COMPITO A

1. Studiare $f(x) = \sqrt{x^2 - x^3} + x - 1$

f è definita per $x^2 - x^3 \geq 0$,

cioè per $x \leq 1$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} |x| \sqrt{1-x} + x - 1 = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{2x - 3x^2}{2\sqrt{x^2 - x^3}} + 1$$ definita per $x \neq 0$, $x \neq 1$

$f'(x) = 0$ sse $2x - 3x^2 + 2\sqrt{x^2 - x^3} = 0$

sse $4(x^2 - x^3) = 9x^4 - 12x^3 + 4x^2$

sse $x^3(9x - 8) = 0$

sse $x = 8/9$

$f'(x) > 0$ sse $2x - 3x^2 + 2\sqrt{x^2 - x^3} > 0$

sse $\begin{cases} 4x^2 - 4x^3 > 4x^2 + 9x^4 - 12x^3 \\ 3x^2 - 2x \geq 0 \end{cases}$

oppure $3x^2 - 2x < 0$

$$\begin{cases} x^3(9x-8) < 0 \\ x\,(3x-2) \geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x\,(3x-2) \leq 0 \\ \end{cases}$$

~~Segno~~ $x^3(9x-8) > 0$ per $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{8}{9}, 1\right)$

$x\,(3x-2) > 0$ per $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, 1\right)$

$= 0$ per $x = 0$, $x = 2/3$

Concludendo:

$$f'(x) > 0 \quad \text{per} \quad x \in \left[2/3, 8/9\right) \cup \left(0, 2/3\right) = \left(0, 8/9\right)$$

Riassumendo: (vedi ⊛)

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 2$$

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0$$

$f'(x) > 0$ in $\left(0, 8/9\right)$

$f'(x) = 0$ per $x = 8/9$

$f'(x) < 0$ in $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{8}{9}, 1\right)$

in $x = 0$ f' non è definita.

$$f'(x) = \frac{x\,(2-3x)}{2|x|\sqrt{1-x}} + 1 \qquad ⊛$$

$$f''(x) = \frac{1}{4(x^2-x^3)}\left[(2-6x)\,2\sqrt{x^2-x^3} - \frac{(2x-3x^2)^2}{\sqrt{x^2-x^3}}\right]$$

$$f''(x) > 0 \quad \text{sse} \quad (2-6x)\,2\sqrt{x^2-x^3} > \frac{(2x-3x^2)^2}{\sqrt{x^2-x^3}}$$

$$\text{sse} \quad 2(2-6x)(x^2-x^3) > (2x-3x^2)^2$$

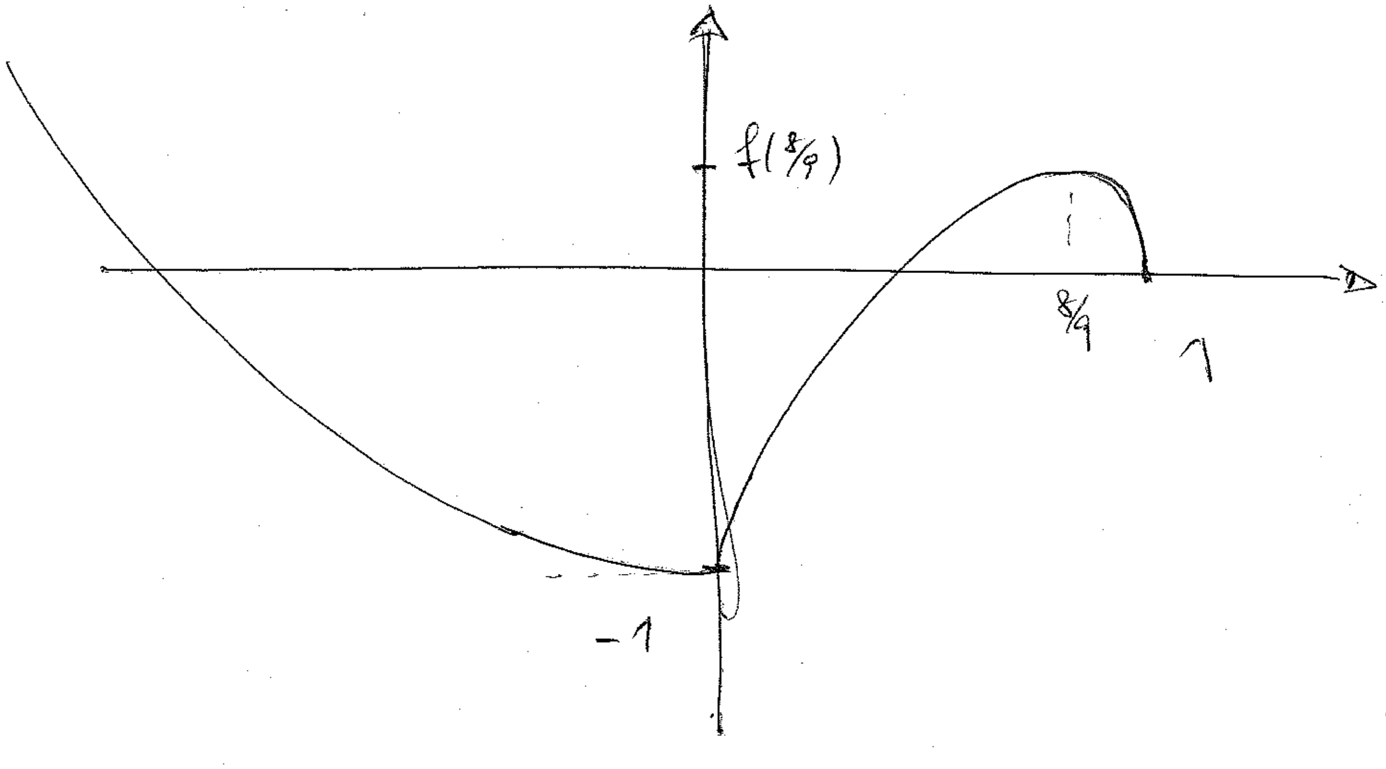
$$\text{sse} \quad 3x^4-4x^3 = x^3(3x-4) > 0$$

$3x-4 > 0$ per $x > 4/3$

$x^3 > 0$ per $x > 0$

quindi $f''(x) > 0$ per $x < 0$

$f''(x) < 0$ per $x \in (0,1)$



3.

$$\sqrt{1+\alpha x+x^2+3x^3} - \cos(\alpha\sqrt{x}) =$$

$$= 1 + \frac{\alpha}{2}x + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{8}\left(\alpha x + x^2 + 3x^3\right)^2 +$$

$$+ o(x^2)$$

$$- \left[1 - \frac{\alpha^2 x}{2} + \frac{\alpha^4 x^2}{4!} + o(x^2)\right] =$$

$$= \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{2}\right)x + \frac{x^2}{2} - \frac{\alpha^2}{8}x^2 + \frac{\alpha^4}{4!}x^2 + o(x^2)$$

Per $\alpha = -1$ diventa : $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4!}\right)x^2 + o(x^2)$

il limite ha allora come risultato :

$$\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4!}} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$$

Il caso $\alpha = 0$ va studiato a parte :

a denominatore si ha semplicemente

$$\sqrt{1+x^2+3x^3} - \cos 0 =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - 1 = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

Il limite ha come risultato 2.

2. Studiare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{1+\alpha x+x^2+3x^3} - \cos(\alpha\sqrt{x})}$$

Sviluppando al primo ordine

$$\sqrt{1+\alpha x+x^2+3x^3} = 1+\frac{\alpha}{2}x+\frac{x^2+3x^3}{2} + o(\alpha x+x^2+3x^3)$$

$$= 1+\frac{\alpha}{2}x+o(x)$$

se $\alpha \neq 0$

$$\cos(\alpha\sqrt{x}) = 1-\frac{\alpha^2}{2}x+o(x)$$

Per $\alpha\neq 0$ si ha a denominatore:

$$\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{2}\right)x + o(x)$$

Se $\alpha \neq -1$ il limite è 0.

Se $\alpha = -1$ $\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{2} = 0$ e bisogna sviluppare ulteriormente.

$$\sqrt{1 - x + x^2 + 3x^3} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}\left(-x + x^2 + 3x^3\right)^2 +$$

$$+ o\left(\left(-x + x^2 + 3x^3\right)^2\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

$$\cos(-\sqrt{x}) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!} + o(x^2)$$

A denominatore si ha:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4!}\right)x^2 + o(x^2) = \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

Il limite è quindi $\frac{1}{8}$.

3. Studiare la serie

$$\sum \left((a^2)^{1/n} - a^{1/n} \right)^\alpha$$

$$a^{\alpha/n} \left(a^{1/n} - 1 \right)^\alpha$$

$$\lim_{n \to +\infty} a^{\frac{\alpha}{n}} = 1$$

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\frac{\log a}{n}} - 1 =$$

se $a \neq 1$

$$= \frac{e^{\frac{\log a}{n}} - 1}{\frac{\log a}{n}} \quad \frac{\log a}{n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{\frac{\log a}{n}} - 1}{\frac{\log a}{n}} = 1$$

Per cui $a^{\alpha/n} \left(a^{1/n} - 1 \right)^\alpha$ è asintotico a $\frac{1}{n^\alpha}$

per $a \neq 1$

quindi la serie converge $\forall a \neq 1$ se $\alpha > 1$.

Per $a = 1$ i termini della serie sono tutti nulli, per cui la serie converge.

4. Ponendo $t = e^x$ si ha

$$x = \log t \qquad dx = \frac{1}{t}\,dt$$

$$\int_2^{z} \frac{t^3 - t}{t^3+t^2+t}\,\frac{1}{t}\,dt = \int_2^{z} \frac{t^2-1}{t^3+t^2+t}\,dt$$

$$\frac{t^2-1}{t^3+t^2+t} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+t+1} =$$

$$= -\frac{1}{t} + \frac{2t+1}{t^2+t+1}$$

$$\int_2^{z} \frac{t^2-1}{t^3+t^2+t}\,dt = -\log t\,\Big|_2^{z} + \log\left(t^2+t+1\right)\Big|_2^{z}$$

$$\int_{\log 2}^{+\infty} \frac{e^{3x}-e^{x}}{e^{3x}+e^{2x}+e^{x}}\,dx = \int_2^{+\infty} \frac{t^2-1}{t^3+t^2+t}\,dt = +\infty$$

perché $\dfrac{t^2-1}{t^3+t^2+t}$ è asintotica a $\dfrac{1}{t}$

a $+\infty$