

Facoltà di Ingegneria
CdL Ingegneria Gestionale - Sede di Brindisi
Prova scritta di Analisi Matematica I – COMPITO A

Mesagne, 10.12.2007

La parte obbligatoria del compito è fatta dagli esercizi numerati da 1 a 4. L'esercizio facoltativo può essere svolto solo dopo aver svolto completamente i primi quattro esercizi.

1. Data la funzione

$$f : [-4, 4] \longrightarrow \mathbf{R}$$
$$x \longmapsto \sqrt[7]{(x+1)(x-2)^2},$$

calcolarne la derivata e descrivere il comportamento nei punti di non derivabilità studiando le derivate destra e sinistra.

Disegnare qualitativamente il grafico di $x \mapsto f(|x|)$.

2. Studiare il seguente limite al variare del parametro $\alpha \in [0, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{5}{6}} - (1 + \frac{5}{3}x)^{\frac{1}{2}}}{x^\alpha + 2 \cos x - 2}.$$

3. Studiare la convergenza della serie al variare del parametro $\alpha \in [0, +\infty)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\operatorname{sen} \left(\pi - \frac{1}{n^\alpha} \right) \right] \left[\sqrt{1+n^2} - n \right]$$

al variare di $\alpha > 0$.

4. Fattorizzare in \mathbf{R} il polinomio

$$p(x) = x^8 + 1.$$

ESERCIZIO FACOLTATIVO - La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge. Esibire un esempio di una funzione che sia asintotica a $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ all'infinito, cioè una funzione f tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{f(n)} = \lambda \quad (\lambda \in \mathbf{R}_+).$$

Facoltà di Ingegneria
CdL Ingegneria Gestionale - Sede di Brindisi

Prova scritta di Analisi Matematica I – COMPITO B

Mesagne, 10.12.2007

La parte obbligatoria del compito è fatta dagli esercizi numerati da 1 a 4. L'esercizio facoltativo può essere svolto solo dopo aver svolto completamente i primi quattro esercizi.

1. Data la funzione

$$f : [-4, 4] \longrightarrow \mathbf{R}$$
$$x \longmapsto \sqrt[5]{(x+1)^2(x-2)},$$

calcolarne la derivata e descrivere il comportamento nei punti di non derivabilità studiando le derivate destra e sinistra.

Disegnare qualitativamente il grafico di $x \mapsto f(|x|)$.

2. Studiare il seguente limite al variare del parametro $\alpha \in [0, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x^2 + \sinh x^2 - \cos x - \alpha x^2}{x^4}.$$

3. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - \log \left(e \cos \frac{1}{n} \right) \right].$$

4. Fattorizzare in \mathbf{R} il polinomio

$$p(x) = x^6 - x^3 + 1.$$

ESERCIZIO FACOLTATIVO - La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge. Esibire un esempio di una funzione che sia asintotica a $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ all'infinito, cioè una funzione f tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{f(n)} = \lambda \quad (\lambda \in \mathbf{R}_+).$$

Facoltà di Ingegneria
CdL Ingegneria Gestionale - Sede di Brindisi

Prova scritta di Analisi Matematica I – COMPITO A

Mesagne, 9.1.2008

La parte obbligatoria del compito è fatta dagli esercizi numerati da 1 a 4. L'esercizio facoltativo può essere svolto solo dopo aver svolto completamente i primi quattro esercizi; il suo mancato svolgimento non altera la valutazione.

Non è consentito l'uso di calcolatrici, calcolatori, testi o appunti.

1. Studiare la funzione

$$f : (-1, +\infty) \longrightarrow \mathbf{R}$$
$$x \longmapsto \frac{2|x|-x^2-x}{x+1},$$

disegnarne il grafico qualitativo, studiando in particolare la derivata prima e il comportamento di f negli eventuali punti di non derivabilità studiando le derivate destra e sinistra.

Disegnare qualitativamente il grafico di $x \mapsto \arctg(f(x))$, $x \in (-1, +\infty)$.

2. Scrivere lo sviluppo di Taylor fino al quarto ordine nel punto 0 della funzione $f(x) = \log(3 - 2 \cos^2 x)$.
3. Studiare al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha - 1)^n}{5^n + n^3} \log \left(1 + \frac{3}{n} \right).$$

4. Dato il polinomio $p(z) = z^5 - 5z^3 + 1$ e dette z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 le soluzioni complesse di $p(z) = 0$, calcolare $\text{Im}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5)$ e $\text{Re}(i(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5))$.

ESERCIZIO FACOLTATIVO - Calcolare l'ordine di infinitesimo in 0 della funzione

$$f(x) = \int_0^x (e^{t^2} - \cos t) dt.$$

Facoltà di Ingegneria
CdL Ingegneria - Sede di Brindisi
Prova scritta di Analisi Matematica I

Mesagne, 9.4.2008

Non è consentito l'uso di calcolatrici, calcolatori, testi o appunti.

1. Data la funzione

$$f : [-2, 1) \longrightarrow \mathbf{R}$$
$$x \longmapsto x + \log \left(1 + \frac{|x|}{|x-1|} \right),$$

calcolarne la derivata e descrivere il comportamento nei punti di non derivabilità studiando le derivate destra e sinistra.

Infine, utilizzando solamente il grafico di f e sempre nello stesso dominio, disegnare qualitativamente il grafico di $x \mapsto e^{f(x)}$.

2. Scrivere lo sviluppo di Taylor fino al sesto ordine nel punto $x = 0$ della funzione

$$f(x) = \sqrt{1 + \sin^3 x}.$$

3. Calcolare

$$\int_1^3 \sqrt{3 + |x^2 - 4|} dx$$

4. Trovare, se esistono, le soluzioni al seguente sistema

$$\begin{cases} (z - i)^6 + 1 = 0 \\ |z| = 2 \end{cases}$$

Facoltà di Ingegneria
CdL Ingegneria - Sede di Brindisi
Prova scritta di Analisi Matematica I

Mesagne, 23.4.2008

Non è consentito l'uso di calcolatrici, calcolatori, testi o appunti.

1. Studiare la funzione

$$f(x) = \left| \frac{3 - \sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2} + 1} \right|.$$

In particolare trovare, se esistono, il massimo e il minimo assoluto e studiare la derivata prima di f , descrivendo il comportamento nei punti, se esistono, di non derivabilità studiando i limiti destro e sinistro della derivata prima; fare l'analogo negli estremi dell'intervallo (se questi sono finiti).

Infine, utilizzando solamente il grafico di f e sempre nello stesso dominio, disegnare qualitativamente il grafico di

$$x \mapsto \cos \frac{f(x)}{2}.$$

2. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2 - 2x - 8)^2 \log(3+x)}{(\log(x^2 + 4x + 5)) (\operatorname{arctg}(x+2))}$$

3. Studiare la convergenza della seguente serie al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\sum_n \left(e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n^\alpha} \right)$$

4. Trovare le coppie di numeri complessi (z, w) tali che

$$\begin{cases} z + w = 1 + i \\ zw = i \end{cases}$$

Facoltà di Ingegneria
CdL Ingegneria - Sede di Brindisi
Prova scritta di Analisi Matematica I

Mesagne, 30.6.2008

Non è consentito l'uso di calcolatrici, calcolatori, testi o appunti.

1. Studiare dettagliatamente la funzione

$$f(x) = e^{\frac{|x-1|}{x}}$$

trovandone il dominio massimale.

Utilizzando solamente il grafico di f disegnare qualitativamente il grafico di

$$x \mapsto \frac{1}{f(x) - 1}.$$

2. Studiare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\sqrt{(\log 2)^n + n} - \sqrt{(\log 2)^n - n} \right]$$

3. Calcolare lo sviluppo di Taylor fino all'ordine 4 attorno al punto $x_0 = 0$ della funzione

$$f(x) = \log \left(\frac{1+x}{1+3x^2} \right).$$

4. Trovare i numeri complessi che risolvono l'equazione

$$z^2 \bar{z} + 2z - 3 \frac{1}{\bar{z}} = 0.$$

(*) Nel testo c'era un errore: sostituire $\log 2$ con $\log 3$ in entrambi i termini.

Facoltà di Ingegneria
CdL Ingegneria - Sede di Brindisi
Prova scritta di Analisi Matematica I

Mesagne, 16.7.2008

Non è consentito l'uso di calcolatrici, calcolatori, testi o appunti.

1. Studiare dettagliatamente la funzione

$$f(x) = \left| 2x + \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{2x} \right|$$

trovandone il dominio massimale.

Utilizzando solamente il grafico di f disegnare qualitativamente il grafico di

$$x \mapsto \frac{1}{f(x) - 1}.$$

2. Studiare la convergenza della serie al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{\alpha}{n} - \log \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^2 \right] n^{\alpha^2/4}$$

3. Calcolare il seguente integrale

$$\int x^{-3/2} \log(1 + x^{3/2}) dx.$$

4. Trovare i numeri complessi z che risolvono la seguente equazione

$$\bar{z}^2 = z^5.$$

Facoltà di Ingegneria
CdL Ingegneria - Sede di Brindisi
Prova scritta di Analisi Matematica I

Mesagne, 10.9.2008

Non è consentito l'uso di calcolatrici, calcolatori, testi o appunti.

1. Studiare dettagliatamente la funzione

$$f(x) = 4 \operatorname{arctg} \sqrt{|x+1|} - x$$

trovandone il dominio massimale.

Utilizzando solamente il grafico di f disegnare qualitativamente il grafico di

$$x \mapsto \frac{1}{f(x-1) + x + 2}.$$

2. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \cos\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - 2 \right] \sqrt{n}.$$

3. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2}{(|x-2|(x+2))} dx.$$

4. Trovare, se esistono, le radici complesse soddisfacenti l'equazione

$$(z^2 + (1 - 2i)z - i)^2 = -1.$$