Facoltà di Ingegneria
Prova scritta di Analisi Matematica 1
Classe Industriale

3 luglio 2006, traccia A

1. Studiare la seguente funzione e tracciarne approssimativamente il grafico
$$f(x) = \log\left(1 + \frac{|x|}{x^2+1}\right) .$$

2. Studiare il seguente limite
$$\lim_{x\to+\infty} \cos x \ \log\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\log x}\right) .$$

3. Calcolare il seguente integrale definito
$$\int_0^1 x^2 \arctan x \, dx .$$

Soluzione del 3 luglio 2006, traccia A

1. L'insieme di definizione si ottiene imponendo che l'argomento del logaritmo sia strettamente positivo e tale condizione è sempre soddisfatta. Pertanto la funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$. L'insieme di definizione è simmetrico e si verifica facilmente che la funzione è pari. Inoltre essa non è periodica.

   Per quanto riguarda il segno, si osserva che l'argomento del logaritmo è sempre maggiore o uguale di 1 e quindi la funzione è sempre positiva. Inoltre essa si annulla solamente nel punto 0 che è un punto di minimo assoluto per f.

   Inoltre, la funzione è continua e quindi non può ammettere asintoti verticali.

   Poiché $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \log 1 = 0$, la retta di equazione $y = 0$ è un asintoto orizzontale a destra e a sinistra per f.

   La funzione valore assoluto non è derivabile quando il suo argomento si annulla e quindi si può affermare che f è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e, per ogni $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, si ha

$$f'(x) = \frac{1}{1+\dfrac{|x|}{x^2+1}} \; \frac{\dfrac{|x|}{x}(x^2+1) - 2x|x|}{(x^2+1)^2} = \frac{|x|\,(1-x^2)}{x(x^2+1+|x|)(x^2+1)} \,.$$

   Nel punto 0 si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1\,, \qquad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -1\,,$$

   e quindi 0 è un punto angoloso per f con $f'_+(0) = 1$ e $f'_-(0) = -1$.

   Il segno della derivata prima di f dipende solo dai fattori x e $1 - x^2$ e conseguentemente è strettamente positivo in $]-\infty,-1[\cup]0,1[$ e strettamente negativo in $]-1,0[\cup]1,+\infty[$. Quindi f è strettamente crescente in $]-\infty,-1]$ e in $[0,1]$ e strettamente decrescente in $[-1,0]$ e in $[1,+\infty[$. I punti -1 e 1 sono di massimo relativo per f e si ha $f(-1) = f(1) = \log(3/2)$. Tenendo presente l'esistenza degli asintoti orizzontali, i punti ± 1 sono di massimo assoluto per f ed il punto 0 è di minimo assoluto per f (come già osservato dallo studio del segno).

   Infine, f è derivabile due volte in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e si ha, per ogni $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$,

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^5 + x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 6x - 1}{(x^2+1)^2(x^2+x+1)^2}\,, & x > 0\,, \\[2ex] -\dfrac{2x^5 - x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 6x + 1}{(x^2+1)^2(x^2+x+1)^2}\,, & x < 0\,. \end{cases}$$

Lo studio del segno della derivata seconda risulta essere complesso e pertanto viene omesso.

Il grafico della funzione viene tracciato approssimativamente nella Figura 9.

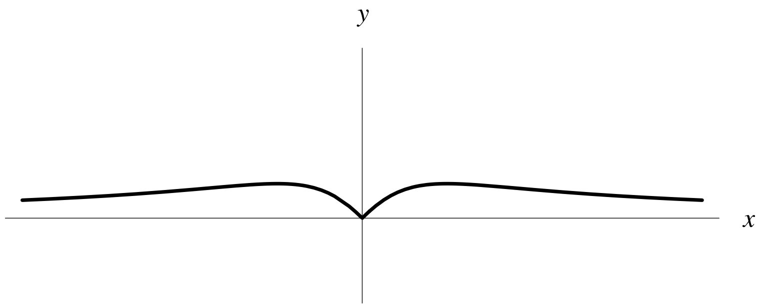

Figura 9: *Grafico della funzione del 3 luglio 2006, traccia A.*

2. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \log\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\log x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \log x \, \log\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

e tenendo presente che $\log x$ è un infinito di ordine arbitrariamente piccolo mentre $\log(1+1/x)$ è un infinitesimo di ordine 1 per $x \to +\infty$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \log\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\log x}\right) = 0 \, .$$

Poiché la funzione coseno è limitata, anche il limite assegnato è uguale a 0.

3. Integrando per parti, si ha

$$\int x^2 \arctan x \, dx = \frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{1+x^2} \, dx \, .$$

Effettuando la divisione dei polinomi x^3 e $1+x^2$ si ottiene

$$\frac{x^3}{1+x^2} = x - \frac{x}{x^2+1}$$

e quindi

$$\int \frac{x^3}{1+x^2} \, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c \, , \qquad c \in \mathbb{R} \, .$$

Allora, si conclude

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 \arctan x \, dx &= \left[\frac{x^3}{3} \arctan x\right]_0^1 - \frac{1}{3} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \log(1 + x^2)\right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} + \frac{\log 2}{6} \,.\end{aligned}$$

Facoltà di Ingegneria
Prova scritta di Analisi Matematica 1
Classe Industriale

3 luglio 2006, traccia B

1. Studiare la seguente funzione e tracciarne approssimativamente il grafico
$$f(x) = \exp\left(\frac{|x|}{x^2 - 1}\right) \ .$$

2. Studiare il seguente limite
$$\lim_{x \to 0} \frac{\log\left((1+x)^{\sin x}\right)}{\sqrt[3]{\cos x} - 1} \ .$$

3. Calcolare il seguente integrale definito
$$\int_0^1 x^2 \ \arcsin x \, dx \ .$$

Soluzione del 3 luglio 2006, traccia B

1. L'insieme di definizione si ottiene imponendo la condizione $x^2 - 1 \neq 0$ e quindi la funzione è definita in $X_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. L'insieme di definizione è simmetrico e si verifica facilmente che la funzione è pari. Inoltre essa non è periodica.

   Per quanto riguarda il segno, la funzione è ovviamente strettamente positiva.

   Inoltre, la funzione è continua e quindi può ammettere asintoti verticali solo nei punti ± 1, nei quali si ha

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty\ , \qquad \lim_{x \to -1^+} f(x) = 0\ , \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = 0\ , \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty\ ,$$

   e quindi la retta di equazione $x = -1$ è un asintoto verticale a sinistra in alto per f e la retta di equazione $x = 1$ è un asintoto verticale a destra in alto per f.

   Poiché $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \exp 0 = 1$, la retta di equazione $y = 1$ è un asintoto orizzontale a destra e a sinistra per f.

   La funzione valore assoluto non è derivabile quando il suo argomento si annulla e quindi si può affermare che f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ e, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp\left(\frac{|x|}{x^2 - 1}\right) \frac{\dfrac{|x|}{x}(x^2 - 1) - 2x|x|}{(x^2 - 1)^2} \\ &= -\exp\left(\frac{|x|}{x^2 - 1}\right) \frac{|x|}{x} \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}\ . \end{aligned}$$

   Nel punto 0 si ha

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -1\ , \qquad \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 1\ ,$$

   e quindi 0 è un punto angoloso per f con $f'_+(0) = -1$ e $f'_-(0) = 1$.

   Il segno della derivata prima di f dipende solo da $-x$ ed è strettamente positivo in $]-\infty, -1[\cup]-1, 0[$ e strettamente negativo in $]0, 1[\cup]1, +\infty[$. Quindi f è strettamente crescente in $]-\infty, -1[$ e in $]-1, 0]$ e strettamente decrescente in $[0, 1[$ e in $]1, +\infty[$. Il punto 0 è di massimo relativo per f e si ha $f(0) = 1$. Tenendo presente l'esistenza degli asintoti verticali, si può affermare che la funzione non è limitata superiormente; il suo estremo inferiore è 0 (in quanto è sempre strettamente positiva e tende a 0 da destra in -1 e da sinistra in 1) e poiché non si annulla mai, 0 non è il minimo di f.

Infine, f è derivabile due volte in $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ e si ha, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$,

$$f''(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right) \dfrac{2x^5 + x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 6x + 1}{(x^2-1)^4} \, , & x > 0 \, , \\ \exp\left(-\dfrac{x}{x^2-1}\right) \dfrac{2x^5 - x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 6x - 1}{(x^2-1)^4} \, , & x < 0 \, . \end{cases}$$

Lo studio del segno della derivata seconda risulta essere complesso e pertanto viene omesso.

Il grafico della funzione viene tracciato approssimativamente nella Figura 10.

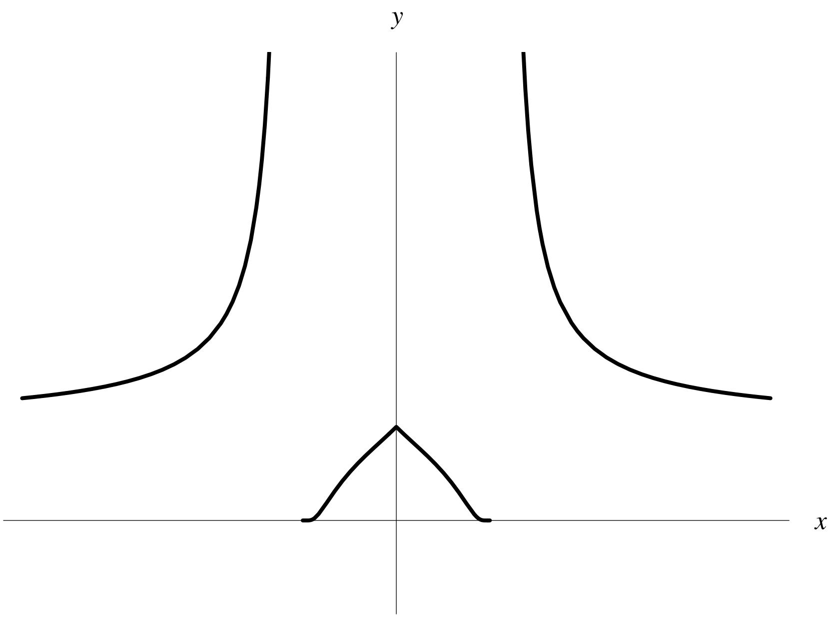

Figura 10: *Grafico della funzione del 3 luglio 2006, traccia B.*

2. Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\log\left((1+x)^{\sin x}\right)}{\sqrt[3]{\cos x} - 1} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x \ \log(1+x)}{\sqrt[3]{1 + (\cos x - 1)} - 1} \\ &= -\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \, \frac{\log(1+x)}{x} \, \frac{x^2}{1-\cos x} \, \frac{\cos x - 1}{\sqrt[3]{1 + (\cos x - 1)} - 1} \\ &= -1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \, .\end{aligned}$$

3. Integrando per parti, si ha

$$\int x^2 \arcsin x \, dx = \frac{x^3}{3} \arcsin x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \, .$$

Posto $t = \sqrt{1-x^2}$, si ha $-2x\,dx = 2t\,dt$ e

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \, dx &= \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, x \, dx \\ &= -\int \frac{1-t^2}{t} \, t \, dt = t - \frac{t^3}{3} + c \\ &= \sqrt{1-x^2} - \frac{\sqrt{1-x^2}\,(1-x^2)}{3} + c \, , \qquad c \in \mathbb{R} \, . \end{aligned}$$

Allora, si conclude

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 \arcsin x \, dx &= \left[\frac{x^3}{3} \arcsin x \right]_0^1 \\ &\quad -\frac{1}{3} \left[\sqrt{1-x^2} - \frac{\sqrt{1-x^2}\,(1-x^2)}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{9} \, . \end{aligned}$$