**CdL Ingegneria Meccanica**

**Prova scritta di Analisi Matematica 1**

Padova, 14 settembre 2026

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

**1.** Data la funzione $g : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ definita da $g(x) = \log^2 x + 2 \log x - x + 1$, si dica quante soluzioni ha l'equazione

$$g(x) = 0, \qquad x \in (0, +\infty).$$

**2.** Si studi la convergenza dei seguenti integrali impropri, il secondo al variare del parametro $\alpha > 0$ (errore di battitura, avrei voluto scrivere $\alpha \in \mathbf{R}$, quindi lo svolgimento sarà fatto per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$):

a) $$\int_0^2 \frac{1}{\log(1 - \sqrt{x} + x^2 - 2x^3) + 1 - e^{\sqrt{x}}}\, dx;$$

b) $$\int_0^2 \frac{1}{\log(1 + \alpha\sqrt{x} + x^2 - 2x^3) + 1 - e^{\alpha^2\sqrt{x}}}\, dx.$$

**3.** Si calcolino i seguenti integrali:

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\, dx,$

b) $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{1}{\sqrt{|t^2 + 4t + 3|}}\, dt.$

## Soluzioni

**1.** Proponiamo due svolgimenti molto simili.

**Primo svolgimento -** Per vedere quante soluzioni ha l'equazione richiesta va fatto uno studio di funzione di $g$. Innanzitutto vediamo i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty\,.$$

Quindi, per il teorema degli zeri, esiste almeno una soluzione dell'equazione $g(x) = 0$. Vediamo di capire se ce n'è più di una ed eventualmente quante.
Deriviamo $g$:

$$g'(x) = 2\,\frac{\log x}{x} + \frac{2}{x} - 1 = \frac{2}{x}\big(\log x + 1\big) - 1\,.$$

Abbiamo che

$$\lim_{x\to 0^+} g'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} g'(x) = -1\,.$$

A questo punto sarebbe d'aiuto capire se $g'$ è positiva da qualche parte oppure no, per capire se $g$ è sempre decrescente (in tal caso avremo una sola soluzione dell'equazione $g(x) = 0$) o se invece $g$ fosse crescente in qualche intervallo (e in questo secondo caso potrebbero esserci più soluzioni).
Per vedere se $g'$ è positiva in qualche insieme deriviamo $g'$ nella speranza di trovarne il massimo:

$$g''(x) = -\frac{2}{x^2}\big(\log x + 1\big) + \frac{2}{x}\,\frac{1}{x} = -\frac{2}{x^2}\,\log x\,.$$

Tale funzione si annulla solamente per $x = 1$, che sarà un punto critico di $g'$. Valutando $g'$ nel punto 1 otteniamo

$$g'(1) = 1 > 0$$

per cui $g'$ avrà l'andamento mostrato in figura:

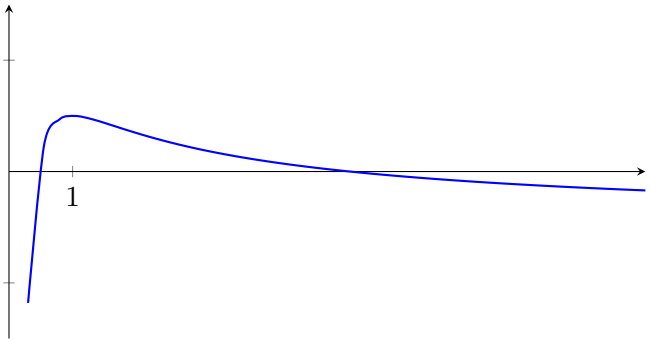
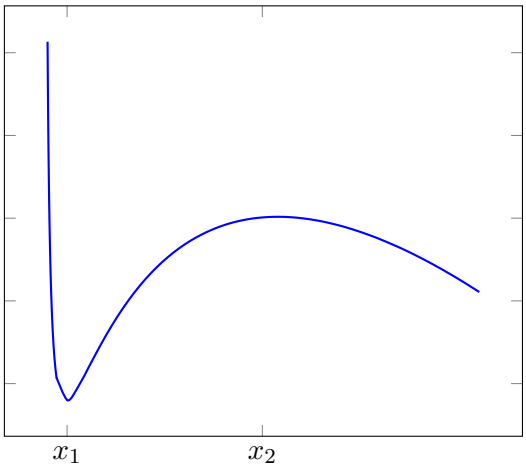



grafico di $g'$

Di conseguenza esistono due punti $x_1, x_2$ (che non conosciamo), con $0 < x_1 < 1 < x_2$, tali che

$$g'(x) \begin{cases} < 0 & \text{per } x \in (0, x_1) \cup (x_2, +\infty) \\ = 0 & \text{per } x = x_1 \vee x = x_2, \\ > 0 & \text{per } x \in (x_1, x_2). \end{cases}$$

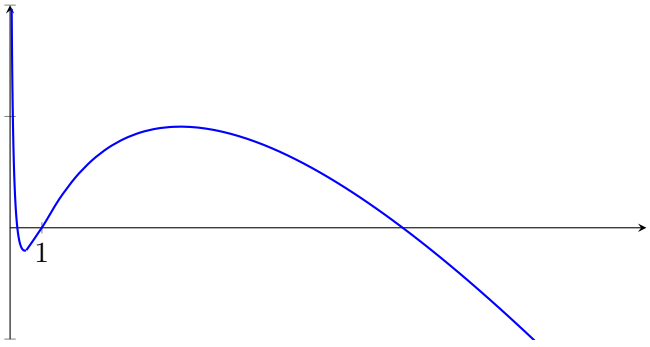
Quindi $g$ cresce nell'intervallo $(x_1, x_2)$ e il grafico di $g$ ha un andamento come quello riportato nella figura che segue




Per capire se c'è più di una soluzione di $g(x) = 0$ valutiamo $g$ in 1:

$$g(1) = 0$$

per cui $g$ si annula in almeno due punti. Ma poiché in $(1, x_2)$ cresce ancora e poi decresce definitivamente diventando negativa sicuramente $g$ si annulla in un terzo punto. Di conseguenza $g$ si annulla in tre, e solamente in tre, punti, uno dei quali è $x = 1$. Il grafico è riportato nella figura che segue.



**Secondo svolgimento -** Un modo, che è sempre lecito, di svolgere l'eserczio è effettuare un cambio di variabile che, in questo caso, può semplificare leggermente i calcoli. Lo svolgimento, a parte questo, rimane lo stesso.
Chiamando $t$ la quantità $\log x$, trasformare la funzione $g$. Poiché $\log : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ è suriettiva la nuova funzione $\tilde{g}$, dipendendete dalla varabioe $t$, che stiamo per andare a definire avrà come dominio $\mathbf{R}$. Definiamo quindi

$$\tilde{g} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad \tilde{g}(t) := t^2 + 2t - e^t + 1 = (t+1)^2 - e^t.$$

Per vedere quanti zeri ha $\tilde{g}$ procediamo allo stesso modo visto precedentemente, solo i calcoli saranno leggermente più semplici. I limiti agli estremi,

$$\lim_{t \to -\infty} \tilde{g}(t) = +\infty, \qquad \lim_{t \to +\infty} \tilde{g}(t) = -\infty\,, \tag{1}$$

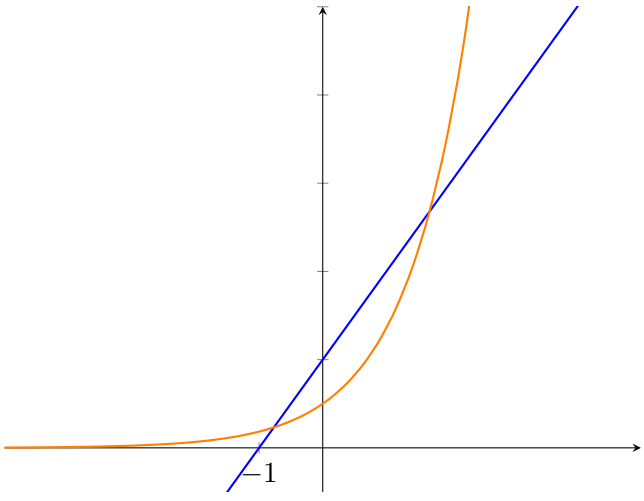
come visto nello svolgimento precedentemente, ci dicono che $\tilde{g} = 0$ avrà almeno una soluzione. Deriviamo $\tilde{g}$:

$$\tilde{g}'(t) = 2\,(t+1) - e^t\,.$$

Questa derivata si annulla in due punti per il seguente motivo: uguagliare a zero $\tilde{g}'$ equivale a risolvere

$$2\,(t+1) = e^t\,. \tag{2}$$

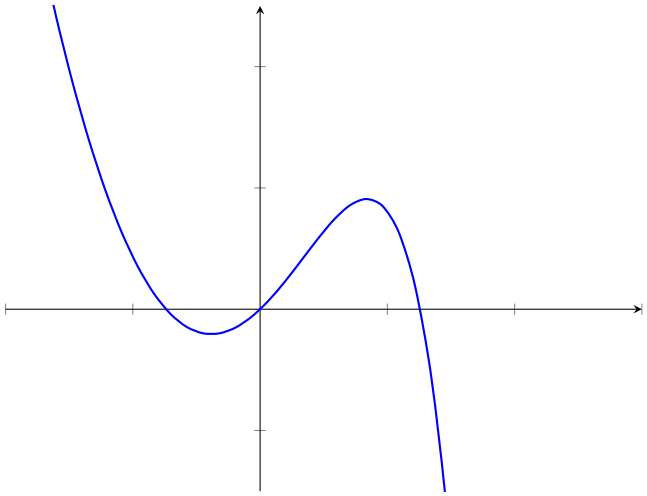
Per vedere quante soluzioni ci sono si può procedere come segue. Essendo $t \mapsto 2\,(t+1)$ una retta, abbiamo tre possibilità: il grafico di questa funzione non incontra mai quello dell'esponenziale, lo incontra una sola volta (se la retta è tangente al grafico dell'esponenziale) oppure lo incontra due volte. Pe capire in quale di questi casi ci troviamo, si osservi che in $t = -1$ il termine di sinistra è nullo (e per $t < -1$ è sempre negativo), mentre il termine di destra è sempre positivo, e in $t = 0$ il termine di sinistra è maggiore del termine di destra. Questo significa che possiamo escludere le prime due possibilià (che la retta sia sempre sotto il grafico dell'esponenziale o che sia tangente ad esso) e rimane quindi solo la terza, come mostrato in figura (in blu il grafico della retta, in arancione quello dell'esponenziale).



Inoltre una delle due soluzioni di (2) è compresa tra $-1$ e 0, quindi negativa, l'altra è positiva.
Da (1) si deduce che la soluzione negativa di $\tilde{g}'(t) = 0$ è un punto di minimo locale, quella positiva un massimo locale.
Oppure, derivando una seconda volta, ci si rende conto che la derivata seconda valutata per una valore negativo risulta essere positiva, da cui il punto stazionario negativo è un massimo locale.
Per capire se $\tilde{g}(x) = 0$ ha una o più soluzioni un modo, come fatto prima, è scoprire il segno di $\tilde{g}$ nei punti stazionari. Per esempio: se nel punto di minimo locale $\tilde{g}$ assumesse un valore nullo allora $\tilde{g} = 0$ avrà tre soluzioni, se $\tilde{g}$ assumesse un valore positivo allora $\tilde{g} = 0$ avrà una sola soluzione, se infine $\tilde{g}$ assumesse un valore negativo e nel punto di massimo locale un valore positivo allora $\tilde{g} = 0$ avrà tre soluzioni. Per capire che siamo in questo terzo caso basta osservare che

$$\tilde{g}(0) = 0.$$

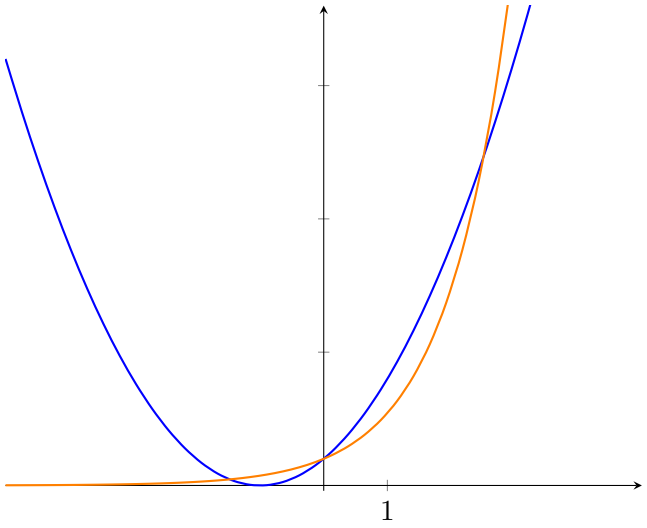
Quindi 0 è una soluzione e, avendo $\tilde{g}$ un punto minimo negativo e un punto massimo positivo e visti i limiti (1) non rimane che concludere che $\tilde{g}$ si annulla in tre punti.



Si osservi che vedere quanti zeri ha $\tilde{g}$ equivale a risolvere

$$h(t) = f(t) \qquad \text{dove} \quad h(t) := (t+1)^2, \quad f(t) = e^t.$$

Di seguito, in blu il grafico di $h$, in arancione quello di $f$.
Provare, per esercizio, a ragionare sull'uguaglianza $h(t) = f(t)$.




**2.** Per svolgere i primi due punti facciamo i conti direttamente sulla funzione con il parametro $\alpha$ e calcoliamone lo sviluppo di Taylor intorno a 0:

$$\begin{aligned}
&\log(1+\alpha\sqrt{x}+x^2-2x^3) = \\
&\quad = \alpha\sqrt{x}+x^2-2x^3+o(\alpha\sqrt{x}+x^2-2x^3) = \alpha\sqrt{x}+o(\sqrt{x}) && \text{se } \alpha\neq 0,\\
&\qquad e^{\alpha^2\sqrt{x}} = 1+\alpha^2\sqrt{x}+o(\sqrt{x}) && \text{se } \alpha\neq 0,
\end{aligned}$$

quindi, per $\alpha \neq 0$, si ha

$$\log(1+\alpha\sqrt{x}+x^2-2x^3)+1-e^{\alpha^2\sqrt{x}} = (\alpha-\alpha^2)\sqrt{x}+o(\sqrt{x}). \tag{3}$$

Nel caso del punto a) il valore di $\alpha$ è $-1$. Di conseguenza la funzione integranda è asintotica a $1/\sqrt{x}$ in 0, in particolare si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\log(1-\sqrt{x}+x^2-2x^3)+1-e^{\sqrt{x}}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = -\frac{1}{2},$$

e quindi l'integrale del punto a) converge.

Per quanto riguarda il punto b), lo sviluppo (3) funziona solamente se $\alpha \notin \{0,1\}$. Nei due casi $\alpha \in \{0,1\}$ la funzione va sviluppata ulteriormente.
Per $\alpha = 0$ si ha

$$\begin{aligned}
\log(1+\alpha\sqrt{x}+x^2-2x^3)+1-e^{\alpha^2\sqrt{x}} &= \log(1+x^2-2x^3) = \\
&= x^2-2x^3+o(x^2-2x^3) = x^2+o(x^2),
\end{aligned}$$

di conseguenza la funzione in 0 è asintotica a $1/x^2$ e l'integrale diverge.
Per $\alpha = 1$ sviluppiamo al secondo ordine:

$$\begin{aligned}
&\log(1+\sqrt{x}+x^2-2x^3)+1-e^{\sqrt{x}} = \\
&\quad = \sqrt{x}+x^2-2x^3-\frac{1}{2}\big(\sqrt{x}+x^2-2x^3\big)^2+o\big((\sqrt{x}+x^2-2x^3)^2\big)-\sqrt{x}-\frac{1}{2}x+o(x) = \\
&\quad = -x+o(x).
\end{aligned}$$

Di conseguenza in questo caso l'integrale diverge (negativamente).

**3.** a) Il primo integrale si svolge facendo il cambio di variabile

$$x = \cosh t\,.$$

Ricordo:

$$\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$$
$$\cosh t + \operatorname{senh} t = e^t \quad \text{da cui} \quad t = \log(\cosh t + \operatorname{senh} t)\,.$$

Allora le quantità che ci interessano diventano

$$x^2 - 1 = \operatorname{senh}^2 t\,, \quad dx = \operatorname{senh} t\, dt\,, \quad t = \log(x + \sqrt{x^2-1})\,.$$

Di conseguenza

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \int_0^{\log(2+\sqrt{3})} \frac{\operatorname{senh} t}{\operatorname{senh} t}\, dt = \int_0^{\log(2+\sqrt{3})} dt = \log(2+\sqrt{3})$$

oppure

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx \quad \text{diventa} \quad \int \frac{\operatorname{senh} t}{\operatorname{senh} t}\, dt = \int dt = t + c_1, \qquad c_1 \in \mathbf{R},$$

e ritornando alla variabile $x$ si ha

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \log(x + \sqrt{x^2-1}) + c_1 \qquad (c_1 \in \mathbf{R}) \tag{4}$$

e infine

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \log(x + \sqrt{x^2-1})\Big|_1^2 = \log(2+\sqrt{3})\,.$$

b) Il secondo integrale si riporta al seguente integrale

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|y^2-1|}}\, dy$$

con il cambio di variabile $y = t + 2$. Infatti si ha

$$t^2 + 4t + 3 = t^2 + 4t + 4 - 1 = (t+2)^2 - 1,$$

da cui, ponendo $y := t + 2$,

$$t^2 + 4t + 3 = y^2 - 1\,, \qquad dt = dy,$$

e quindi

$$\int_{-2}^0 \frac{1}{\sqrt{|t^2+4t+3|}}\, dt = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|y^2-1|}}\, dy\,.$$

Scrivendo questo integrale come la somma di due, uno dei quali già precedentemente calcolato, si ottiene

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|y^2-1|}}\,dx &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}\,dy = \\ &= \operatorname{arcsen} y\Big|_0^1 + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}\,dx = \frac{\pi}{2} + \log(2+\sqrt{3})\,.\end{aligned}$$