Soluzione della traccia A del compito del 17.2.2012

1. La funzione f è chiaramente sempre positiva e si riduce a

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-\operatorname{sen} x\,(1-\operatorname{sen} x)} & \text{se } x \in [-\pi, 0)\,, \\ \sqrt{\operatorname{sen} x\,(1-\operatorname{sen} x)} & \text{se } x \in [0, \pi]\,, \end{cases}$$

dal momento che $1 - \operatorname{sen} x \geqslant 0$ per ogni x.
La derivata non esiste (o può non esistere) quando l'argomento della radice quadrata si annulla, per cui se $\operatorname{sen} x = 0$ oppure se $1 - \operatorname{sen} x = 0$, cioè, per valori interni al dominio, per $x = 0$ e $x = \pi/2$.

Derivando la funzione f per $x \geqslant 0$ si ottiene (si noti che i punti scartati precedentemente annullano il denominatore)

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x(2\operatorname{sen} x - 1)}{2\sqrt{-\operatorname{sen} x\,(1-\operatorname{sen} x)}} & \text{se } x \in (-\pi, 0)\,, \\ \dfrac{\cos x(1 - 2\operatorname{sen} x)}{2\sqrt{\operatorname{sen} x\,(1-\operatorname{sen} x)}} & \text{se } x \in (0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)\,. \end{cases} \tag{1}$$

La derivata si annulla allora se la quantità $\cos x(1 - 2\operatorname{sen} x)$ si annulla.

$$\cos x(1 - 2\operatorname{sen} x) = 0 \quad \text{se e solo se} \quad \begin{array}{ll} \cos x = 0 & \text{oppure} \\ \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}\,. & \end{array}$$

Poiché $x \in [-\pi, \pi]$ le uniche soluzioni sono $x = -\pi/2, x = \pi/2$, che annullano il coseno, $\pi/6$ e $5\pi/6$ in cui $\operatorname{sen} x$ assume il valore $1/2$. Il punto $\pi/2$ va in realtà scartato, almeno a priori e per il momento, perché in tal punto il denominatore in (1) si annulla per cui f' in tal punto potrebbe non essere definita.

Studiando il segno di f' si ha:

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{in } (-\pi, -\pi/2) \\ = 0 & \text{in } -\pi/2 \\ < 0 & \text{in } (-\pi/2, 0) \\ > 0 & \text{in } (0, \pi/6) \\ = 0 & \text{in } \pi/6 \\ < 0 & \text{in } (\pi/6, \pi/2) \\ > 0 & \text{in } (\pi/2, 5\pi/6) \\ = 0 & \text{in } 5\pi/6 \\ < 0 & \text{in } (5\pi/6, \pi) \end{cases}$$

Facendo i limiti agli estremi del dominio di f' (che è $(-\pi, 0) \cup (0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$) si ottiene

$$\lim_{x \to -\pi^+} f'(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to \pi^-} f'(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to \pi/2^-} f'(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\lim_{x \to \pi/2^+} f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\lim_{x \to \pi^-} f'(x) = -\infty$$

Infatti

$$\begin{aligned}\lim_{x \to \pi/2^+} f'(x) &= \lim_{x \to \pi/2^+} \frac{\cos x(1 - 2\operatorname{sen} x)}{2\sqrt{\operatorname{sen} x\,(1 - \operatorname{sen} x)}} = \\ &= \lim_{x \to \pi/2^+} \frac{1 - 2\operatorname{sen} x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}\ \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \operatorname{sen} x}}.\end{aligned}$$

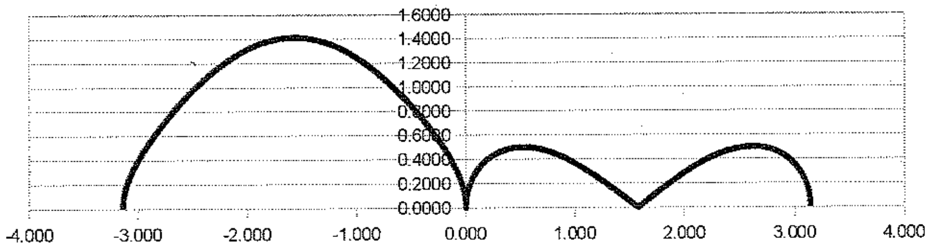
Il limite

$$\lim_{x \to \pi/2^+} \frac{1 - 2\operatorname{sen} x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}} = -\frac{1}{2}$$

mentre

$$\lim_{x \to \pi/2^+} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \operatorname{sen} x}} = \lim_{x \to \pi/2^+} \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}}{\sqrt{1 - \operatorname{sen} x}} = \lim_{x \to \pi/2^+} \sqrt{1 + \operatorname{sen} x} = \sqrt{2}\,.$$

In conlusione il punto $\pi/2$ è uno spigolo. Il grafico di f è il seguente


1.6000
1.4000
1.2000
1.0000
0.8000
0.6000
0.4000
0.2000
0.0000
-4.000
-3.000
-2.000
-1.000
0.000
1.000
2.000
3.000
4.000

2. La funzione $x \mapsto (\cos\sqrt{x})^2$ può essere sviluppata in 0 come segue

$$(\cos\sqrt{x})^2 = \left(1 - \frac{x}{2} + o(x^{3/2})\right)^2 = 1 - x + o(x^{3/2}) \tag{2}$$

per cui il limite in (a) diventa semplicemente (il numeratore è un infinitesimo di ordine superiore a 3/2, il denominatore un infinitesimo di ordine 1)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{o(x^{3/2})}{x(1+x+x^2)} = 0\,.$$

Sviluppando ulteriormente in (2) si ottiene

$$(\cos\sqrt{x})^2 = \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!} + o(x^{5/2})\right)^2 = 1 - x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{12} + o(x^{5/2}) =$$
$$= 1 - x + \frac{x^2}{3} + o(x^{5/2})$$

per cui il limite in (b) è in realtà

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{o(x^{5/2})}{x^{5/2}} \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$$

poiché $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{o(x^{5/2})}{x^{5/2}} = 0$ e $|\operatorname{sen} x^{-1}| \leqslant 1$.

3. La quantità $\sqrt[4]{1+\frac{4}{n^4}}-1$ è asintotica a n^{-4}, precisamente

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{1+\frac{4}{n^4}}-1}{\frac{4}{n^4}}=\frac{1}{4}$$

oppure sviluppando al prim'ordine in $x=0$ la funzione

$$(1+x)^{1/4}=1+\frac{1}{4}x+o(x)$$

si ottiene

$$\sqrt[4]{1+\frac{4}{n^4}}-1=\frac{1}{4}\frac{4}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)=\frac{1}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

La quantità $\sqrt{n^2+1}$ per $n\to+\infty$ è asintotica a n per cui

$$\left(\sqrt[4]{1+\frac{4}{n^4}}-1\right)n^2\sqrt{n^2+1}$$

è asintotica a $1/n$. Per cui la serie diverge.

Il punto (b) si svolge sempre sviluppando la funzione $(1+x)^a$ al secondo ordine nel punto $x=0$:

$$(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2}x^2+o(x^2).$$

Per cui

$$\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^\beta=1+\frac{\beta\alpha}{n}+\frac{\beta(\beta-1)\alpha^2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$\left(1+\frac{\beta}{n}\right)^\alpha=1+\frac{\alpha\beta}{n}+\frac{\alpha(\alpha-1)\beta^2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

e infine sottraendo una all'altra si ha

$$\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^\beta-\left(1+\frac{\beta}{n}\right)^\alpha=\left(\beta(\beta-1)\alpha^2+\alpha(\alpha-1)\beta^2\right)\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La serie converge quindi per ogni valore di α e β.

4. Il primo integrale si svolge facendo il cambio di variabile

$$x = \cosh t\,.$$

Ricordo:

$$\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$$
$$\cosh t + \operatorname{senh}\, t = e^t \quad \text{da cui} \quad t = \log(\cosh t + \operatorname{senh}\, t)\,.$$

Allora le quantità che ci interessano diventano

$$x^2 - 1 = \operatorname{senh}^2 t\,, \quad dx = \operatorname{senh} t\, dt\,, \quad t = \log(x + \sqrt{x^2-1})\,.$$

Allora

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \int_0^{\log(2+\sqrt{3})} \frac{\operatorname{senh}\, t}{\operatorname{senh}\, t}\, dt = \int_0^{\log(2+\sqrt{3})} dt = \log(2+\sqrt{3})$$

oppure

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx \quad \text{diventa} \quad \int \frac{\operatorname{senh}\, t}{\operatorname{senh}\, t}\, dt = \int dt = t + cost$$

e ritornando alla variabile x si ha

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \log(x + \sqrt{x^2-1}) + c_1 \qquad (c_1 \in \mathbf{R}) \tag{3}$$

e infine

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \log(x + \sqrt{x^2-1})\Big|_1^2 = \log(2+\sqrt{3})\,.$$

Il secondo integrale è

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x^2-1|}}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx =$$
$$= \operatorname{arcsen} x\Big|_0^1 + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \frac{\pi}{2} + \log(2+\sqrt{3})\,.$$

Venendo al punto (c) si ha:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \operatorname{arcsen} x + c_2$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \log(x + \sqrt{x^2-1}) + c_1$$

dove c_1, c_2 sono generiche costanti. Per cui una funzione continua che soddisfa le richieste dovrà essere tale che

$$\operatorname{arcsen} x + c_2 = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) + c_1 \quad \text{per } x = 1$$

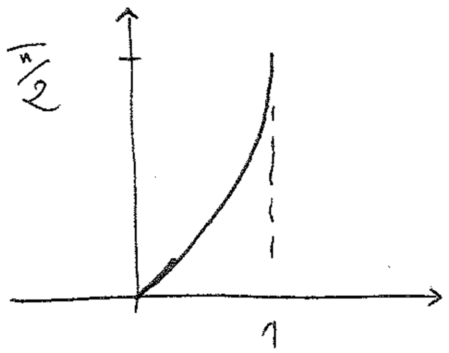
cioè

$$\operatorname{arcsen} 1 + c_2 = \log 1 + c_1 \quad \text{cioè} \quad \frac{\pi}{2} + c_2 = c_1\,.$$

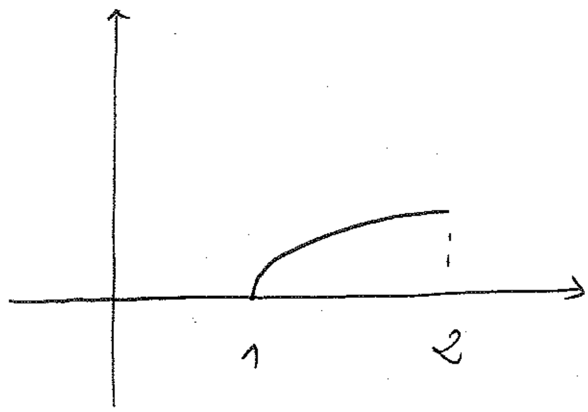
Prendendo, ad esempio, ma le scelte sono infinite, $c_2 = 0$ si ha $c_1 = \frac{\pi}{2}$ e quindi una possibile scelta è la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcsen} x & x \in (0,1) \\ \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \frac{\pi}{2} & x \in (1,2)\,. \end{cases} \tag{4}$$

Si veda il grafico qui di seguito.



arcsen x tra 0 e 1



log(x + √(x²−1)) tra 1 e 2

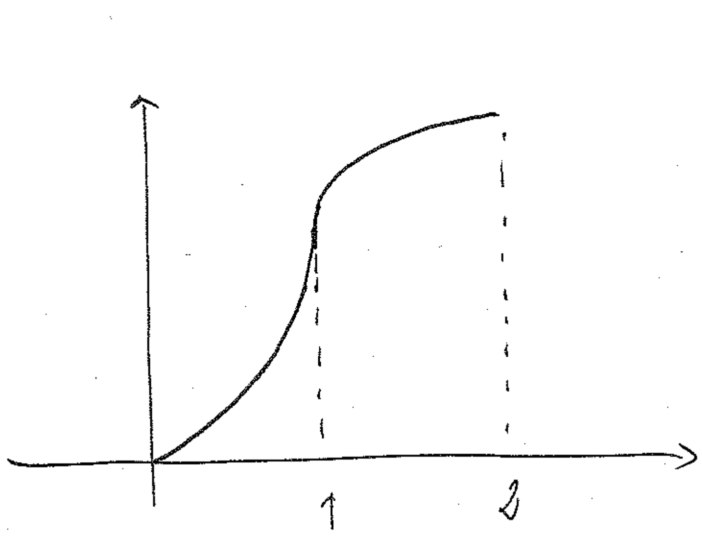


grafico di f definita in (4)

Soluzione della traccia B del compito del 17.2.2012

1. È molto simile a quello della traccia A. Il grafico è lo stesso traslato di $3\pi/2$.

2. Utilizzando lo sviluppo $e^t = 1 + t + t^2/2 + o(t^2)$ sviluppiamo la funzione $e^{2\sqrt{x}} - 2e^{-\sqrt{x}}$. Si ha

$$\begin{aligned} e^{2\sqrt{x}} + 2e^{-\sqrt{x}} &= (1 + 2\sqrt{x} + 2x + o(x)) + 2(1 - \sqrt{x} + x/2 + o(x)) = \\ &= 3 + 3x + o(x)\,. \end{aligned}$$

Di conseguenza il limite al punto (a) è

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{o(x)}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x} + x^{3/2})} = 0\,.$$

Utilizzando lo sviluppo $e^t = 1 + t + t^2/2 + t^3/3! + o(t^3)$ otteniamo

$$\begin{aligned} e^{2\sqrt{x}} + 2e^{-\sqrt{x}} &= (1 + 2\sqrt{x} + 2x + 8x^{3/2}/3! + o(x^{3/2})) + \\ &\qquad + 2(1 - \sqrt{x} + x/2 - x^{3/2}/3! + o(x)) = \\ &= 3 + 3x + x^{3/2} + o(x^{3/2})\,. \end{aligned}$$

Per cui

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{3 + 3x + \frac{7}{6}x^{3/2} - e^{2\sqrt{x}} - 2e^{-\sqrt{x}}}{x^{3/2}} = \frac{1}{6}$$

e

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{3 + 3x + \frac{7}{6}x^{3/2} - e^{2\sqrt{x}} - 2e^{-\sqrt{x}}}{x^{3/2}} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

non esiste.

3. La quantità $\sqrt{n^2+1}$ è asintotica a n, la quantità $\log\left(1+\frac{4}{n^4}\right)$ è asintotica a n^{-4} per cui $\dfrac{n^2\log\left(1+\frac{4}{n^4}\right)}{\sqrt{n^2+1}}$ è asintotica a n^{-3} e quindi la serie al punto (a) converge.

   Per quanto riguarda il punto (b) si osservi che, utilizzando lo sviluppo $\log(1+t) = t - t^2/2 + o(t^2)$

$$\log\left(\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{\beta}\right) - \log\left(\left(1+\frac{\beta}{n}\right)^{\alpha}\right) = \beta\log\left(1+\frac{\alpha}{n}\right) - \alpha\log\left(1+\frac{\beta}{n}\right)^{\alpha} =$$
$$= \beta\frac{\alpha}{n} - \beta\frac{\alpha^2}{n^2} - \alpha\frac{\beta}{n} + \alpha\frac{\beta^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\alpha\beta^2 - \beta\alpha^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

   per cui la serie è asintotica a $1/n^2$ se $\alpha\beta^2 - \beta\alpha^2 \neq 0$, altrimenti è asintotica a $1/n^3$. In ogni caso converge per ogni valore di α e β.

4. È uguale a quello della traccia A.