfrac{1}{e^2}\right). \end{cases}$$

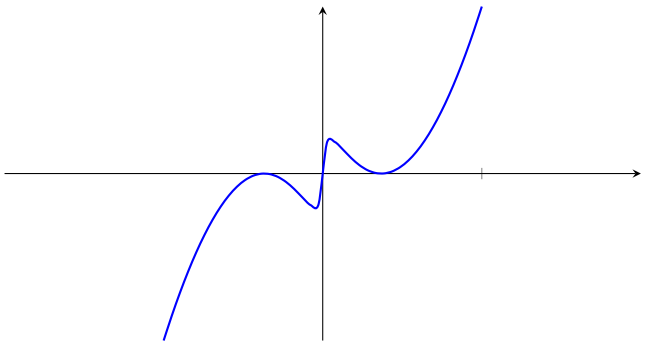
Analogamente

$$f''(x)\begin{cases} <0 & \text{per } x\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{e^2}\right)\\ =0 & \text{per } x=-\dfrac{1}{e^2},\\ <0 & \text{per } x\in\left(-\dfrac{1}{e^2},0\right). \end{cases}$$

Si conclude che f ha un punto di massimo locale in $1/e^3$ e in $-1/e$, ha un minimo locale in $-1/e^3$ e in $1/e$; risulta concava in $(-\infty,-\frac{1}{e^2})\cup(0,\frac{1}{e^2})$, convessa in $(-\frac{1}{e^2},0)\cup(\frac{1}{e^2},+\infty)$.
Il valore nei punti di estremo relativo sono

$$f(1/e^3)=\frac{1}{e^3}\left(1+\log\frac{1}{e^3}\right)^2=\frac{4}{e^3},\qquad f(1/e)=0\,,$$

e i corrispondenti valori cambiati di segno per i punti di estremo negativi.
Infine il grafico di f è quindi



Punto b) - Per rispondere al punto b) possiamo dire che i punti stazionari di g_λ sono i punti in cui la derivata prima di g_λ si annulla, cioè i valori di x che risolvono

$$g'_\lambda(x)=f'(x)-\lambda=(1+\log x)(3+\log x)-\lambda=0\,.$$

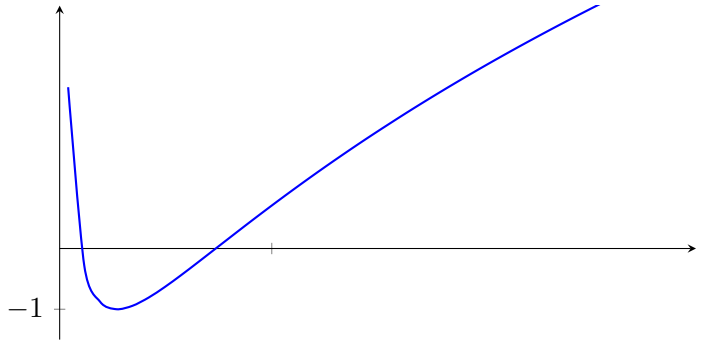
Studiamo brevemente la funzione f' per $x>0$:

$$f'(x)=\log^2 x+4\log x+3=\log^2 x+4\log x+4-1=(\log x+2)^2-1.$$

Di conseguenza f', essendo un polinomio di secondo grado in $\log x$, ha un punto di minimo quando $(\log x+2)^2$ si annulla, cioè in $1/e^2$, punto nel quale f' vale -1.
Si conclude che g_λ ha

due, e solo due, punti stazionari	per $\lambda>-1$,
un, e uno solo, punto stazionario	per $\lambda=-1$,
nessun punto stazionario	per $\lambda<-1$.

Per completezza riportiamo il grafico di f':



Punto c) - La funzione f_α, definita in $\mathbf{R}\setminus\{0\}$, risulta prolungabile per continuità in 0 solo per $\alpha > 0$ (la verifica è analoga a quella fatta per f).
Per quanto riguarda la derivabilità si ha che f_α è derivabile, e la sua derivata è continua, in ogni punto $x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$. Rimane da studiare in dettaglio la derivata in 0. Si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h|^\alpha (1+\log|h|)^2}{h} \qquad \text{esiste ed è finito}$$

se e solo se $\alpha > 1$ e in particolare, per $\alpha > 1$,

$$f'_\alpha(0) = 0.$$

Infine, valutando la derivata di f_α per $x \neq 0$ si ha

$$f'_\alpha(x) = \frac{d}{dx}\left[|x|^\alpha \big(1+\log|x|\big)^2\right] = \frac{|x|^\alpha}{x}\left[\alpha\big(1+\log|x|\big)^2 + 2\big(1+\log|x|\big)\right].$$

Valutando i limiti di $f'_\alpha(x)$ per $x \to 0^-$ e per $x \to 0^+$ si ottiene

$$\lim_{x\to 0} f'_\alpha(x) = f'_\alpha(0) \qquad \text{se e solo se} \qquad \alpha > 1.$$

Si conclude che f'_α per $\alpha > 1$ è, non solo derivabile, ma la sua derivata è continua in 0. Di conseguenza $f_\alpha \in C^1(\mathbf{R})$ per $\alpha > 1$ (e solo per $\alpha > 1$).
In conclusione

$$A = (0, +\infty), \qquad B = C = (1, +\infty).$$

2. 1^a serie) Ricordando che

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha\, x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\, x^2 + o(x^2)$$

si ottiene

$$\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-\sqrt[3]{1+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=$$
$$=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2-\left[1+\frac{1}{3}\frac{3}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{9}\frac{9}{4}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=$$
$$=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2-1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)=$$
$$=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{8}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Per il confronto asintotico con $\frac{1}{n^2}$ la serie converge.

2^a serie) Si osservi prima che

$$\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\exp\log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\exp\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)\right].$$

Anche in questo caso usiamo gli sviluppi di Taylor:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{n^\alpha}+o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right),$$
$$\exp\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)\right]=1+\frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}+o\left(\frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}\right),$$
$$\cos\left(\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)=\cos\left(\frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}+o\left(\frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}\right)\right)=$$
$$=1-\frac{1}{2}\frac{1}{n^{2\alpha+1}}+o\left(\frac{1}{n^{2\alpha+1}}\right),$$
$$\cos\left(\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)-1=-\frac{1}{2}\frac{1}{n^{2\alpha+1}}+o\left(\frac{1}{n^{2\alpha+1}}\right).$$

Di conseguenza la serie converge per ogni $\alpha>0$.

Altro modo di farlo, elegante, ma meno immediato, è il seguente: definitivamente si ha (sempre per $\alpha>0$)

$$\left(\frac{e}{2}\right)^{\frac{1}{n^\alpha\sqrt{n}}}<\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\left[\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^{n^\alpha}\right]^{\frac{1}{n^\alpha\sqrt{n}}}<e^{\frac{1}{n^\alpha\sqrt{n}}}.$$

Si ha

$$e^{\frac{1}{n^\alpha\sqrt{n}}}=1+\frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

da cui (usando la monotonia del coseno)

$$\cos\left(\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)-1>-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^{2\alpha+1}}\right)$$

Poiché

$$a^x = e^{x \log a} \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\frac{e}{2}\right)^{\frac{1}{n^\alpha \sqrt{n}}} = e^{\frac{1-\log 2}{n^\alpha \sqrt{n}}}$$

si ottiene anche la stima

$$\cos\left(\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right) - 1 < -\frac{1}{2}\left(\frac{1-\log 2}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha+1}}\right)$$

da cui, come prima, l'asintoticità del termine generale della serie a $-\frac{1}{n^{2\alpha+1}}$.
Per $\alpha \leqslant 0$ osserviamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right) = 0.$$

Procedendo con gli sviluppi si ha

$$\begin{aligned}
&\exp\left[\frac{1}{\sqrt{n}} \log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)\right] = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)\right), \\
&\cos\left(\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right) = \\
&\qquad = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)^2\right), \\
&\cos\left(\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right) - 1 = -\frac{1}{2}\frac{1}{n} \log^2\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right) + o\left(\frac{1}{n} \log^2\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)
\end{aligned}$$

Si conclude che il termini della serie, per $\alpha \leqslant 0$, sono asintotici a

$$\frac{1}{n} \log^2\left(1+n^{-\alpha}\right) > \frac{1}{n}.$$

Si conclude che la serie converge se e solo se $\alpha > 0$ e per $\alpha \leqslant 0$ diverge negativamente.

3. L'equazione poteva essere risolta usando la formula per le equazioni linerari

$$y' + ay = f,$$

con $f = a$, oppure separando le variabili,

$$y' + ay = a \qquad \Longrightarrow \qquad y' = a(1-y).$$

In entrambi i casi dobbiamo integrare la funzione

$$a(x) := x \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

Si ha, integrando per parti, che una primitiva è

$$A(x) := \int a(x)\,dx = \int x \operatorname{arctg} \sqrt{x}\,dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \int \frac{x^2}{2}\,\frac{1}{1+x}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx\,.$$

Sostituiamo t a $\sqrt{x}$ ottenendo per l'ultimo integrale

$$\int \frac{t^4}{2}\,\frac{1}{1+t^2}\,dt\,.$$

A questo punto va diviso il numeratore per il denominatore. Più semplicemente, anziché effettuare la divisione, possiamo procedere in diversi modi. Ne elenchiamo alcuni.

Primo:

$$\begin{aligned}\frac{t^4}{1+t^2} &= t^2\,\frac{t^2}{1+t^2} = t^2\,\frac{t^2+1-1}{1+t^2} = t^2\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right) = t^2-\frac{t^2}{1+t^2} = \\ &= t^2-\frac{t^2+1-1}{1+t^2} = t^2-1+\frac{1}{1+t^2};\end{aligned}$$

secondo: oppure

$$\begin{aligned}\frac{t^4}{1+t^2} &= \frac{t^4+2t^2+1-2t^2-1}{1+t^2} = \frac{(t^2+1)^2-2t^2-1}{1+t^2} = t^2+1-\frac{2t^2+1}{1+t^2} = \\ &= t^2+1-2\,\frac{t^2+1-1/2}{1+t^2} = t^2+1-2\left(1-\frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2}\right) = t^2+1-2+\frac{1}{1+t^2} = \\ &= t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\,;\end{aligned}$$

terzo: o, ancora più semplicemente

$$\frac{t^4}{1+t^2} = \frac{t^4-1+1}{1+t^2} = \frac{(t^2-1)(t^2+1)+1}{1+t^2} = t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\,.$$

Di conseguenza

$$\int \frac{t^4}{2}\,\frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int\left(t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)\,dt = \frac{t^3}{6}-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t+c\,.$$

Quindi

$$\begin{aligned}A(x) &= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\int\frac{x^2}{2}\,\frac{1}{1+x}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \\ &= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{6}-\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)\,.\end{aligned}$$

A questo punto

$$\int e^{A(x)}\,a(x)\,dx = e^{A(x)}+c$$

quindi una generica soluzione è data da

$$y(x) = e^{-A(x)}\left[e^{A(x)}+c\right] = c\,e^{-A(x)}+1\,.$$

Per poter avere $y(0) = 2$ è sufficiente scegliere $c = 1$, per poter avere $y(0) = 1$ è sufficiente scegliere $c = 0$.
Si osservi che l'ultimo caso si poteva risolvere anche senza eseguire i calcoli, osservando che la funzione costante 1 risolve il problema e, dal teorema dell'unicità, $y \equiv 1$ è, quindi, *la* soluzione.

Separando le variabili si ottiene immediatamente che $y \equiv 1$ è soluzione del problema:

$$y' = a(1 - y).$$

Per risolvere il secondo invece, poiché $1 - y(0)$ non si annulla, possiamo dividere per $1 - y$ e integrare

$$\int \frac{y'}{1-y}\, dx = -\log(1 - y(x)) + k = A(x).$$

Si procede considerando l'esponenziale, ottenenedo

$$y(x) = 1 - e^{-A(x)+k} = 1 - c\, e^{-A(x)} \qquad (c = e^k)$$

e poi inserendo $x = 0$ e $y(0) = 2$ per trovare c.