

Soluzione della traccia del compito del 20.9.2012

1. La funzione f è definita per ogni valore di $x \in \mathbf{R}$. Non così per la sua derivata. Infatti

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2 + 2x - 3) + 2x^{1/3}(2x + 2)x^{2/3}}{3x^{2/3}(x^2 + 2x - 3)^{1/3}} = \\ &= \frac{5x^2 + 6x - 3}{3x^{2/3}(x^2 + 2x - 3)^{1/3}} \end{aligned}$$

e, poiché

$$x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3),$$

si ha che, a priori, la derivata prima potrebbe non essere definita per i valori $x = -3$, $x = 0$, $x = 1$. Il polinomio $5x^2 + 6x - 3$ si annulla per i valori

$$\frac{-3 - \sqrt{24}}{5}, \quad \frac{-3 + \sqrt{24}}{5}.$$

Quindi il dominio di f' è

$$D = \{x \in \mathbf{R} \mid x \neq -3 \vee x \neq 0 \vee x \neq 1\}.$$

Poiché $\sqrt{24} < \sqrt{25} = 5$ e $\sqrt{24} > \sqrt{16} = 4$ e si ha quindi

$$-3 < \frac{-3 - \sqrt{24}}{5} \quad \text{e} \quad 0 < \frac{-3 + \sqrt{24}}{5} < 1$$

si conclude che

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } -3 < x < \frac{-3 - \sqrt{24}}{5} \quad \text{o} \quad \frac{-3 + \sqrt{24}}{5} < x < 1, \\ = 0 & \text{se } x = \frac{-3 - \sqrt{24}}{5} \quad \text{o} \quad x = \frac{-3 + \sqrt{24}}{5}, \\ > 0 & \text{altrimenti (in } D) . \end{cases}$$

Vediamo il comportamento di f' nei punti in cui non è definita:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3^-} f'(x) &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow -3^+} f'(x) &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) &= +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) &= +\infty, \end{aligned}$$

per cui -3 e 1 sono punti di cuspidè, 0 è un punto di flesso a tangente verticale. Il grafico è abbozzato in figura.

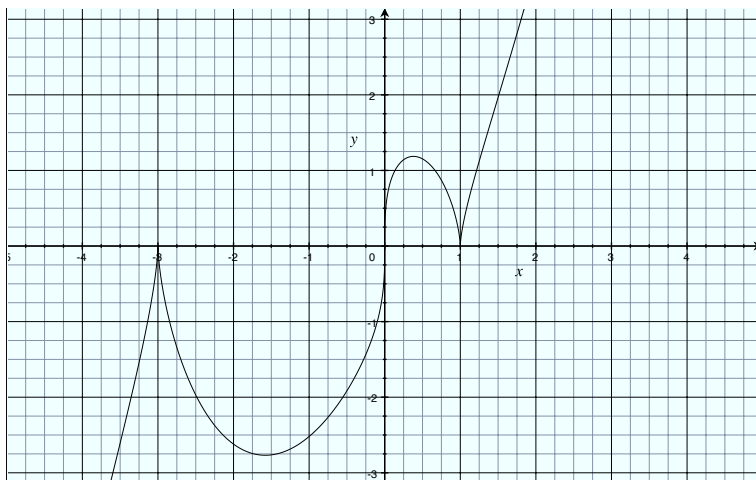


Figure 1:

2. Si ha, usando lo sviluppo di Taylor al prim'ordine per la funzione $x \mapsto (1+x)^\alpha$ in $x=0$:

$$\begin{aligned}
 x^{1/3}(x^2+2x-3)^{2/3} - x^{5/3} &= x^{1/3} x^{4/3} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)^{2/3} - x^{5/3} = \\
 &= x^{5/3} \left[\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)^{2/3} - 1 \right] = \\
 &= x^{5/3} \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right) + o\left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right) - 1 \right] = \\
 &= x^{5/3} \left[\frac{2}{3} \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right].
 \end{aligned}$$

Questo non basta per concludere: non possiamo a priori dire nulla riguardo il termine

$$x^{5/3} o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Per cui sviluppiamo fino al secondo ordine:

$$\begin{aligned}
 x^{5/3} \left[\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)^{2/3} - 1 \right] &= \\
 &= x^{5/3} \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right) - \frac{1}{9} \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)^2 + o\left(\left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)^2\right) - 1 \right] = \\
 &= x^{5/3} \left[\frac{4}{3x} - \frac{22}{9x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right].
 \end{aligned}$$

A questo punto si conclude che $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{1/3}(x^2 + 2x - 3)^{2/3} - x^{5/3}) = +\infty$.

3. Usando lo sviluppo di Taylor al prim'ordine per la funzione $x \mapsto \log(1+x)$ in $x = 0$ si ottiene

$$\left(\frac{1}{n^2} - \log \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \right) = \frac{1}{n^4} + o \left(\frac{1}{n^4} \right) .$$

Poiché

$$0 < n^2 - \log(1 + n^2) < n^2 + \log(1 + n^2)$$

ed entrambe le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left[\frac{1}{n^4} + o \left(\frac{1}{n^4} \right) \right] , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + n^2) \left[\frac{1}{n^4} + o \left(\frac{1}{n^4} \right) \right]$$

convergono, si ha che anche la serie di partenza è convergente.

Oppure: poiché

$$\begin{aligned} (n^2 - \log(1 + n^2)) \left(\frac{1}{n^2} - \log \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \right) &= \\ &= n^2 \left(1 - \frac{\log(1 + n^2)}{n^2} \right) \left(\frac{1}{n^4} + o \left(\frac{1}{n^4} \right) \right) = \\ &= \left(1 - \frac{\log(1 + n^2)}{n^2} \right) \left(\frac{1}{n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \end{aligned}$$

e questo termine è asintotico a $1/n^2$ per il criterio del confronto asintotico si conclude.

Ancora usando il criterio del confronto asintotico, confrontando questa volta il termine n -esimo con $1/n$, si conclude che la serie al punto (b) diverge positivamente.

4. Il primo dei due integrali è divergente. Infatti $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$, quindi in $(0, 1)$ è definita, ma $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 2x - 3) = -\infty$. La funzione data è ovviamente asintotica (in $x = 1$) a $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ ed è quindi negativamente divergente.

Per quanto riguarda il secondo si ha, analogamente, che in $x = 1$ la funzione è asintotica a $x \mapsto \frac{1}{(x-1)^{2/3}}$ e in $x = 0$ è asintotica a $x \mapsto \frac{1}{x^{1/3}}$. Di conseguenza l'integrale è convergente.