

1. Studiare $f(x) = 1 - \sqrt{2} \arctg \frac{1}{x} - \sqrt{1+x^2}$

La funzione è definita per ogni $x \neq 0$.

Domínio di f è $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

La funzione ammette anche due asintoti all'infinito. Infatti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \sqrt{2} \arctg \frac{1}{x} - \sqrt{1+x^2} + x \right) = \dots$$

Perché $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\sqrt{1+x^2} + x \right) =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{1+x^2} + x} = 0$$

si ha che $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = 1$

quindi la retta $\ell(x) = x + 1$

è asintoto a $+\infty$.

Analogamente si prova che $s(x) = -x + 1$
è un asintoto a $-\infty$.

$$f'(x) = -\sqrt{2} \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \sqrt{2} \frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} - x\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}$$

Studiamo f' : è definita per ogni x del
dominio di f

$$f'(x) = 0 \quad \text{sse}$$

$$\sqrt{2} = x\sqrt{1+x^2}$$

$$\text{also } \begin{cases} 2 = x^2(1+x^2) = x^4 + x^2 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$x^4 + x^2 - 2 = 0 \quad \text{per } x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

Chiaramente $\frac{-1-3}{2}$ è lo scarto perduto
non può essere positivo.

Rimane la possibilità che x^2 sia $\frac{-1+3}{2} = 1$.

Che è $x = 1$ oppure $x = -1$, ma x non può essere negativo.

Unica possibilità è che x sia uguale a 1.

$$\underline{f' > 0} \quad \text{sse} \quad \sqrt{2} - x \sqrt{1+x^2} > 0$$

$$\sqrt{2} > x \sqrt{1+x^2} \quad (*)$$

Se $x < 0$ (*) e' sempre vero.

Nel caso in cui x sia positivo risolviamo

$$\begin{cases} 2 > x^2(1+x^2) \\ x > 0 \end{cases} \quad (=) \quad \begin{cases} x^4 + x^2 - 2 < 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione l'insieme ~~$(0, 1)$~~ $(0, 1)$ 3.

Riassumendo :

$$f'(x) = 0 \quad \text{per } x = 1$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{per } x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{per } x \in (1, +\infty)$$

Volendo studiare la derivata seconda :

$$f''(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2} \left[\left(-\sqrt{1+x^2} - \frac{2x^2}{2\sqrt{1+x^2}} \right) (1+x^2) + \right. \\ \left. - 2x (\sqrt{2} - x\sqrt{1+x^2}) \right]$$

$$= \frac{1}{(1+x^2)^2} \left[- (1+x^2)^{3/2} - x^2 \sqrt{1+x^2} - 2\sqrt{2}x + 2x^2 \sqrt{1+x^2} \right]$$

$$= \frac{1}{(1+x^2)^2} \left[\sqrt{1+x^2} (2x^2 - x^2 - 1 - x^2) - 2\sqrt{2}x \right]$$

$$= - \frac{\sqrt{1+x^2} + 2\sqrt{2}x}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) > 0 \quad \text{per} \quad \sqrt{1+x^2} + 2\sqrt{2}x < 0$$

$$\sqrt{1+x^2} < -2\sqrt{2}x$$

Se $x > 0$ questa non è mai verificata.

$$\text{Se } x < 0 : \quad 1+x^2 < 8x^2$$

$$x^2 > \frac{1}{7} \quad (x < 0)$$

$$\Leftrightarrow x < -\frac{1}{\sqrt{7}}$$

f convessa in $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{7}})$ ~~non è mai~~

concava in $(-\frac{1}{\sqrt{7}}, 0) \cup (0, +\infty)$

$-\frac{1}{\sqrt{7}}$ punto di flesso

Tirando le conclusioni :

1 punto di massimo locale , $f(1) = 1 - \sqrt{2} \frac{\pi}{4} - \sqrt{2}$
(negativo)

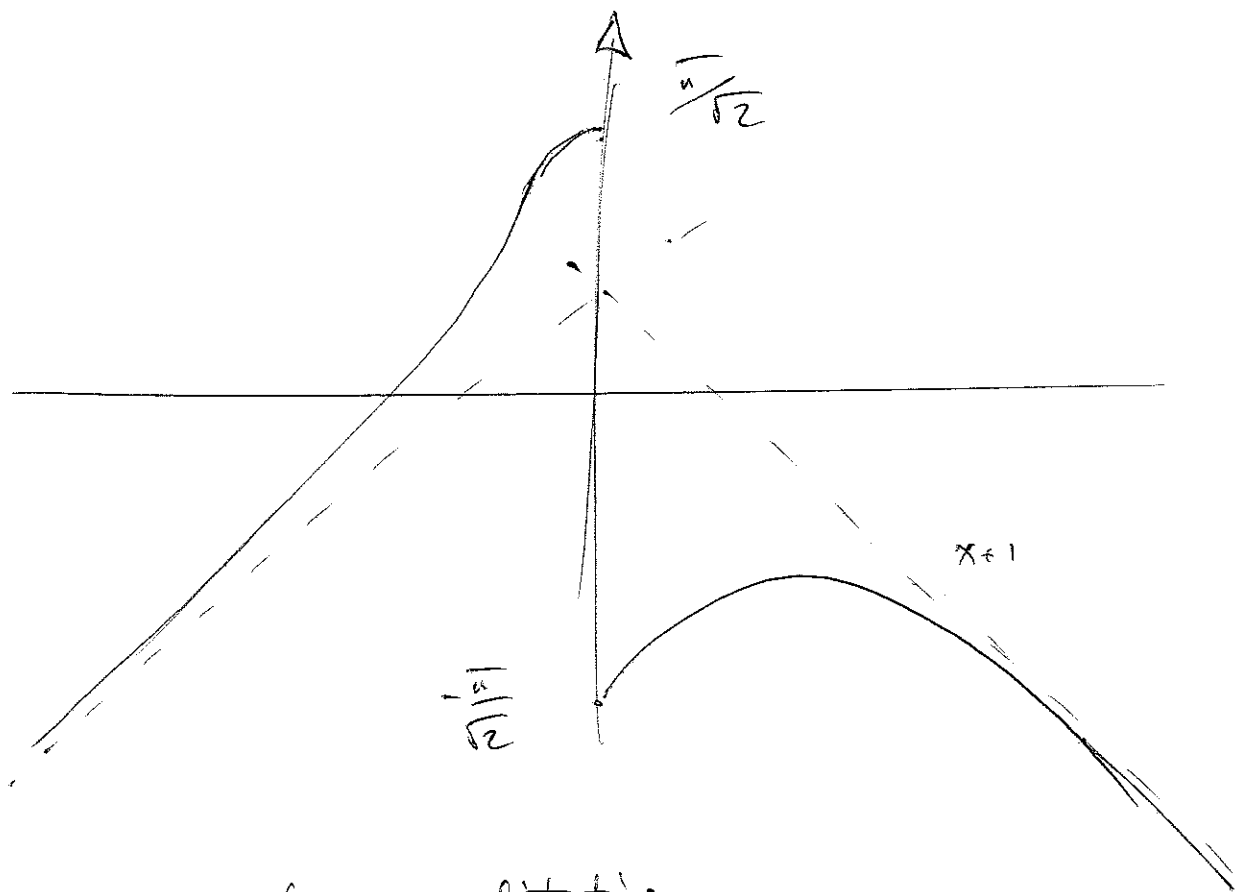


grafico qualitativo

Capire se il punto di flesso è a
destra o a sinistra di dove si annulla
la funzione e capire dove si
annulla la funzione è complicato.

2. Studiare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + \alpha x + x^2 - 2x^3) + 1 - e^{\alpha^2 x}}{\frac{1}{2} x^2}$$

$$\begin{aligned} \log(1 + \alpha x + x^2 - 2x^3) &= \alpha x + x^2 - 2x^3 + o(\alpha x + x^2 - 2x^3) \\ &= \alpha x + o(x) \quad \text{se } \alpha \neq 0 \end{aligned}$$

$$e^{\alpha^2 x} = 1 + \alpha^2 x + o(x) \quad \text{se } \alpha \neq 0$$

Il numeratore è quindi:

$$\alpha x + 1 - 1 - \alpha^2 x + o(x) = (\alpha - \alpha^2)x + o(x)$$

Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha - \alpha^2 \neq 0$, cioè $\alpha \neq 1$,

$$\text{si ha } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\alpha - \alpha^2)x + o(x)}{\frac{1}{2} x^2} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > \alpha^2 \\ -\infty & \text{se } \alpha < \alpha^2 \end{cases}$$

Per $\alpha = 1$ sviluppiamo ulteriormente:

$$\begin{aligned} \log(1 + x + x^2 - 2x^3) &= x + x^2 - 2x^3 - \frac{1}{2} (x + x^2 - 2x^3)^2 \\ &\quad + o((x + x^2 - 2x^3)^2) = \\ &= x + x^2 - \frac{1}{2} x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

$$e^{\alpha^2 x} = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{\operatorname{tg} x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{o(x^2)}{\operatorname{tg} x^2} = 0$$

Se $\alpha = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + x^2 - 2x^3) + 1 - 1}{\operatorname{tg} x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + o(x^2)}{\operatorname{tg} x^2} = 1$$

3. Studiare la serie

$$\sum \left(\frac{k^2 + 3k + \alpha}{k^2 + 3k + \sin \frac{1}{k}} \right) k^3$$

Applicando il criterio delle radici si ottiene:

$$\left[\left(\frac{k^2 + 3k + \alpha}{k^2 + 3k + \sin \frac{1}{k}} \right) k^3 \right]^{\frac{1}{k}} =$$

$$= \left(\frac{k^2 + 3k + \alpha}{k^2 + 3k + \sin \frac{1}{k}} \right)^{k^2} =$$

$$= \left(\frac{k^2 + 3k + \sin \frac{1}{k}}{k^2 + 3k + \sin \frac{1}{k}} + \frac{\alpha - \sin \frac{1}{k}}{k^2 + 3k + \sin \frac{1}{k}} \right)^{k^2}$$

$$= \left[\left(1 + \frac{\alpha - \sin \frac{1}{k}}{k^2 + 3k + \sin \frac{1}{k}} \right)^{\frac{k^2 + 3k + \sin \frac{1}{k}}{\alpha - \sin \frac{1}{k}}} \right]^{\frac{k^2 (\alpha - \sin \frac{1}{k})}{k^2 + 3k + \sin \frac{1}{k}}}$$

che converge a e^α

Se $\alpha > 0$ la serie diverge.

Se $\alpha < 0$ la serie converge.

Per $x=0$ il termine generico della serie

$$\begin{aligned}
 a_k &= \left(\frac{k^2 + 3k}{k^2 + 3k + \sin \frac{1}{k}} \right)^{k^3} = \\
 &= \left(1 - \frac{\sin \frac{1}{k}}{k^2 + 3k + \sin \frac{1}{k}} \right)^{k^3} = \\
 &= \left(1 - \frac{\frac{1}{k} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)}{k^2 + 3k + \sin \frac{1}{k}} \right)^{k^3} \quad \textcircled{*}
 \end{aligned}$$

$$\text{Ora: } \left(1 - \frac{1}{k^3 + 3k^2 + k \sin \frac{1}{k}} \right)^{k^3} \longrightarrow \frac{1}{e}$$

quindi anche il termine $\textcircled{*}$ converge a $\frac{1}{e}$.

Di conseguenza, poiché $a_k \rightarrow \frac{1}{e}$,

la serie $\sum a_k$ diverge a $+\infty$

~~$\sum a_k$~~

4. Ponendo $t = \log x$

$$x = e^t$$

$$dx = e^t dt$$

(oppure
 $dt = \frac{1}{x} dx$)

$$\int_{e^2}^{e^5} \frac{\log^2 x - 1}{x \log^3 x + x \log^2 x + x \log x} dx$$

$$= \int_2^5 \frac{t^2 - 1}{t^3 + t^2 + t} dt = \dots$$

si vede l'ultimo
 esercizio del compito A

M