Soluzione della traccia del compito del 5.7.2012

1. (a) La funzione f a priori non è definita per $x \neq 0$, quindi il dominio è $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Studiamo i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to 0^-} |x|(1+\log|x|)^2 = 0\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} x(1+\log x)^2 = 0\,,$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty\,.$$

Poiché la funzione è pari ci limitiamo a studiarla per $x > 0$. La derivata di f è

$$f'(x) = (1+\log x)^2 + 2(1+\log x)\,.$$

Guardando f' come un polinomio nella variabile $(1+\log x)$ si ricava facilmente il segno della derivata di f:

$$f'(x)\begin{cases} >0 & \text{se } 1+\log x > 0 \quad \text{o} \quad 1+\log x < -2\,,\\ =0 & \text{se } 1+\log x = 0 \quad \text{o} \quad 1+\log x = -2\,,\\ <0 & \text{se } 0 < 1+\log x < -2\,,\end{cases}$$

il che è equivalente a

$$f'(x)\begin{cases} >0 & \text{se } x \in (0, e^{-3}) \cup (e^{-1}, +\infty)\,,\\ =0 & \text{se } x = e^{-3} \quad \text{o} \quad x = e^{-1}\,,\\ <0 & \text{se } e^{-3} < x < e^{-1}\,.\end{cases}$$

Valutiamo i valori di f nei punti e^{-3} e e^{-1}:

$$f(e^{-3}) = \frac{4}{e^3}\,, \qquad f(e^{-3}) = 0\,.$$

Poiché f è non negativa e si annulla, e si annulla solamente, in $x = e^{-3}$ tale punto è il punto di minimo assoluto. Per disegnare un grafico di f valutiamo anche il limite di f' in 0: poiché

$$f'(x) = (1+\log x)\Big[(1+\log x)+2\Big] = (1+\log x)(3+\log x)\,,$$

si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty\,.$$

Infine anche la derivata seconda è semplice da studiare, quindi studiamone il segno. Si ha

$$f''(x) = \frac{1}{x}\,(4+2\log x)$$

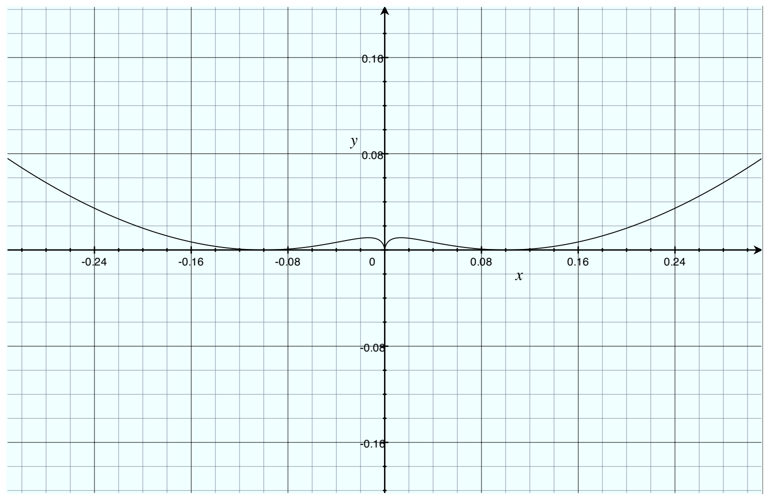

Figure 1:

che è positiva per $x > e^{-2}$, per cui f è concava in $(0, e^{-2})$ e convessa in $(e^{-2}, +\infty)$. Si noti che, poiché $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ esiste finito, la funzione può essere estesa al punto 0. In tal caso si ha una nuova funzione definita in $\mathbf{R}$, **continua** nel suo dominio, definita da

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

che ha **tre** punti di minimo assoluto, $x = 0$, $x = e^{-1}$ e $x = -e^{-1}$.

(b) Per quanto riguarda il punto (b), cioè lo studio di $f_\alpha(x) = |x|^\alpha\big(1 + \log|x|\big)^2$, si osservi prima di tutto che

$$f_\alpha \quad \text{non è definita per } x = 0\,.$$

Affinché la funzione possa essere estesa anche al punto $x = 0$, in modo che l'estensione risulti continua, dovrà esistere, finito, il limite $\lim_{x\to 0} f_\alpha(x)$. Per la simmetria di f_α, che è pari, se esistono i limiti

$$\lim_{x\to 0^+} f_\alpha(x)\,, \qquad \lim_{x\to 0^-} f_\alpha(x)\,,$$

tali limiti sono uguali. È sufficiente allora valutarne uno dei due. Si ha ad esempio

$$\lim_{x\to 0^+} f_\alpha(x) = 0 \qquad \text{se } \alpha > 0\,.$$

Poiché il nostro parametro può muoversi nell'insieme $(0, +\infty)$, per ogni scelta del parametro $\alpha > 0$ si ha che

$$\tilde{f}_\alpha(x) = \begin{cases} f_\alpha(x) & \text{se } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \qquad \text{è continua in } \mathbf{R}.$$

Chiaramente la funzione così estesa è derivabile e di calsse C^1 nell'insieme $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Rimane da vedere se, ed eventualmente per quali valori di α, $\tilde{f}_\alpha$ è derivabile in 0 e tale derivata è continua. Se esiste la derivata di $\tilde{f}_\alpha$ in 0 è data da

$$\lim_{h\to 0} \frac{\tilde{f}_\alpha(h) - \tilde{f}_\alpha(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|^\alpha \big(1 + \log|h|\big)^2}{h} .$$

Tale limite esiste, finito, se e solo se $\alpha > 1$ e inoltre tale limite è 0, quindi

$$\tilde{f}'_\alpha(0) = 0 \qquad \text{se e solo se } \alpha > 1 .$$

Per vedere se la funzione è estendibile ad una funzione di classe C^1 si può fare un ragionamento analogo a quanto fatto per studiare la contiuità. L'analogia sta nel fatto che anche la derivata f'_α avrà una simmetria, poiché f_α è pari, f'_α risulterà dispari. Calcoliamo la derivata di $\tilde{f}_\alpha$ per $x > 0$:

$$\tilde{f}'_\alpha(x) = f'_\alpha(x) = x^{\alpha-1}\Big[\alpha\,(1+\log x)^2 + 2\,(1+\log x)\Big] .$$

Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} \big[\alpha\,(1+\log x)^2 + 2\,(1+\log x)\big] = +\infty$$

l'unica speranza per avere $\lim_{x\to 0^+} f'_\alpha(x)$ finito è che

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-1} \quad \text{sia } 0\,, \quad \text{cioè } \alpha > 1 .$$

Conclusione: per $\alpha > 1$, e solo per tali valori, $\tilde{f}_\alpha$ è continua, derivabile e la sua derivata è continua.

In figura 2 sono riportati due grafici: il primo è il grafico di f_α con $\alpha = 1,2$. Apparentemente non è derivabile in 0. Il secondo è un ingrandimento in un intorno (molto piccolo) di 0. Come si vede la funzione non ha uno spigolo.
Man mano che il valore di α cresce la funzione si appiattisce decidamente di più.

2. Il risultato è: $\lim_{x\to 0} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = e$. Vediamo tre possibili svolgimenti.

   (a) Possiamo sviluppare la funzione $\cos x + \operatorname{sen} x$ in 0 come segue:

$$\cos x + \operatorname{sen} x = \Big(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\Big) + \Big(x + o(x^2)\Big) = 1 + x + o(x) .$$

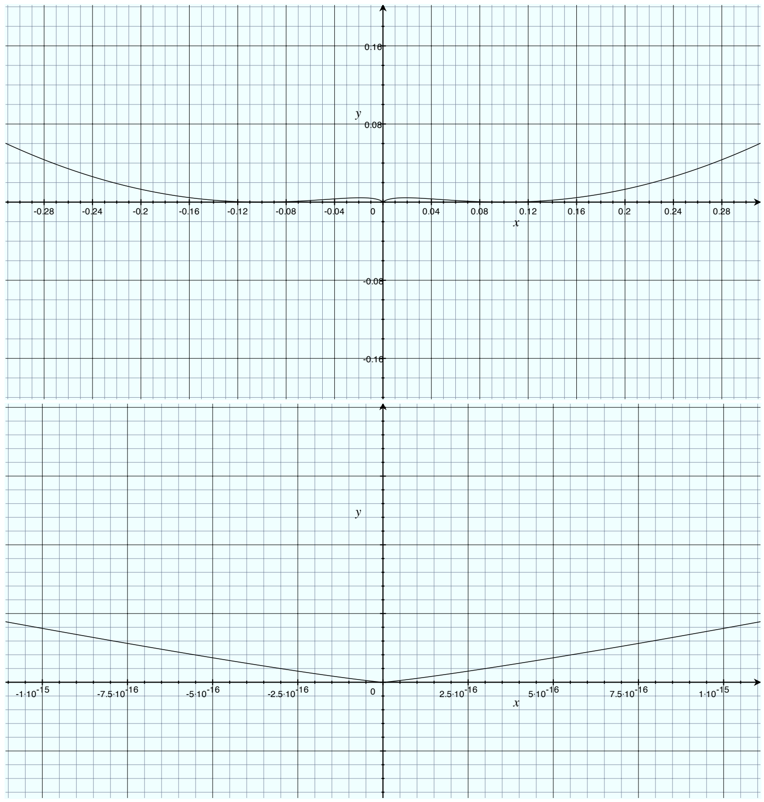

Figure 2:

Senza sviluppare l'esponente si può scrivere (dove l'$o(x)$ denota la medesima funzione)

$$\lim_{x\to 0}(\cos x+\operatorname{sen} x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x\to 0}(1+x+o(x))^{\frac{1}{x+o(x)}\,\frac{x+o(x)}{\operatorname{sen} x}\,\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[(1+x+o(x))^{\frac{1}{x+o(x)}}\right]^{\frac{x+o(x)}{\operatorname{sen} x}\,\cos x} = e\,.$$

(b) Oppure si può raccogliere $\cos x$ e ottenere

$$(\cos x+\operatorname{sen} x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = (\cos x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}\left(1+\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}\,.$$

Si ha che

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = e\,,$$

basta quindi studiare $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}$. Sviluppando al secondo ordine il coseno si ha

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\,.$$

Per cui si ha ($o(x^2)$ denota una medesima funzione in tutte le espressioni che seguono)

$$
\begin{aligned}
(\cos x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^{\frac{1}{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} \, \frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{\operatorname{sen} x} \, \cos x} .
\end{aligned}
$$

Allora poiché

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^{\frac{1}{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}} = e\,, \\
&\lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{\operatorname{sen} x} = 0\,, \\
&\lim_{x\to 0^+} \cos x = 1
\end{aligned}
$$

si ha che

$$
\lim_{x\to 0^+} \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^{\frac{1}{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} \, \frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{\operatorname{sen} x} \, \cos x} = 1\,.
$$

(c) Scrivendo ($\exp x = e^x$)

$$
\begin{aligned}
(\cos x + \operatorname{sen} x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} &= \exp\left(\log\left(\cos x + \operatorname{sen} x\right)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}\right) = \\
&= \exp\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \, \log\left(\cos x + \operatorname{sen} x\right)\right) .
\end{aligned}
$$

ci si può limitare a studiare l'argomento dell'esponenziale. Si ha che

$$
\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \, \log\left(\cos x + \operatorname{sen} x\right) = 1\,.
$$

A questo punto di può procedere utilizzando la formula di Taylor. Si ha

$$
\lim_{x\to 0} \cos x \, \frac{\log\left(\cos x + \operatorname{sen} x\right)}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \cos x \, \frac{\log\left(1 + x + o(x)\right)}{\operatorname{sen} x}
$$

e

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \cos x = 1\,, \\
&\lim_{x\to 0} \frac{\log\left(1 + x + o(x)\right)}{\operatorname{sen} x} = 1\,.
\end{aligned}
$$

3. (a) Il primo limite $\lim_{c\to 0+}\int_c^{\pi/2} \frac{\cos x}{x^{5/2}}\,dx$ è $+\infty$ dal momento che la funzione

$$\frac{\cos x}{x^{5/2}}$$

è asintotica a $\frac{1}{x^{5/2}}$ in 0 e

$$\lim_{c\to 0+}\int_c^{\pi/2} \frac{1}{x^{5/2}}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{x^{5/2}}\,dx = +\infty\,.$$

Per quanto riguarda $\lim_{c\to 0+}\int_c^{\pi/2} \frac{\cos x\,\log(1+x)}{e^x\sqrt{x^5+x^{10}}}\,dx$ il risultato è lo stesso, poiché anche $\frac{\cos x\,\log(1+x)}{e^x\sqrt{x^5+x^{10}}}$ è asintotica a $\frac{1}{x^{3/2}}$ in 0.

(b) Si osservi che

$$\frac{2}{3}\frac{d}{dx}\frac{\cos x}{x^{3/2}} = -\frac{2}{3}\frac{\operatorname{sen} x}{x^{3/2}} - \frac{\cos x}{x^{5/2}}$$

da cui, integrando tra c e $\pi/2$,

$$\frac{2}{3}\frac{\cos c}{c^{3/2}} - \int_c^{\pi/2} \frac{\cos x}{x^{5/2}}\,dx = \int_c^{\pi/2} \frac{2}{3}\frac{\operatorname{sen} x}{x^{3/2}}\,dx\,.$$

Dal momento che

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x^{3/2}}$$

è asintotica a $\frac{1}{x^{1/2}}$ in 0 si ha che il secondo limite esiste ed è finito.

4. Chiamando x la quantità $\cos t$ e poiché $\operatorname{sen}^2 t = 1-\cos^2 t$ si ha:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2\operatorname{sen} t\cos t}{\operatorname{sen}^2 t+\cos t+2}\,dt = -\int_0^1 \frac{2x}{x^2-x-3}\,dx\,.$$

Il polinomio x^2-x-3 si annulla per

$$a = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} \quad \text{e} \quad b = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\,.$$

Quindi vanno cercate A e B in modo tale che

$$\frac{2x}{x^2-x-3} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}\,.$$

Si ottiene

$$A = 1 - \frac{1}{\sqrt{13}}\,, \qquad A = 1 + \frac{1}{\sqrt{13}}\,.$$

A questo punto

$$-\int_0^1 \frac{2x}{x^2-x-3}\,dx = -\big[A\log|x-a| + B\log|x-b|\big]\Big|_0^1 =$$
$$= A\log(-a) - A\log(1-a) + B\log(b) - B\log(b-1)\,.$$

Per quanto riguarda $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2\,\mathrm{sen}\,t\cos t}{\mathrm{sen}^2 t+\cos t+2}\,dt$ si ha che tale integrale altro non è che

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2\,\mathrm{sen}\,t\cos t}{\mathrm{sen}^2 t+\cos t+2}\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{2\,\mathrm{sen}\,t\cos t}{\mathrm{sen}^2 t-\cos t+2}\,dt$$

e quindi è sufficiente calcolare il secondo. Con il cambio di prima (x al posto di $\cos t$) si ottiene

$$-\int_{-1}^0 \frac{2x}{x^2+x-3}\,dx\,.$$

e si procede in maniera simile alla precedente.

****

L'esercizio sarebbe dovuto essere (c'era un errore di battitura nel testo che in realtà semplificava l'esercizio)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2\,\mathrm{sen}\,t\cos t}{-\mathrm{sen}^2 t+\cos t+2}\,dt\,.$$

Di nuovo, chiamando x la quantità $\cos t$ e poiché $-\mathrm{sen}^2 t = \cos^2 t - 1$, si ha:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2\,\mathrm{sen}\,t\cos t}{\mathrm{sen}^2 t+\cos t+2}\,dt = \int_0^1 \frac{2x}{x^2+x+1}\,dx =$$
$$= \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\,dx\,.$$

È sufficiente valutare la primitiva di $\frac{1}{x^2+x+1}$, dal momento che

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \log(x^2+x+1)\Big|_0^1 = \log 2\,.$$

Per fare ciò si osservi che

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right].$$

Effettuando il cambio di variabile

$$y=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\,dx=\frac{4}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{y^2+1}\,dy=\\
&\quad=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]\Bigg|_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}$$

Sommando questa quantità a $\log 2$ si ottiene il risultato del primo integrale.

Per quanto riguarda il secondo si procede il maniera simile poiché

$$\int_{-1}^1 \frac{2x}{x^2+|x|+1}\,dx=\int_{-1}^0\frac{2x}{x^2-x+1}\,dx+\int_0^1\frac{2x}{x^2+x+1}\,dx.$$

Ci limitiamo a calcolare il secondo che, analogamente a prima, è

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^0 \frac{2x}{x^2-x+1}\,dx&=\int_{-1}^0\frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx+\int_{-1}^0\frac{1}{x^2-x+1}\,dx=\\
&=\log(x^2-x+1)\Big|_0^1+\frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3}}^{-1/\sqrt{3}}\frac{1}{1+y^2}\,dy=\\
&=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})\right)=\\
&=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}$$

****

Chiamando x la quantità $\cos t$ e poiché $\operatorname{sen}^2 t=\cos^2 t-1$ si ha:

$$\int_0^{\pi/2}\frac{2\operatorname{sen} t\cos t}{\operatorname{sen}^2 t+\cos t+2}\,dt=\int_0^1\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx.$$

Il polinomio x^2+x+1 non ha zeri reali, per cui, scrivendo

$$\frac{2x}{x^2+x+1} = \frac{2x}{x^2+x+1} - \frac{1}{x^2+x+1}\,,$$

è sufficiente valutare la primitiva di $\frac{1}{x^2+x+1}$, dal momento che

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \log(x^2+x+1)\Big|_0^1 = \log 2\,.$$

Per fare ciò si osservi che

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right]\,.$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

si ottiene

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{4}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{y^2+1}\,dy =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]\Bigg|_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\mathrm{arctg}\,\sqrt{3} - \mathrm{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\,.$$

Sommando questa quantità a $\log 2$ si ottiene il risultato del primo integrale.

Per quanto riguarda il secondo si procede il maniera simile poiché

$$\int_{-1}^1 \frac{2x}{x^2+|x|+1}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{2x}{x^2-x+1}\,dx + \int_0^1 \frac{2x}{x^2+x+1}\,dx\,.$$

Ci limitiamo a calcolare il secondo che, analogamente a prima, è

$$\int_{-1}^0 \frac{2x}{x^2-x+1}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \log(x^2-x+1)\Big|_0^1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3}}^{-1/\sqrt{3}} \frac{1}{1+y^2}\,dy =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \mathrm{arctg}\,(-\sqrt{3})\right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\mathrm{arctg}\,\sqrt{3} - \mathrm{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\,.$$