Facoltà di Ingegneria

CdL Ingegneria Civile

Prova scritta di Fondamenti di Analisi Matematica I
COMPITO A

Padova, 27.1.2012

1. Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x^3} + x - 1\,.$$

2.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{1 + \alpha x + x^2 + 3x^3} - \cos(\alpha\sqrt{x})}$$

3. Studiare il carattere della serie

$$\sum_n ((a^2)^{1/n} - a^{1/n})^\alpha$$

al variare dei parametri $a > 0, \alpha > 0$.

4. Calcolare il seguente integrale

$$\int_{\log 2}^{\log 7} \frac{e^{3x} - e^x}{e^{3x} + e^{2x} + e^x}\,dx$$

e, se possibile, calcolare anche il seguente, altrimenti limitarsi a studiarne la convergenza:

$$\int_{\log 2}^{+\infty} \frac{e^{3x} - e^x}{e^{3x} + e^{2x} + e^x}\,dx\,.$$

Facoltà di Ingegneria

CdL Ingegneria Civile

Prova scritta di Fondamenti di Analisi Matematica I
COMPITO B

Padova, 27.1.2012

1. Studiare la funzione

$$f(x) = 1 - \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x} - \sqrt{1+x^2}\,.$$

2. Studiare il seguente limite al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ $(\log = \log_e)$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\alpha x + x^2 - 2x^3) + 1 - e^{\alpha^2 x}}{\mathrm{tg}\, x^2}$$

3. Studiare la serie al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\sum_k \left(\frac{k^2 + 3k + \alpha}{k^2 + 3k + \mathrm{sen}\,\frac{1}{k}} \right)^{k^3}$$

4. Calcolare il seguente integrale

$$\int_{e^2}^{e^5} \frac{\log^2 x - 1}{x \log^3 x + x \log^2 x + x \log x}\, dx$$

e, se possibile, calcolare anche il seguente, altrimenti limitarsi a studiarne la convergenza:

$$\int_{e^2}^{+\infty} \frac{\log^2 x - 1}{x \log^3 x + x \log^2 x + x \log x}\, dx\,.$$

Facoltà di Ingegneria

CdL Ingegneria Civile

Prova scritta di Fondamenti di Analisi Matematica I
COMPITO A

Padova, 17.2.2012

1. Data la funzione $f : [-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$ definita dall'espressione

$$f(x) = \sqrt{|\operatorname{sen} x\,(1 - \operatorname{sen} x)|}$$

studiarne **in dettaglio** la derivata prima dopodiché tracciarne un grafico qualitativo (utilizzando solo le informazioni riguardanti f e la sua derivata prima).

2. Utilizzando gli sviluppi di Taylor si studino i seguenti limiti:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1 - x - (\cos\sqrt{x})^2}{x + x^2 + x^3}$,

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1 - x + \frac{1}{3}x^2 - (\cos\sqrt{x})^2}{x^{5/2}}\ \operatorname{sen}\frac{1}{x}$.

3. Si studino le serie

   (a) $\displaystyle\sum_n \left(\sqrt[4]{1 + \frac{4}{n^4}} - 1\right) n^2\sqrt{n^2+1}$

   (b) $\displaystyle\sum_n \left[\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{\beta} - \left(1 + \frac{\beta}{n}\right)^{\alpha}\right]$ al variare del parametri $\alpha, \beta \in [0, 1]$

4. Si calcolino i seguenti integrali e si risponda alla domanda

   (a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$,

   (b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x^2-1|}}\,dx$.

   (c) Esiste una funzione continua $f : (0, 2) \to \mathbf{R}$ tale che $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x^2-1|}}$ in $(0, 1) \cup (1, 2)$?

Facoltà di Ingegneria

CdL Ingegneria Civile

Prova scritta di Fondamenti di Analisi Matematica I
COMPITO B

Padova, 17.2.2012

1. Data la funzione $f : [\pi/2, 5\pi/2] \to \mathbf{R}$ definita dall'espressione
$$f(x) = \sqrt{|\cos x\,(1 - \cos x)|}$$
studiarne **in dettaglio** la derivata prima dopodiché tracciarne un grafico qualitativo (utilizzando solo le informazioni riguardanti f e la sua derivata prima).

2. Utilizzando gli sviluppi di Taylor si studino i seguenti limiti:
   (a) $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \frac{3 + 3x - e^{2\sqrt{x}} - 2e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x} + x + x^2},$
   (b) $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \frac{3 + 3x + \frac{7}{6}x^{3/2} - e^{2\sqrt{x}} - 2e^{-\sqrt{x}}}{x^{3/2}} \ \operatorname{sen}\frac{1}{x}\,.$

3. Si studino le serie
   (a) $\displaystyle \sum_n \frac{n^2 \log\left(1 + \frac{4}{n^4}\right)}{\sqrt{n^2+1}}$
   (b) $\displaystyle \sum_n \left[\log\left(\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{\beta}\right) - \log\left(\left(1 + \frac{\beta}{n}\right)^{\alpha}\right)\right]$
   al variare del parametri $\alpha, \beta \in [0, 1]$.

4. Si calcolino i seguenti integrali e si risponda alla domanda
   (a) $\displaystyle \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx,$
   (b) $\displaystyle \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x^2-1|}}\,dx.$
   (c) Esiste una funzione continua $f : (0, 2) \to \mathbf{R}$ tale che $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x^2-1|}}$ in $(0, 1) \cup (1, 2)$?

Facoltà di Ingegneria

CdL Ingegneria Civile

Prova scritta di Fondamenti di Analisi Matematica I

Padova, 5.7.2012

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **motivare** le risposte.

Prima di svolgere gli eventuali punti (b) si svolgano prima i punti (a) di ogni singolo esercizio.

1. (a) Studiare la funzione f definita dall'espressione

$$f(x) = |x|\big(1 + \log|x|\big)^2 ,$$

tracciandone un grafico qualitativo.

(b) Determinare gli eventuali valori di α nell'insieme $(0, +\infty)$ per i quali la funzione

$$f_\alpha(x) = |x|^\alpha\big(1 + \log|x|\big)^2$$

risulti C^1 su $\mathbf{R}$ o possa essere estesa ad una funzione $C^1(\mathbf{R})$.

2. Si studi il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} \ .$$

3. Dire se esistono, finiti o infiniti, il seguenti limiti:

(a) $\displaystyle\lim_{c\to 0+} \int_c^{\pi/2} \frac{\cos x}{x^{5/2}}\, dx, \qquad \lim_{c\to 0+} \int_c^{\pi/2} \frac{\cos x\ \log(1+x)}{e^x\sqrt{x^5 + x^{10}}}\, dx,$

(b) $\displaystyle\lim_{c\to 0+} \left[\int_c^{\pi/2} \frac{\cos x}{x^{5/2}}\, dx - \frac{2}{3}\frac{\cos c}{c^{3/2}}\right]$

4. Si calcolino i seguenti integrali

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2\operatorname{sen} t\cos t}{\operatorname{sen}^2 t + \cos t + 2}\, dt\,, \qquad \int_0^{\pi} \frac{2\operatorname{sen} t\cos t}{\operatorname{sen}^2 t + |\cos t| + 2}\, dt\,.$$

Facoltà di Ingegneria

CdL Ingegneria Civile

Prova scritta di Fondamenti di Analisi Matematica I

Padova, 20.9.2012

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **motivare** le risposte.

1. Data la funzione f definita dall'espressione

$$f(x) = x^{1/3}\bigl(x^2 + 2x - 3\bigr)^{2/3},$$

trovarne il dominio massimale e studiarne in **dettaglio** la derivata prima. Dopodiché (con il solo ausilio dello studio della derivata prima) tracciarne un grafico qualitativo.

2. Si studi il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^{1/3}\bigl(x^2 + 2x - 3\bigr)^{2/3} - x^{5/3}\right).$$

3. Si studi la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2 - \log\left(1 + n^2\right)\right)\left(\frac{1}{n^2} - \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\right).$$

4. Dire se esistono, finiti o infiniti, i seguenti integrali:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 2x - 3}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{1}{x^{1/3}\bigl(x^2 + 2x - 3\bigr)^{2/3}}\,dx.$$