

Soluzione della traccia A del compito del 17.2.2012

1. La funzione f è chiaramente sempre positiva e si riduce a

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-\operatorname{sen} x (1 - \operatorname{sen} x)} & \text{se } x \in [-\pi, 0), \\ \sqrt{\operatorname{sen} x (1 - \operatorname{sen} x)} & \text{se } x \in [0, \pi], \end{cases}$$

dal momento che $1 - \operatorname{sen} x \geq 0$ per ogni x .

La derivata non esiste (o può non esistere) quando l'argomento della radice quadrata si annulla, per cui se $\operatorname{sen} x = 0$ oppure se $1 - \operatorname{sen} x = 0$, cioè, per valori interni al dominio, per $x = 0$ e $x = \pi/2$.

Derivando la funzione f per $x \geq 0$ si ottiene (si noti che i punti scartati precedentemente annullano il denominatore)

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\cos x(2 \operatorname{sen} x - 1)}{2\sqrt{-\operatorname{sen} x (1 - \operatorname{sen} x)}} & \text{se } x \in (-\pi, 0), \\ \frac{\cos x(1 - 2 \operatorname{sen} x)}{2\sqrt{\operatorname{sen} x (1 - \operatorname{sen} x)}} & \text{se } x \in (0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi). \end{cases} \quad (1)$$

La derivata si annulla allora se la quantità $\cos x(1 - 2 \operatorname{sen} x)$ si annulla.

$$\cos x(1 - 2 \operatorname{sen} x) = 0 \quad \text{se e solo se} \quad \begin{array}{l} \cos x = 0 \quad \text{oppure} \\ \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}. \end{array}$$

Poiché $x \in [-\pi, \pi]$ le uniche soluzioni sono $x = -\pi/2, x = \pi/2$, che annullano il coseno, $\pi/6$ e $5\pi/6$ in cui $\operatorname{sen} x$ assume il valore $1/2$. Il punto $\pi/2$ va in realtà scartato, almeno a priori e per il momento, perché in tal punto il denominatore in (1) si annulla per cui f' in tal punto potrebbe non essere definita.

Studiando il segno di f' si ha:

$$f'(x) \left\{ \begin{array}{l} > 0 \quad \text{in } (-\pi, -\pi/2) \\ = 0 \quad \text{in } -\pi/2 \\ < 0 \quad \text{in } (-\pi/2, 0) \\ > 0 \quad \text{in } (0, \pi/6) \\ = 0 \quad \text{in } \pi/6 \\ < 0 \quad \text{in } (\pi/6, \pi/2) \\ > 0 \quad \text{in } (\pi/2, 5\pi/6) \\ = 0 \quad \text{in } 5\pi/6 \\ < 0 \quad \text{in } (5\pi/6, \pi) \end{array} \right.$$

Facendo i limiti agli estremi del dominio di f' (che è $(-\pi, 0) \cup (0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$) si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow -\pi^+} f'(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f'(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} f'(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^+} f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f'(x) = -\infty$$

Infatti

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi/2^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \frac{\cos x(1 - 2 \operatorname{sen} x)}{2\sqrt{\operatorname{sen} x(1 - \operatorname{sen} x)}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \frac{1 - 2 \operatorname{sen} x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \operatorname{sen} x}}. \end{aligned}$$

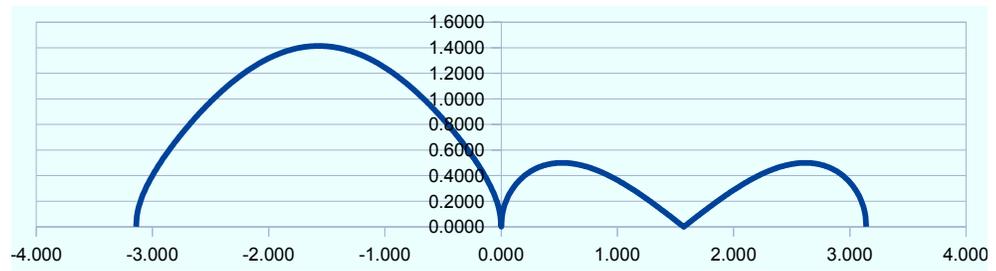
Il limite

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \frac{1 - 2 \operatorname{sen} x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}} = -\frac{1}{2}$$

mentre

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \operatorname{sen} x}} = \lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}}{\sqrt{1 - \operatorname{sen} x}} = \lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \sqrt{1 + \operatorname{sen} x} = \sqrt{2}.$$

In conclusione il punto $\pi/2$ è uno spigolo. Il grafico di f è il seguente



2. La funzione $x \mapsto (\cos \sqrt{x})^2$ può essere sviluppata in 0 come segue

$$(\cos \sqrt{x})^2 = \left(1 - \frac{x}{2} + o(x^{3/2})\right)^2 = 1 - x + o(x^{3/2}) \quad (2)$$

per cui il limite in (a) diventa semplicemente (il numeratore è un infinitesimo di ordine superiore a $3/2$, il denominatore un infinitesimo di ordine 1)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{o(x^{3/2})}{x(1+x+x^2)} = 0.$$

Sviluppando ulteriormente in (2) si ottiene

$$\begin{aligned} (\cos \sqrt{x})^2 &= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!} + o(x^{5/2})\right)^2 = 1 - x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{12} + o(x^{5/2}) = \\ &= 1 - x + \frac{x^2}{3} + o(x^{5/2}) \end{aligned}$$

per cui il limite in (b) è in realtà

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{o(x^{5/2})}{x^{5/2}} \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$

poiché $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{o(x^{5/2})}{x^{5/2}} = 0$ e $|\operatorname{sen} x^{-1}| \leq 1$.

3. La quantità $\sqrt[4]{1 + \frac{4}{n^4}} - 1$ è asintotica a n^{-4} , precisamente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{1 + \frac{4}{n^4}} - 1}{\frac{4}{n^4}} = \frac{1}{4}$$

oppure sviluppando al prim'ordine in $x = 0$ la funzione

$$(1 + x)^{1/4} = 1 + \frac{1}{4}x + o(x)$$

si ottiene

$$\sqrt[4]{1 + \frac{4}{n^4}} - 1 = \frac{1}{4} \frac{4}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) = \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

La quantità $\sqrt{n^2 + 1}$ per $n \rightarrow +\infty$ è asintotica a n per cui

$$\left(\sqrt[4]{1 + \frac{4}{n^4}} - 1\right) n^2 \sqrt{n^2 + 1}$$

è asintotica a $1/n$. Per cui la serie diverge.

Il punto (b) si svolge sempre sviluppando la funzione $(1 + x)^a$ al secondo ordine nel punto $x = 0$:

$$(1 + x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + o(x^2).$$

Per cui

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^\beta &= 1 + \frac{\beta\alpha}{n} + \frac{\beta(\beta-1)\alpha^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \left(1 + \frac{\beta}{n}\right)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha\beta}{n} + \frac{\alpha(\alpha-1)\beta^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

e infine sottraendo una all'altra si ha

$$\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^\beta - \left(1 + \frac{\beta}{n}\right)^\alpha = (\beta(\beta-1)\alpha^2 + \alpha(\alpha-1)\beta^2) \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La serie converge quindi per ogni valore di α e β .

4. Il primo integrale si svolge facendo il cambio di variabile

$$x = \cosh t.$$

Ricordo:

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

$$\cosh t + \sinh t = e^t \quad \text{da cui} \quad t = \log(\cosh t + \sinh t).$$

Allora le quantità che ci interessano diventano

$$x^2 - 1 = \sinh^2 t, \quad dx = \sinh t \, dt, \quad t = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Allora

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \int_0^{\log(2+\sqrt{3})} \frac{\sinh t}{\sinh t} dt = \int_0^{\log(2+\sqrt{3})} dt = \log(2 + \sqrt{3})$$

oppure

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx \quad \text{diventa} \quad \int \frac{\sinh t}{\sinh t} dt = \int dt = t + \text{cost}$$

e ritornando alla variabile x si ha

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) + c_1 \quad (c_1 \in \mathbf{R}) \quad (3)$$

e infine

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) \Big|_1^2 = \log(2 + \sqrt{3}).$$

Il secondo integrale è

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x^2 - 1|}} dx &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \\ &= \arcsen x \Big|_0^1 + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \frac{\pi}{2} + \log(2 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Venendo al punto (c) si ha:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx &= \arcsen x + c_2 \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx &= \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) + c_1 \end{aligned}$$

dove c_1, c_2 sono generiche costanti. Per cui una funzione continua che soddisfa le richieste dovrà essere tale che

$$\arcsen x + c_2 = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) + c_1 \quad \text{per } x = 1$$

cioè

$$\arcsen 1 + c_2 = \log 1 + c_1 \quad \text{cioè} \quad \frac{\pi}{2} + c_2 = c_1.$$

Prendendo, ad esempio, ma le scelte sono infinite, $c_2 = 0$ si ha $c_1 = \frac{\pi}{2}$ e quindi una possibile scelta è la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \arcsen x & x \in (0, 1) \\ \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \frac{\pi}{2} & x \in (1, 2). \end{cases} \quad (4)$$

Si veda il grafico qui di seguito.

Soluzione della traccia B del compito del 17.2.2012

1. È molto simile a quello della traccia A. Il grafico è lo stesso traslato di $3\pi/2$.
2. Utilizzando lo sviluppo $e^t = 1 + t + t^2/2 + o(t^2)$ sviluppiamo la funzione $e^{2\sqrt{x}} - 2e^{-\sqrt{x}}$. Si ha

$$\begin{aligned} e^{2\sqrt{x}} + 2e^{-\sqrt{x}} &= (1 + 2\sqrt{x} + 2x + o(x)) + 2(1 - \sqrt{x} + x/2 + o(x)) = \\ &= 3 + 3x + o(x). \end{aligned}$$

Di conseguenza il limite al punto (a) è

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{o(x)}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x} + x^{3/2})} = 0.$$

Utilizzando lo sviluppo $e^t = 1 + t + t^2/2 + t^3/3! + o(t^3)$ otteniamo

$$\begin{aligned} e^{2\sqrt{x}} + 2e^{-\sqrt{x}} &= (1 + 2\sqrt{x} + 2x + 8x^{3/2}/3! + o(x^{3/2})) + \\ &\quad + 2(1 - \sqrt{x} + x/2 - x^{3/2}/3! + o(x)) = \\ &= 3 + 3x + x^{3/2} + o(x^{3/2}). \end{aligned}$$

Per cui

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 + 3x + \frac{7}{6}x^{3/2} - e^{2\sqrt{x}} - 2e^{-\sqrt{x}}}{x^{3/2}} = \frac{1}{6}$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 + 3x + \frac{7}{6}x^{3/2} - e^{2\sqrt{x}} - 2e^{-\sqrt{x}}}{x^{3/2}} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

non esiste.

3. La quantità $\sqrt{n^2 + 1}$ è asintotica a n , la quantità $\log\left(1 + \frac{4}{n^4}\right)$ è asintotica a n^{-4} per cui $\frac{n^2 \log\left(1 + \frac{4}{n^4}\right)}{\sqrt{n^2 + 1}}$ è asintotica a n^{-3} e quindi la serie al punto (a) converge.

Per quanto riguarda il punto (b) si osservi che, utilizzando lo sviluppo $\log(1 + t) = t - t^2/2 + o(t^2)$

$$\begin{aligned} \log\left(\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^\beta\right) - \log\left(\left(1 + \frac{\beta}{n}\right)^\alpha\right) &= \beta \log\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) - \alpha \log\left(1 + \frac{\beta}{n}\right) = \\ &= \beta \frac{\alpha}{n} - \beta \frac{\alpha^2}{n^2} - \alpha \frac{\beta}{n} + \alpha \frac{\beta^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\alpha\beta^2 - \beta\alpha^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

per cui la serie è asintotica a $1/n^2$ se $\alpha\beta^2 - \beta\alpha^2 \neq 0$, altrimenti è asintotica a $1/n^3$. In ogni caso converge per ogni valore di α e β .

4. È uguale a quello della traccia A.