Soluzione della traccia del compito del 5.7.2012

1. (a) La funzione f a priori non è definita per $x \leqslant 0$, quindi il dominio è $(0, +\infty)$. Studiamo i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to 0^+} x(1 + \log x)^2 = 0\,, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\,.$$

La derivata di f è

$$f'(x) = (1 + \log x)^2 + 2(1 + \log x)\,.$$

Guardando f' come un polinomio nella variabile $(1+\log x)$ si ricava facilmente il segno della derivata di f:

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{se } 1 + \log x > 0 \quad \text{o} \quad 1 + \log x < -2\,, \\ = 0 & \text{se } 1 + \log x = 0 \quad \text{o} \quad 1 + \log x = -2\,, \\ < 0 & \text{se } 0 < 1 + \log x < -2\,, \end{cases}$$

il che è equivalente a

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{se } x \in (0, e^{-3}) \cup (e^{-1}, +\infty)\,, \\ = 0 & \text{se } x = e^{-3} \quad \text{o} \quad x = e^{-1}\,, \\ < 0 & \text{se } e^{-3} < x < e^{-1}\,. \end{cases}$$

Valutiamo i valori di f nei punti e^{-3} e e^{-1}:

$$f(e^{-3}) = \frac{4}{e^3}\,, \qquad f(e^{-3}) = 0\,.$$

Poiché f è non negativa e si annulla, e si annulla solamente, in $x = e^{-3}$ tale punto è il punto di minimo assoluto. Per disegnare un grafico di f valutiamo anche il limite di f' in 0: poiché

$$f'(x) = (1 + \log x)\Big[(1 + \log x) + 2\Big] = (1 + \log x)(3 + \log x)\,,$$

si ha

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty\,.$$

Infine anche la derivata seconda è semplice da studiare, quindi studiamone il segno. Si ha

$$f''(x) = \frac{1}{x}\,(4 + 2\log x)$$

che è positiva per $x > e^{-2}$, per cui f è concava in $(0, e^{-2})$ e convessa in $(e^{-2}, +\infty)$.

grafico

Si noti che, poiché $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ esiste finito, la funzione può essere estesa al punto 0. In tal caso si ha una nuova funzione definita in $[0, +\infty)$, **continua** nel suo dominio, definita da

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x > 0\,, \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

che ha **due** punti di minimo assoluto, $x = 0$ e $x = e^{-1}$.

(b) Per quanto riguarda il punto (b), cioè lo studio di $f_\alpha(x) = |x|^\alpha \big(1 + \log|x|\big)^2$, si osservi prima di tutto che

$$f_\alpha \quad \text{non è definita per } x = 0\,.$$

Affinché la funzione possa essere estesa anche al punto $x = 0$, in modo che l'estensione risulti continua, dovrà esistere, finito, il limite $\lim_{x\to 0} f_\alpha(x)$. Per la simmetria di f_α, che è pari, se esistono i limiti

$$\lim_{x\to 0^+} f_\alpha(x)\,, \qquad \lim_{x\to 0^-} f_\alpha(x)\,,$$

tali limiti sono uguali. È sufficiente allora valutarne uno dei due. Si ha ad esempio

$$\lim_{x\to 0^+} f_\alpha(x) = 0 \qquad \text{se } \alpha > 0\,.$$

Poiché il nostro parametro può muoversi nell'insieme $(0, +\infty)$, per ogni scelta del parametro $\alpha > 0$ si ha che

$$\tilde{f}_\alpha(x) = \begin{cases} f_\alpha(x) & \text{se } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \qquad \text{è continua in } \mathbf{R}.$$

Chiaramente la funzione così estesa è derivabile e di calsse C^1 nell'insieme $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Rimane da vedere se, ed eventualmente per quali valori di α, $\tilde{f}_\alpha$ è derivabile in 0 e tale derivata è continua. Se esiste la derivata di $\tilde{f}_\alpha$ in 0 è data da

$$\lim_{h\to 0} \frac{\tilde{f}_\alpha(h) - \tilde{f}_\alpha(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|^\alpha \big(1+\log|h|\big)^2}{h}\,.$$

Tale limite esiste, finito, se e solo se $\alpha > 1$ e inoltre tale limite è 0, quindi

$$\tilde{f}'_\alpha(0) = 0 \qquad \text{se e solo se } \alpha > 1\,.$$

Per vedere se la funzione è estendibile ad una funzione di classe C^1 si può fare un ragionamento analogo a quanto fatto per studiare la contiuità. L'analogia sta nel fatto che anche la derivata f'_α avrà una simmetria, poiché f_α è pari, f'_α risulterà dispari. Calcoliamo la derivata di $\tilde{f}_\alpha$ per $x > 0$:

$$\tilde{f}'_\alpha(x) = f'_\alpha(x) = x^{\alpha-1}\Big[\alpha\,(1+\log x)^2 + 2\,(1+\log x)\Big]\,.$$

Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} \big[\alpha\,(1+\log x)^2 + 2\,(1+\log x)\big] = +\infty$$

l'unica speranza per avere $\lim_{x\to 0^+} f'_\alpha(x)$ finito è che

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-1} \quad \text{sia } 0\,, \quad \text{cioè } \alpha > 1\,.$$

Conclusione: per $\alpha > 1$, e solo per tali valori, $\tilde{f}_\alpha$ è continua, derivabile e la sua derivata è continua.

2. Il risultato è $\lim_{x\to 0} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = e$. Vediamo due svolgimenti.

   (a) Possiamo sviluppare la funzione $\cos x + \operatorname{sen} x$ in 0

   $$\cos x + \operatorname{sen} x = \Big(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\Big) + \Big(x + o(x^2)\Big) = 1 + x + o(x)\,.$$

   Senza sviluppare l'esponente si può scrivere (dove l'$o(x)$ denota la stessa funzione)

   $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} &= \lim_{x\to 0} (1 + x + o(x))^{\frac{1}{x+o(x)}\,\frac{x+o(x)}{\operatorname{sen} x}\,\cos x} = \\ &= \lim_{x\to 0} \Big[(1+x+o(x))^{\frac{1}{x+o(x)}}\Big]^{\frac{x+o(x)}{\operatorname{sen} x}\,\cos x} = e\,.\end{aligned}$$

(b) Oppure si può raccogliere $\cos x$ e ottenere

$$(\cos x + \operatorname{sen} x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = (\cos x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} \left(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} .$$

Si ha che

$$\lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = e\,,$$

basta quindi studiare $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}$. Scrivendo

$$\cos x = 1 + (\cos x - 1)$$

e sviluppando al secondo ordine il coseno si ha

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)\,.$$

Per cui si ha

$$\begin{aligned}(\cos x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^{\frac{1}{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}\,\frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{\operatorname{sen} x}\,\cos x} .\end{aligned}$$

Allora poiché

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0^+} \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^{\frac{1}{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}} = e\,,\\ &\lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{\operatorname{sen} x} = 0\,,\\ &\lim_{x\to 0^+} \cos x = 1\end{aligned}$$

si ha che

$$\lim_{x\to 0^+} \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^{\frac{1}{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}\,\frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{\operatorname{sen} x}\,\cos x} = 1\,.$$

3. (a) Il primo limite $\displaystyle\lim_{c\to 0+} \int_c^{\pi/2} \frac{\cos x}{x^{5/2}}\,dx$ è $+\infty$ dal momento che la funzione

$$\frac{\cos x}{x^{5/2}}$$

è asintotica a $\dfrac{1}{x^{5/2}}$ in 0 e

$$\lim_{c\to 0+}\int_c^{\pi/2}\frac{1}{x^{5/2}}\,dx=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{x^{5/2}}\,dx=+\infty\,.$$

Per quanto riguarda $\displaystyle\lim_{c\to 0+}\int_c^{\pi/2}\frac{\cos x\,\log(1+x)}{e^x\sqrt{x^5+x^{10}}}\,dx$ il risultato è lo stesso, poiché anche $\frac{\cos x\,\log(1+x)}{e^x\sqrt{x^5+x^{10}}}$ è asintotica a $\dfrac{1}{x^{5/2}}$ in 0.

(b) Per il secondo si osservi che

$$\frac{2}{3}\frac{d}{dx}\frac{\cos x}{x^{3/2}}=-\frac{2}{3}\frac{\operatorname{sen} x}{x^{3/2}}-\frac{\cos x}{x^{5/2}}$$

da cui, integrando tra c e $\pi/2$,

$$\frac{2}{3}\frac{\cos c}{c^{3/2}}-\int_c^{\pi/2}\frac{\cos x}{x^{5/2}}\,dx=\int_c^{\pi/2}\frac{2}{3}\frac{\operatorname{sen} x}{x^{3/2}}\,dx\,.$$

Dal momento che

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x^{3/2}}$$

è asintotica a $\dfrac{1}{x^{1/2}}$ in 0 si ha che il secondo limite esiste ed è finito.

4. Chiamando x la quantità $\cos t$ e poiché $\operatorname{sen}^2 t=\cos^2 t-1$ si ha:

$$\int_0^{\pi/2}\frac{2\operatorname{sen} t\cos t}{\operatorname{sen}^2 t+\cos t+2}\,dt=\int_0^1\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx\,.$$

Il polinomio x^2+x+1 non ha zeri reali, per cui, scrivendo

$$\frac{2x}{x^2+x+1}=\frac{2x}{x^2+x+1}-\frac{1}{x^2+x+1}\,,$$

è sufficiente valutare la primitiva di $\frac{1}{x^2+x+1}$, dal momento che

$$\int_0^1\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx=\log(x^2+x+1)\Big|_0^1=\log 2\,.$$

Per fare ciò si osservi che

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right]\,.$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

si ottiene

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{4}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{y^2+1}\,dy =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]\Bigg|_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Sommando questa quantità a $\log 2$ si ottiene il risultato del primo integrale.

Per quanto riguarda il secondo si procede il maniera simile poiché

$$\int_{-1}^1 \frac{2x}{x^2+|x|+1}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{2x}{x^2-x+1}\,dx + \int_0^1 \frac{2x}{x^2+x+1}\,dx\,.$$

Ci limitiamo a calcolare il secondo che, analogamente a prima, è

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^0 \frac{2x}{x^2-x+1}\,dx &= \int_{-1}^0 \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2-x+1}\,dx = \\
&= \log(x^2-x+1)\Big|_0^1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3}}^{-1/\sqrt{3}} \frac{1}{1+y^2}\,dy = \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \operatorname{arctg}(-\sqrt{3})\right) = \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}$$