

Facoltà di Ingegneria
CdL Ingegneria Informatica

Prova scritta di Analisi Matematica I – COMPITO A

Lecce, 11.12.2007

La parte obbligatoria del compito è fatta dagli esercizi numerati da 1 a 4. L'esercizio facoltativo può essere svolto solo dopo aver svolto completamente i primi quattro esercizi e il suo mancato svolgimento non compromette la valutazione.

1. Data la funzione $f : [-3, 3] \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}$ disegnarne il grafico. In particolare trovare, se esistono, il massimo e il minimo assoluto e studiare la derivata prima di f , descrivendo il comportamento nei punti, se esistono, di non derivabilità.

Disegnare qualitativamente, il grafico di $x \mapsto f(|x|)$, $x \in [-3, 3]$.

2. Studiare il seguente limite al variare del parametro $\alpha \in [0, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha + \log(\cos^2 x)}{\log(1 + \sin(x^2 + x^4))}.$$

3. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e - e^{\cos \frac{1}{n}} \right).$$

4. Fattorizzare in \mathbf{R} (cioè come prodotto di fattori irriducibili in \mathbf{R}) il polinomio

$$p(x) = x^6 + 1.$$

ESERCIZIO FACOLTATIVO - La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge. Esibire un esempio di una funzione che sia asintotica a $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ all'infinito, cioè una funzione f tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}{f(n)} = \lambda \quad (\lambda \in \mathbf{R}_+).$$

Facoltà di Ingegneria
CdL Ingegneria Informatica

Prova scritta di Analisi Matematica I – COMPITO B

Lecce, 11.12.2007

La parte obbligatoria del compito è fatta dagli esercizi numerati da 1 a 4. L'esercizio facoltativo può essere svolto solo dopo aver svolto completamente i primi quattro esercizi e il suo mancato svolgimento non compromette la valutazione.

1. Data la funzione $f : [-4, 4] \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $f(x) = \sqrt[5]{(x+3)(x+2)^2}$ disegnarne il grafico. In particolare trovare, se esistono, il massimo e il minimo assoluto e studiare la derivata prima di f , descrivendo il comportamento nei punti, se esistono, di non derivabilità.

Disegnare qualitativamente, il grafico di $x \mapsto f(|x|)$, $x \in [-4, 4]$.

2. Studiare i seguenti limiti al variare del parametro $\alpha \in [0, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + \operatorname{arctg} x^2 + \operatorname{arctg} x^4)}{x^\alpha + 4(\sqrt{\cos x} - 1)}$$

3. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\log(\sqrt{n} + 1) - \log \sqrt{n+1}].$$

4. Fattorizzare in \mathbf{R} (cioè come prodotto di fattori irriducibili in \mathbf{R}) il polinomio

$$p(x) = x^8 + 1.$$

ESERCIZIO FACOLTATIVO - La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge. Trovare una funzione f asintotica a $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ all'infinito, cioè una funzione f tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{f(n)} = \lambda \quad (\lambda \in \mathbf{R}_+).$$

Facoltà di Ingegneria
CdL Ingegneria Informatica

Prova scritta di Analisi Matematica I – COMPITO A

Lecce, 10.1.2008

La parte obbligatoria del compito è fatta dagli esercizi numerati da 1 a 4. L'esercizio facoltativo può essere svolto solo dopo aver svolto completamente i primi quattro esercizi; il suo mancato svolgimento non altera la valutazione.

Non è consentito l'uso di calcolatrici, calcolatori, testi o appunti.

1. Data la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{|x|} e^{\frac{1-x}{2-x}}$$

studiarla limitatamente a x compreso tra -1 e 2 . Disegnarne il grafico, trovare, se esistono, il massimo e il minimo assoluto e studiare la derivata prima di f , descrivendo il comportamento nei punti, se esistono, di non derivabilità studiando i limiti destro e sinistro della derivata prima; fare l'analogo negli estremi dell'intervallo.

Una volta tracciato il grafico di f , tracciare, qualitativamente, il grafico di $x \mapsto \log f(x)$.

2. Calcolare

$$\int \frac{1}{2x + 2\sqrt{x} + 5} dx$$

3. Studiare il seguente integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \log\left(3 - 2 \cos \frac{1}{x}\right) dx$$

4. Dato il polinomio $p(z) = z^5 + 3z^3 - 1$ e dette z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 le soluzioni complesse di $p(z) = 0$, calcolare $\text{Im}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5)$ e $\text{Re}(i(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5))$.

ESERCIZIO FACOLTATIVO - Calcolare l'ordine di infinitesimo in 0 della funzione

$$f(x) = \int_0^x (e^{t^2} - \cos t) dt.$$

Facoltà di Ingegneria
CdL Ingegneria Informatica
Prova scritta di Analisi Matematica I

Lecce, 19.3.2008

La parte obbligatoria del compito è fatta dagli esercizi numerati da 1 a 4. L'esercizio facoltativo può essere svolto solo dopo aver svolto completamente i primi quattro esercizi; il suo mancato svolgimento non altera la valutazione.

Non è consentito l'uso di calcolatrici, calcolatori, testi o appunti.

1. Studiare la funzione

$$f(x) = \operatorname{arctg} \left| \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1} \right|.$$

In particolare trovare, se esistono, il massimo e il minimo assoluto e studiare la derivata prima di f , descrivendo il comportamento nei punti, se esistono, di non derivabilità studiando i limiti destro e sinistro della derivata prima; fare l'analogo negli estremi dell'intervallo (se questi sono finiti).

Disegnare poi, qualitativamente, il grafico di $x \mapsto \operatorname{sen} f(x)$.

2. Calcolare

$$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{2-x}{2x}} dx.$$

3. Studiare il seguente integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{1}{\log\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)} dx.$$

4. Scrivere lo sviluppo di Taylor nel punto 0 fino all'ordine quattro della seguente funzione

$$f(x) = \log(2 - \cos^2 x).$$

ESERCIZIO FACOLTATIVO - Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x \log\left(t + e^t + \operatorname{sen} \frac{1}{t}\right) dt}{\int_0^x t \operatorname{arctg} t dt}.$$

Facoltà di Ingegneria
CdL Ingegneria Informatica
Prova scritta di Analisi Matematica I

Lecce, 8.4.2008

Non è consentito l'uso di calcolatrici, calcolatori, testi o appunti.

1. Studiare dettagliatamente la funzione

$$f(x) = x e^{\frac{1}{\log|x|}}$$

al variare di x tra -1 e 1 . Dopodiché studiare e disegnare $|f|$ nello stesso dominio.

Infine, utilizzando solamente il grafico di f e sempre nello stesso dominio, disegnare qualitativamente il grafico di

$$x \mapsto \frac{1}{f(x) + 4}.$$

2. Scrivere lo sviluppo di Taylor fino al sesto ordine nel punto $x = 0$ della funzione

$$f(x) = \sqrt{1 + \sin^3 x}.$$

3. Studiare la convergenza della serie al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha + 3)^n}{3^n + \log n} \operatorname{arctg} \frac{3}{n}.$$

4. Dire per quali numeri complessi z è verificata l'uguaglianza

$$|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| = |z|.$$

Facoltà di Ingegneria
CdL Ingegneria Informatica
Prova scritta di Analisi Matematica I

Lecce, 1° luglio 2008

Non è consentito l'uso di calcolatrici, calcolatori, testi o appunti.

1. Studiare dettagliatamente la funzione

$$f(x) = e^{\frac{|x+2|}{x+3}}$$

trovandone il dominio massimale.

Utilizzando solamente il grafico di f disegnare qualitativamente il grafico di

$$x \mapsto \frac{1}{f(x) - \frac{1}{2}}.$$

2. Studiare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\alpha x - \log(1+x)^2}{x^4 + x^\alpha}$$

al variare di $\alpha > 0$.

3. Dire se il seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^4 dx$$

converge. In tal caso, calcolarne il valore.

4. Trovare i numeri complessi che risolvono l'equazione

$$z^2 \bar{z} + 2z - 3\bar{z}^{-1} = 0.$$

Facoltà di Ingegneria
CdL Ingegneria Informatica
Prova scritta di Analisi Matematica I

Lecce, 15.7.2008

Non è consentito l'uso di calcolatrici, calcolatori, testi o appunti.

1. Studiare dettagliatamente la funzione

$$f(x) = \left| x + \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x} \right|$$

trovandone il dominio massimale.

Utilizzando solamente il grafico di f disegnare qualitativamente il grafico di

$$x \mapsto \frac{1}{f(x) - 1}.$$

2. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\sqrt{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} + n} - \sqrt{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} - n} \right]$$

3. Calcolare il seguente limite al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ (log denota il logaritmo in base naturale)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\operatorname{sen} \frac{1}{x} \right] \cdot \left[\log (3x^\alpha + e^{\alpha x}) \right].$$

4. Trovare, se esistono, le radici complesse soddisfacenti l'equazione

$$\bar{z}^2 = z^5.$$

Facoltà di Ingegneria
CdL Ingegneria Informatica
Prova scritta di Analisi Matematica I

Lecce, 9.9.2008

Non è consentito l'uso di calcolatrici, calcolatori, testi o appunti.

1. Studiare dettagliatamente la funzione

$$f(x) = x + 4 \operatorname{arctg} \sqrt{|x-1|}$$

trovandone il dominio massimale.

Utilizzando solamente il grafico di f disegnare qualitativamente il grafico di

$$x \mapsto \frac{1}{f(x+1) - x + 2}.$$

2. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[e^{\frac{1}{2n^2}} + \cos\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - 2 \right] \sqrt{n}.$$

3. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2}{(|x-3|(x+3))} dx.$$

4. Trovare, se esistono, le radici complesse soddisfacenti l'equazione

$$(z^2 + (1 - 2i)z - i)^2 = -1.$$