Avvertenze Questi esercizi sono in gran parte tratti da testi di esame di vari corsi (Analisi Matematica I per Matematica, Fisica, Informatica, Ingegnerie). Pertanto si tratta di esercizi di livello estremamente disomogeneo, che non sono particolarmente indicati come "primi esercizi" da svolgere su ogni singolo argomento. Si consiglia quindi di affrontare prima esercizi introduttivi dai vari testi consigliati, e di svolgere i problemi qui presentati solo in un secondo momento. Un asterisco **(*)** denota esercizi particolarmente impegnativi. Un triangolino (△) denota esercizi il cui svolgimento richiede l'uso di nozioni non ancora svolte nel corso.

1 Domini di funzioni di una variabile

Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni:

1.1 $f(x) = \sqrt{3 + 4^{x+1/2} - 4^{2x}}$

1.2 $f(x) = \left(\log_3 \log_4(x^2 - 5)\right)^{-4}$

1.3 $f(x) = \sqrt{\arccos \log_2(\operatorname{sen} e^x) - \frac{2\pi}{3}}$

1.4 $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{3 - x - |6x^2 - 13x - 15|}}$

1.5 $f(x) = \dfrac{1}{\log_2\left(\sqrt{x^2-1} - 3x + 8\right) + \log_{1/4}(x^2 - 4x + 4)}$

1.6 $f(x) = \sqrt[3]{\log_{\operatorname{sen}^4 x}(\ln(x-4))} + \sqrt[4]{\log_{\operatorname{sen}^3 x}(\ln(x-4))}$

1.7 $f(x) = \sqrt{1 + \log_{2/\pi}\left(\arccos \dfrac{x}{x-1}\right)}$

1.8 $f(x) = \sqrt{\log_{1/2} \log_2 (2 \operatorname{sen}^2 x - \cos x)}$

1.9
$f(x) = \log_2 \operatorname{arcsen} \dfrac{3x^2 - x^3}{2} + \sqrt{\dfrac{3 \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1}{\cos x - \operatorname{sen} x + 1}}$

1.10 $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{2 + \cos x}{4 - 2 \operatorname{sen} x - \cos x}$

1.11 $f(x) = \operatorname{arcsen} \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{4 \operatorname{sen} x + 1}{2 \operatorname{sen} x + 2\cos x}$

1.12 $f(x) = \arccos\left(\log_2(-\cos x) - \log_4\left(\operatorname{sen} x + \dfrac{1}{2}\right)\right)$

1.13 $f(x) = \log\left(\dfrac{|\operatorname{tg} x| - |\operatorname{sen} x|}{x - e \log x}\right)$

1.14 $f(x) = \log \dfrac{|\cos x| - \operatorname{sen} 2x}{\sqrt{\pi^2 - 9 \operatorname{arctg}^2 \left|\dfrac{x\sqrt{3}}{x+1}\right|}}$

2 Iniettività e suriettività

Dire se le seguenti funzioni sono iniettive e/o suriettive. Se non sono suriettive, cercare di restringerne appropriatamente il codominio in modo da renderle tali. Se non sono iniettive, cercare di restringerne il dominio in modo da renderle iniettive.

2.1 $f : \left[\frac{7}{6}\pi, \frac{5}{3}\pi\right] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \cos x + 2x$.

2.2 $f : [1, 4) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x - 2|$.

2.3 $f : [0, 2) \to [-1, 1]$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1], \\ x - 2 & \text{se } x \in (1, 2). \end{cases}$$

3 Manipolazioni di grafici di funzioni

Si parta da un grafico già noto di una funzione $f(x)$, ad esempio prendendolo da un libro di esercizi sullo studio di funzioni. Senza svolgere calcoli, disegnare i grafici delle seguenti funzioni. Successivamente si usi un programma su PC per disegnare il vero grafico e verificare il risultato.

3.1 $f_1(x) = f(-x)$.

3.2 $f_2(x) = f(3 - x)$.

3.3 $f_3(x) = f(3 + x)$.

3.4 $f_4(x) = f(|x|)$.

3.5 $f_5(x) = f(|x - 2|)$.

3.6 $f_6(x) = f(x^2)$.

3.7 $f_7(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

3.8 $f_8(x) = f\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

3.9 $f_9(x) = f\left(\dfrac{1}{|x-1|}\right)$.

3.10 $f_{10}(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

3.11 $f_{11}(x) = \dfrac{1}{(f(x))^2}$.

3.12 $f_{12}(x) = 1 + \dfrac{1}{|f(x)|}$.

3.13 $f_{13}(x) = f(x)^2$.

3.14 $f_{14}(x) = \dfrac{1}{1-f(x)}$.

3.15 $f_{15}(x) = f(\operatorname{arctg} x)$.

3.16 $f_{16}(x) = \operatorname{arctg} f(x)$.

3.17 $f_{17}(x) = f(\operatorname{sen} x)$.

3.18 $f_{18}(x) = \operatorname{sen} f(x)$.

3.19 $f_{19}(x) = \ln f(x)$.

3.20 $f_{20}(x) = f(\ln x)$.

3.21 $f_{21}(x) = f(\ln |x|)$.

4 Estremo superiore e inferiore

Calcolare estremo superiore ed inferiore dei seguenti insiemi di numeri reali, e dire se si tratta rispettivamente di un massimo o di un minimo:

4.1 $E = \left\{x = \operatorname{sen} t\,,\ t \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]\right\}$

4.2 $E = \left\{x = (-1)^n\ \dfrac{2n-1}{n}\,,\ n \in \mathbb{N}\right\}$

4.3 $E = \left\{x = (-1)^n\ \dfrac{2n+1}{n}\,,\ n \in \mathbb{N}\right\}$

4.4 $E = \left\{x = \dfrac{n}{n^2+20}\,,\ n \in \mathbb{N}, n \geq 1\right\}$

4.5 $E = \left\{x = \dfrac{n^2+5n+1}{n^2}\,,\ n \in \mathbb{N}\right\}$

4.6 $E = \left\{x = \operatorname{arctg} \dfrac{n}{n-1}\,,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2\right\}$

4.7 $E = \left\{x = \sqrt{1 - \dfrac{1}{2n+5}}\,,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$

4.8 $E = \left\{x = \dfrac{2}{m} - \dfrac{1}{n^2}\,,\ n, m \in \mathbb{N}\right\}$

4.9 $E = \left\{x = \dfrac{m^2-3}{n+1}\,,\ n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$

4.10 (*) $E = \{x = \operatorname{sen} n\,,\ n \in \mathbb{N}\}$

4.11 $E = \left\{x = \dfrac{t^2}{t^2+1}\,,\ t \in \mathbb{R}\right\}$

4.12

$$E = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\,,\ n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{\frac{5n+7}{2n+1}\,,\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

4.13 Data la successione

$$a_n = n2^n - 3n!\,,$$

dimostrare per induzione che $a_n < 0$ per ogni $n \geq 4$. Calcolare estremo inferiore ed estremo superiore della successione $\{a_n\}$.

Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore delle seguenti successioni e dire se sono rispettivamente massimo e minimo ($n = 1, 2, \ldots,$ se non precisato diversamente)

4.14 $a_n = \begin{cases} e^{-(n-4)^2} & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \dfrac{3}{n^2-2n+2} - 1 & \text{se } n \text{ è dispari;} \end{cases}$

4.15 $a_n = \begin{cases} \dfrac{n-3}{4n+4} & \text{se } n \text{ è pari,} \\ e^{-(n-5)^2} & \text{se } n \text{ è dispari;} \end{cases}$

4.16 $a_n = \left(\cos^2 \dfrac{n\pi}{2} - \dfrac{1}{2}\right) \dfrac{n-1}{n^2+2}$

4.17 $a_n = \operatorname{arctg} \dfrac{n + (-1)^n n - 3}{n^2+3}$

4.18 $a_n = \left[(-1)^n \dfrac{n+1}{n}\right] \operatorname{arcsen} \dfrac{1}{n} \exp\left(-\cos \dfrac{\pi}{n+1}\right)$, dove $\exp(t) = e^t$, $[t]$ denota la parte intera di t, cioè il più grande $k \in \mathbb{Z}$ tale che $k \leq t$;

4.19 $a_n = (1 - \cos(n\pi))\, n + \dfrac{1}{n}$

4.20 $a_n = (\cos(n\pi) + 1) \operatorname{arcsen} \dfrac{1}{n} + $
$$+ (-1)^n \frac{\ln(1 + e^{-n}) + n}{n}$$

5 Limiti di funzioni

Verificare, usando la definizione di limite, che

5.1 $\lim_{x\to 4} x^2 = 16$

5.2 $\lim_{x\to -3} x^4 = 81$

5.3 $\lim_{x\to +\infty} \frac{x+1}{x-4} = 1$

5.4 $\lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^-} \operatorname{tg} x = +\infty$

5.5 $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3-4x^2}{2-3x} = -\infty$

5.6 $\lim_{x\to 5} \frac{x^3-4x^2}{2-3x} = -\frac{25}{13}$

5.7 $\lim_{x\to (\frac{2}{3})^+} \frac{x^3-4x^2}{2-3x} = +\infty$

Calcolare i seguenti limiti:

5.8 $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{2+x^3} - \sqrt{1+2x^2+x^3}\right)$

5.9 $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt[3]{2+x^3} - \sqrt[3]{1+2x^2+x^3}\right)$

5.10 $\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(x+2)-\log_a 2}{x}$

5.11 $\lim_{x\to +\infty} \frac{\log_2(e^x+1)}{x+\operatorname{sen} x}$

5.12 $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{tg}^3 x}-1}{x\left(\cos x - e^{x^2}\right)}$

5.13 $\lim_{x\to 0} \frac{e-(1+x)^{1/x}}{x}$ *Nota:* per questo esercizio è necessario l'uso della formula di Taylor.

5.14 $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\operatorname{arctg} x)^x}{e-e^{\cos^4 x}}$

5.15 $\lim_{x\to 0^+} \left(1+\operatorname{sen}(x^\alpha)\right)^{1/x}$ al variare di $\alpha > 0$

5.16 $\lim_{x\to 0} \frac{(\cos x)^{\tan x}-1}{x^3}$,

5.17 $\lim_{x\to +\infty} x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{3}{2}}$

5.18 $\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{3}}(e^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{2}}$

5.19 $\lim_{x\to 0} \sin(x^{\frac{2}{5}}) \frac{\log(1+x^{\frac{1}{5}})}{4x^{\frac{3}{5}}}$

5.20 $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x^3 - 1}{\sin x^5}$

5.21 $\lim_{x\to +\infty} \sin(\frac{1}{x^{\frac{4}{7}}})(\log(1+\frac{e}{x^{\frac{2}{7}}}))^{-2}$

5.22 $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x}\sqrt{(1+\frac{1}{x})^{\frac{1}{4}}-1}$

5.23 $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}}-1}{e^{x^{\frac{3}{2}}}-1}$

5.24 $\lim_{x\to 0} \frac{|4^x-1-(\log 2)\sin x|}{x^3-|x|^2}$

5.25 $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\pi}{2}+\tan x - \arctan\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\log x}}$

5.26 Determinare c in $\mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = 4.$

5.27 Mostrare che la funzione $f(x) = (1+|\operatorname{sen} x|)^{-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}$ è infinitesima di ordine superiore a $|x|^k$ per $x \to 0$, qualunque sia $k > 0$.

5.28 Ordinare per ordine decrescente di infinito, per $x \to +\infty$, le seguenti funzioni:

$$f(x) = e^{\frac{x^2+1}{\sqrt{x-2}}}, \qquad g(x) = 2^{\frac{4(1-\cos(1/x))}{\ln(1+x^{-7/2})}},$$
$$h(x) = x^{2x}, \qquad k(x) = \left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^{x^2}.$$

5.29 Ordinare i seguenti infiniti, per $x \to 0^+$:

$$f(x) = \frac{\ln\left(1-\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)}{x^2}, \quad g(x) = \log_2\left(3+\frac{1}{x^4}+2^{1/x}\right),$$
$$h(x) = \frac{\pi - 2\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}}{\operatorname{sen}^4 x}.$$

5.30 Ordinare per ordine crescente di infinito (per $x \to +\infty$) le seguenti funzioni:

$f(x) = (1+\sqrt{x})^\pi$,
$g(x) = x\ln(x+5)$,
$h(x) = x^{\arctan(\ln(\ln x))}$,
$k(x) = [(x+1)\ln x]^5 \left(\exp(-\frac{1}{2x^2}) - \cos(\frac{1}{x})\right)$.

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$; calcolare l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ delle seguenti funzioni:

5.31 $\left(\frac{1-\sqrt{1-x}}{-1+\sqrt{1+x}}\right)^\alpha - 1$

5.32 $f(x) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}\frac{x}{1+x\operatorname{tg} x}$

Calcolare l'ordine di infinitesimo, per $x \to +\infty$, delle seguenti funzioni:

5.33 $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right) - \sin\frac{1}{x}$

5.34 $g(x) = \arctan^2(x^2+x+1) - \arctan^2 x^2$

6 Continuità

Determinare il dominio delle seguenti funzioni e dire, giustificando la risposta, se sono estendibili con continuità nei punti nei quali non sono definite

6.1 $f(x) = \arctan \dfrac{1}{x^2} \cos \dfrac{4}{2-x}$

6.2 $f(x) = \arctan \dfrac{4}{x-1} \operatorname{sen} \dfrac{3}{x^2-4}$

6.3 $f(x) = e^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$

6.4 $f(x) = \dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$

6.5 $f(x) = \left(2\operatorname{sen}^2 x\right)^{\frac{1}{\cos 2x}}$

6.6 $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}}{x}$

6.7 $g(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

6.8 $h(x) = \ln(|\operatorname{sen}(x)|) - \ln(|x|)$

6.9 Sia
$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{se } x < 1, \\ ax+b & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$
Che relazione devono soddisfare i numeri reali a e b affinché f sia continua? Che relazione devono soddisfare a e b affinché f sia invertibile?

6.10 Sia
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(\pi(x+\ln(x)))}{\ln(x)} & \text{se } x \in (0,1), \\ a & \text{se } x = 0, \\ b & \text{se } x = 1. \end{cases}$$
Determinare a e b affinché f sia continua.

6.11 (*) Sia
$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x \in [-1,1] \setminus \mathbb{Q}, \\ \dfrac{1}{2} & \text{se } x \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$
Determinare l'insieme di continuità di f.

Determinare b in $\mathbb{R}$ in modo che le seguenti funzioni siano continue:

6.12 $f(x) = \begin{cases} |x-2| & x \leq 2, \\ -b+|x-5| & x > 2. \end{cases}$

6.13 $g(x) = \begin{cases} b\cos x & x < 0, \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & x \geq 0, \end{cases}$

6.14 $h(x) = \begin{cases} 2^x + b & x \leq 2, \\ \dfrac{\operatorname{sen}(4x-8)}{2b-b\,x} & x > 2, \end{cases}$

6.15 Sia
$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{\lambda}{(x-3)^2}\right) & \text{se } x \neq 3, \\ 0 & \text{se } x = 3. \end{cases} \qquad (\exp(x) = e^x)$$
Studiarne la discontinuità al variare di λ in $\mathbb{R}$.

7 Limiti di successioni

Applicando la definizione di limite di successione, verificare ciascuna delle seguenti uguaglianze:

7.1 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{3n+4} = \frac{1}{3}$.

7.2 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{16n-3}{n}} = 4$.

7.3 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{16n-3}{n^2}} = 0$.

7.4 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{8n^2+3}{n^2}} = 2$.

7.5 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n n+1}{n^2+1} = 0$.

7.6 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n n+1}{n^2-1} = 0$.

Calcolare, se esistono, i seguenti limiti di successioni

7.7 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \operatorname{tg} \frac{n\sqrt{n}+1}{2n\sqrt{n}-\sqrt{n}}$

7.8 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n\sin n+5}{n^2+\sqrt{n}}$

7.9 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (2^n-n)$

7.10 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n+4^n}{3^{n+1}+5^n}$

7.11 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n2^n}{3^n}$

7.12 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2n^2+n^2\cos n}$

7.13 $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n!}{3^{n^2}}$

7.14 $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n!}{3^{2n}}$

7.15 $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+(\log n)^{1000}-n\operatorname{sen}(n^{500})}$

7.16 $\lim_{n\to+\infty} \frac{n\log n}{2^n}$

7.17 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\log n+3^n-n^3}$

7.18 $\lim_{n\to+\infty} e^n \operatorname{sen}\frac{1}{n^{100}}$

7.19 $\lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)}{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}$

7.20 $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n}+2}\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}$

7.21 $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{tg}\frac{\pi n^2}{4n^2-5n}$

7.22 $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{tg}\frac{\pi n^2}{2n^2-5n}$

7.23 $\lim_{n\to+\infty} (3n+2)\operatorname{sen}\frac{\pi n-5}{n+7}$

7.24 $\lim_{n\to+\infty} (2n+5)\cos\frac{\pi n^2+7}{2n^2+n}$

7.25 $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4}{n+1}\operatorname{sen}\frac{\log n}{n^4}$

7.26 $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)^n}\operatorname{sen}\frac{1}{n}$

7.27 $\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$

7.28 $\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

7.29 $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\sin^2\frac{1}{n}\right)^n$

7.30 $\lim_{n\to+\infty} \cos^n\frac{1}{n}$

7.31 $\lim_{n\to+\infty} \cos^{n^2}\frac{1}{n}$

7.32 $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^n$

7.33 $\lim_{n\to+\infty} \left(n^{\sqrt{n}}-2^n\right)$

7.34 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left(\operatorname{sen}\frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{4n+3}}\right)$

7.35 $\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}+e^{-n}\right)$

7.36 $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\log(2n)+1}{\log(2n)-5}\right)^{e^n}$

7.37 $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2-n!}{3-n!}\right)^{(n+2)!}$

7.38 $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4-3\log n}{2-3\log n}\right)^{e^{n+2}}$

7.39 $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n!-1}{n!+2}\right)^{\log 5n}$

7.40 $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\log\left(n^2+1\right)-\log\sqrt[3]{n^2+2}\right)\operatorname{sen} n$

7.41 $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n}(n+2)}(\operatorname{sen} n-\cos n)$

7.42 $\lim_{n\to+\infty} \left(\cos\frac{1}{n^2}\right)^{\sqrt{4n^8+7n+3}}$

7.43 $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\log n}\left(n^{1/n}-1\right)$

7.44 $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{2n^2+5}\right)$

7.45 $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n+5}\right)$

7.46 $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{5}{2}}+n^2(\log n)^3-n(\log n)^5}{\log\log 2n+n^{\frac{1}{2}}(n^4+\log n)^{\frac{1}{2}}}$

7.47 $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2e^{3n}n!+\sin(n!)}{n^n+e^{3n}}$

7.48 $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{(\log n)^3}+e^{(\log n)^2}}{1+(\log n)^n}$

7.49 $\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+e^{\frac{2}{3}n})^{\frac{3}{2}}+3^n}{(1+2^n)^3+e^n}$

7.50 $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n-5}{n+1}\right)^n$

7.51 $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\log(n^6+\sqrt{n})}$

7.52 $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\log(1+e^n)}$

7.53 $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+5n}-n\right)$

7.54 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 2^n}{(n+1)!}$

7.55 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2n+(-1)^n}}{\sqrt{2n-(-1)^n}}$

7.56 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{(n+5)^2}$

7.57 (*) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!}$

7.58 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{e^n+\log n}$

7.59 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(n^{\sqrt{n}} - (\sqrt{n})^n\right)$

7.60 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2+(\cos n)n\log n}{(3+n)\sqrt{n^2+1}}$

7.61 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(2-\frac{3}{n}\right)^{\log n}$

7.62 Supponiamo che $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_{2n} \neq \lim_{n\to+\infty} a_{2n-1}$. Cosa si può concludere su $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n$?

7.63 Supponiamo che $\{a_{2n}\}$ e $\{a_{2n-1}\}$ siano crescenti. Si può concludere che $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n$ esiste?

7.64 Supponiamo che $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = l \in \mathbb{R}$. Quali delle seguenti affermazioni sulla successione $\{a_{n^2}\}$ sono vere, e perché?

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_{n^2} = l$;

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_{n^2} = \left(\frac{l}{2}\right)^2$;

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_{n^2}$ non necessariamente esiste, ma se esiste è pari a l;

d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_{n^2}$ non necessariamente esiste, e se esiste può assumere anche valori distinti da l.

7.65 Data la successione $a_n = [(-1)^n+1]\,\dfrac{n}{\log n}$, $n \geq 2$, determinarne l'estremo superiore e inferiore e stabilire se ammette limite.

8 Derivate

8.1 Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = x^2+2x$ nel punto $(1,3)$.

Studiare la derivabilità delle seguenti funzioni

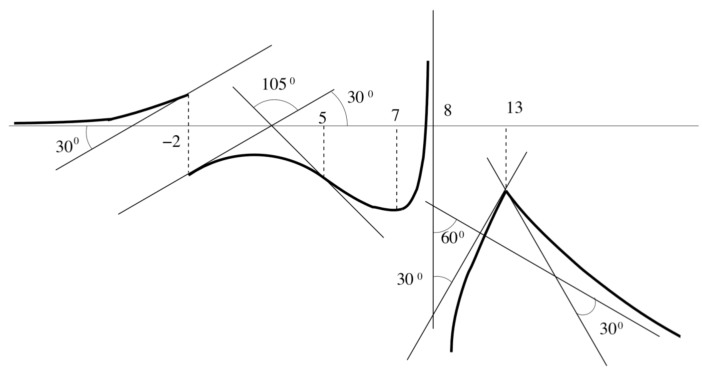
8.2 $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{4/3}$

8.3 $f(x) = \sqrt[3]{\operatorname{sen}(x^4)}$

8.4 Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tale che $|f(x)| \leq x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. f è continua in $x=0$? E' derivabile in $x=0$?

8.5 Stabilire l'insieme di definizione e calcolare la derivata della funzione $\sqrt{\log_{\frac{\pi}{2}}(2\arcsin x)-1}$

8.6 Disegnare il grafico di $f'(x)$, se $f(x)$ ha il seguente grafico:



Grazie al Prof. R. Magnanini (Univ. Firenze) per il grafico.

9 Massimi e minimi assoluti

Trovare, se esistono, massimo e minimo assoluti delle seguenti funzioni nell'insieme a fianco indicato

9.1 $f(x) = x\sqrt{|x^2-x|} - x|x|$ in $[-2,2]$.

9.2 $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \left|x+\dfrac{1}{2}\right|$ in $[-3/4, 1]$.

9.3 $f(x) = \left|\dfrac{x^2-1}{x-3}\right| - 2x$ in $[-2,2]$

9.4 $f(x) = \dfrac{|x^2-1|-|x|}{x+2}$ in $[-1,2]$

10 Studi di funzioni

Studiare le seguenti funzioni (inclusi: dominio, eventuale periodicità, eventuali simmetrie, limiti, continuità, derivabilità, crescenza, decrescenza, estremi relativi ed assoluti), asintoti obliqui, concavità e convessità, flessi, e disegnarne approssimativamente il grafico.

10.1 $f(x) = \operatorname{sen} x\, e^{\sqrt{2}\cos x}$

10.2 $f(x) = \exp\left(\dfrac{3}{2(\ln x)^2}\right)$

10.3 $f(x) = x(\ln|x| - 1)$

10.4 $f(x) = x^2\left(\ln|x| - \dfrac{1}{2}\right)$

10.5 $f(x) = x^{1/3} - 2x^{-2/3}$

10.6 $f(x) = \ln 2 - \ln(e^{2x} - 5e^x + 6)$

10.7 $f(x) = \sin(2x) + (2\sqrt{2} + 4)\cos x - 2(\sqrt{2} + 1)x$

10.8 (△) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t}{\sqrt[4]{t^4 + t^2 + 1}}\, dt$

10.9 $f(x) = \dfrac{1}{4}\left(37x + 2x^2 + 9\ln|x|\right)$

10.10 $f(x) = x - |x^2 + 8x + 1|^{1/2}$

10.11 $f(x) = x^2 - 2x + |x|$

10.12 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1$

10.13 $f(x) = xe^{-x+1}$

10.14 $f(x) = xe^{x^2}$

10.15 $f(x) = x^{2/3}(1 - x)$

10.16 $f(x) = x\,\dfrac{2\ln x + 3}{\ln x + 1}$

10.17 $f(x) = (12 - x^2)\,(x^2 - 8)^{1/3}$

10.18 $f(x) = e^{-2/x}\,(|x| + |x - 1|)$

10.19 Determinare il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione $3x^2 + 3\cos^2 x - x^4 = 1$

11 Formula di Taylor (△)

11.1 Trovare la derivata sesta, nel punto $x = 0$, della funzione $f(x) = (1 + \sin^2 x)^{\cos x^2}$. Fare la stessa cosa per la derivata 351-esima.

Calcolare i seguenti limiti:

11.2 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}\sqrt{1 + 2x} - 1}{4x}$

11.3 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 \tan x}$

11.4 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} + 2\cos x - 3}{x \sin x^3}$

11.5 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{x^2}}{\sin^2 x}$

11.6 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{\tan x - x}$

11.7 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1 + \sqrt{x}) - \sqrt{x} + x^2 \log x}{\cos\sqrt{x} - 1}$

11.8 $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x - \frac{1}{x}}{\log(1 + e^{x^{-3}}) - \log 2}$

11.9 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x - 2 + 2\cos x}{x\ln(1 + x) - x^2}$

11.10 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2\big(\ln(1 + x) - x\big)}{x(e^x - 1) - 2 + 2\cos x}$

11.11 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x\cos x} - \log^2(1 + \sqrt{x}) - 1}{\sqrt{\operatorname{sen} x - x\cos x}}$

11.12 $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\left[\left(1 + \frac{\ln 10}{x}\right)^x - 10\right],$

11.13 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left[(1 + \sin^2 x)^{\operatorname{cotg} x}\right] - x}{x^3}.$

11.14 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^5 e^{x^3} - \log(1 + x^5)}{(\sqrt{1 + x^4} - 1)^2}$

11.15 (∗)

$$\lim_{x\to +\infty} x^2 \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)\left[\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x + 1} - \operatorname{arctg}\sqrt[3]{x - 1}\right]$$

11.16 $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)\,,\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)\,,$ dove

$$f(x) = \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2 \operatorname{tg}^2 x}{x - \operatorname{tg} x + \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\operatorname{tg}^2 x}$$

12 Integrali (△)

Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

12.1 $\displaystyle\int \frac{dx}{(1 + x)\sqrt{|x^2 - 1|}}$

12.2 $\displaystyle\int \frac{2\cos x + 6 - 3\sin^2 x}{(2\cos x + \sin x + 2)\,\sin^2 x}\,dx$

12.3 $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x(1 + \ln x)}\,dx$

12.4 $\displaystyle\int \frac{\cos x \sin x}{(1 + \cos^2 x)(1 + \cos x)}\,dx$

12.5 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x} + 1}{x^{3/2} - 1}\,dx$

12.6 $\displaystyle\int \frac{e^x + 2}{e^x(e^x + 1)}\, dx$

12.7 $\displaystyle\int \frac{1}{\tan x - \sin x}\, dx$

Calcolare i seguenti integrali definiti:

12.8 $\displaystyle\int_{-2}^{+2} x^2 \arctan\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\, dx$

12.9 $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos x + \sqrt{\sin x - \sin^3 x}}{1 + \sqrt{\sin x}}\, dx$

12.10 $\displaystyle\int_{e^{-1/3}}^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x(2\ln x|\ln x| - \ln x - 1)}$

12.11 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{(1+\sin t)(2+\sin t)}\, dt$

12.12 $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t + e^{-t}}{e^t + 1}\, dt$

12.13 $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin 2t \ln(\sin t)\, dt$

12.14 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin t}\, dt$

12.15 $\displaystyle\int_{3\cosh 1}^{3} \frac{1}{\sqrt{t^2 - 9}}\, dt$

12.16 (∗) Calcolare, se esiste, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\int_0^{x^2/3} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$.

13 Integrali impropri (△)

Stabilire il carattere dei seguenti integrali impropri:

13.1 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^8}}$

13.2 $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{1 + \sqrt[4]{1 - x^5}}$

13.3 $\displaystyle\int_0^1 \frac{2 - \sqrt{x} - 2\cos x}{x}\, dx$

13.4 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x-3}{x^2 - \log x}\, dx$

13.5 $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \left(e^{1/\sqrt[3]{x}} - 1\right) dx$

13.6 $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \log\frac{x+1}{x-1}\, dx$

13.7 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1+e^{-x})\sqrt{x^3(x+1)}}{x^2(1+x\sqrt{x}) + 1 - \cos x}\, dx$

14 Serie (△)

Studiare la convergenza delle seguenti serie:

14.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \tan\left(\left|\frac{1}{n+1} - \sin\frac{1}{n}\right|^{\frac{2}{3}}\right)$

14.2 (∗) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{\frac{2n-1}{n^2}} e^{x^2}\, dx$

14.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n(n+\sqrt{n})}$

14.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right)$

14.5 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^3 \pi^{-\arctan(1/n)}$

14.6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)}{n^2 - 35n + 250 - \cos n}$

14.7 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(2n)!}$

14.8 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-\ln n}$

14.9 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n\ln n} + \sin\left(n\pi + \frac{1}{n}\right)\right)$

14.10 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n^2+\cos n}{n^3+1}$

14.11 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)(n\tan\frac{1}{n}-1)$

14.12 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{7n+24}{n^2+7n+12}$

14.13 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$

14.14 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^n}{2^{n^3}}$

14.15 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{3n}n!}{\sqrt{n^n}}$

14.16 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{5^n+(3\cos n)^n}$

14.17 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-n}(1+\frac{3}{n})^{n^2}$

14.18 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(\sqrt{n^{\frac{4}{3}}+1}-\sqrt{n^{\frac{4}{3}}+2})$

14.19 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2})$

14.20 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}n^2(e^{\frac{1}{n}}-1)^4$

14.21 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}n^3(e^{\frac{1}{n^3}}-1)^{\frac{4}{3}}$

14.22 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\log(1+\frac{3}{n^{\frac{1}{5}}})}{n^{\frac{3}{5}}}$

14.23 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|\cos(\frac{1}{n^2\sqrt{\log(n+1)}})-1|}{\sin\frac{1}{n\log(n+1)}}$

14.24 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3+\log(2+n^5)}{n^2+\sqrt{n}}$

14.25 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\log(1+e^{n^2})-n^{\frac{1}{3}}}{(1+n^8)^{\frac{1}{3}}(\log n)^2+\sqrt{1+n^2}}$

Al variare del parametro reale indicato, studiare il carattere delle seguenti serie:

14.26 (∗) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n\left[\cos\frac{1}{n^{3/2}}+\frac{1}{2n^\alpha}\right]}\frac{1}{2n+\sqrt{n}}$, dove $[s]=\max\{n\in\mathbf{Z}:n\le s\}$ $(\alpha>0)$.

14.27 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\tan\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\left(\sqrt[3]{8n^3+1}-2n\right)^\alpha$

14.28 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left[\log\left(\alpha+\frac{1}{n}\right)\right]^n}{\alpha^2+n^2}$

14.29 (∗) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(n\arctan\frac{x}{n}-\int_0^x\frac{n^2\,dt}{n^2+\sin^2 n+t^2}\right)$

(*Suggerimento:* si scriva l'arcotangente come un integrale)

14.30 (∗) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ln x-\int_1^x\frac{n}{\sqrt{n^2t^2+\cos^2 t}}\,dt\right]$

14.31 (∗) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\sin\frac{x^n}{n}+\arctan\frac{n}{x^n}-\frac{\pi}{2}\right)$

14.32 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\tan\frac{x}{n}-\tan\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$

14.33 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left|x+\frac{1}{4}\right|^{n^2}}{n^{2x+1}}$

14.34 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx}{x^{\frac{3}{2}}n^3+\sqrt{n+1}}$

14.35 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{nx\sin^4 x}{1+n^3|x|^3}$.

14.36 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\sqrt[3]{n^{3\alpha}+n^\alpha}-n^\alpha\right)$

14.37 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n^{10}\sin(n^2)\left[\left(\frac{7^n+3^n}{5^n+2^n}\right)^{\frac{1}{n}}-x\right]$

14.38 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2+n+1}{n^x+n^2+1}$

14.39 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\cosh\frac{n^2+n}{n^3+3}-1\right)^x$

14.40 (*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\left(\frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2}\right)^n+\left(\frac{\sqrt{2n^2+1}}{n^2}\right)^{x+\frac{1}{n}}\right\}$

14.41 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln(1+n^{2x})}{(n+\sin n)^{x^2}}$

14.42 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\sin(n\pi + \frac{\pi}{2}x)}{(n+1)^x}, \quad x \in [0,2]$

14.43 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + |x|^n}{n^2+1}$

14.44 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{|x|^n}{n}\right)$

14.45 $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^2}{(x+\frac{1}{n})^{\ln n}}$

14.46 $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\ln n}{n} x^{(\ln n)^2}$

14.47 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}|n-x^2+3x|^{nx^3}$

14.48 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{(x-\frac{1}{n})^{\ln n}}$

14.49 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (n-\sqrt[3]{n^3-2n})^x$

14.50 $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{2^n}}{1+x^{2^{n+1}}}$

14.51 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{x^2}}{(n+x)^{\sqrt{13}x}}$

14.52 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\arctan x|^{3n}}{\sqrt{n(n+1)}}$

14.53 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n^3+(x^2+2)n^2+1} - \sqrt{n^3+3xn^2-4})$

14.54 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+10}{3^n(n+5)}(x^2-1)^{3n}$

14.55 (*) Dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n(\sin 1 \sin 2 \dots \sin n)^2}{(1+x\cos^2 1)(1+x\cos^2 2)\dots(1+x\cos^2 n)}$$

converge se $-1 < x < 1$.

14.56 (*) Sia $f(x)$ un polinomio di terzo grado, in cui il coefficiente del termine di grado massimo è positivo. Dire per quali valori del parametro x la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{f(n^{\sin x}\ln n)+3n}$. converge semplicemente e per quali valori converge assolutamente.

15 Numeri complessi (△)

Porre in forma trigonometrica i seguenti numeri complessi

15.1 5

15.2 $1+i$

15.3 $-i\sqrt{2}$

15.4 $6-i2\sqrt{3}$

Calcolare

15.5 $\sqrt[3]{-i}$

15.6 $\sqrt{2-2i}$

15.7 $\sqrt[4]{1+i\sqrt{3}}$

15.8 $(1+i)^6$

15.9 $(3-3i)^7$

15.10 Sia $z = \dfrac{i+\sqrt{3}}{2}$. Calcolare, in forma trigonometrica, $\dfrac{1}{z}$ e $\sqrt[4]{z}$.

Risolvere le seguenti equazioni (o sistemi) nel campo complesso:

15.11 $z^2 - i\overline{z} = 0$

15.12 $(z+2i)^2 = 4|z|^2 - 8(\mathrm{Im}z)^2$

15.13 $z^2+2z+i=0$

15.14 $z^3\overline{z}+3z^2-4=0$

15.15 $z^4 = |z|^2+2$

15.16 $|z|^2z^2 = i$

15.17 $z+i\overline{z}^2 = -2i$

15.18 $z^2+z\overline{z} = 1+2i$

15.19 $z|z|-2z-1=0$

15.20 $z+\overline{z}-3\mathrm{Im}(z) = z^2+|z|$

15.21 $z|z|^2+|z|\overline{z}^2-\overline{z}z^2 = i$

15.22 $\begin{cases} |z^2+1| = 1 \\ \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}|z|^2 \end{cases}$

15.23 Trovare le radici none di 1 che hanno parte reale positiva;

15.24 Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'equazione $z+|z| = 3i+a$ ha soluzioni $z \in \mathbb{C}$? Trovare tali soluzioni, se esistono.

15.25 Provare che l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} z^3 - \overline{z}^3 = 0 \\ |\arg(z-1)| \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

è costituito dall'unione di tre semirette, e determinarle.

16 Funzioni di più variabili (△)

Studiare l'insieme di definizione in $\mathbb{R}^2$ delle seguenti funzioni, e darne una rappresentazione nel piano:

16.1 $f(x,y) = \arccos \dfrac{x+y}{2}$

16.2 $f(x,y) = \sqrt{xy-1}\,\log(5-2x-2y)$

16.3 $f(x,y) = \sqrt{x\,\sin(\pi\,(x^2+y^2))}$

16.4 $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\log(1-(x^2+y^2))}$

16.5 $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{(|x|-1)\,(|y|-1)}{|x|+|y|-1}}$

16.6 $f(x,y) = \log(x\,\log(y-x))$

16.7 $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{2x-(x^2+y^2)}{x^2+y^2-x}}$

16.8 $f(x,y) = \log \dfrac{\arcsin(x^2+y^2-1)}{xy}$

16.9 $f(x,y) = (xy)^{3x-1}$

16.10 $f(x,y) = \sqrt{x+y^2-2y}\,\ln(x^2+y^2-1)$

16.11 $f(x,y) = \dfrac{\arcsin(x+y)}{\sqrt[3]{9x^2+9y^2-1}}$

16.12 $f(x,y) = \arccos[\tan(4y+x-\pi/4)]$

16.13 $f(x,y) = \tan\left[\dfrac{\pi}{2}\arcsin(x^2+y)\right]$

Calcolare, se esistono, i seguenti limiti di funzioni di due variabili:

16.14 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^2+y^2}$

16.15 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2 \cos\frac{1}{xy}$

16.16 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-3y^2)^2}{x^2+2y^2}$

16.17 (*) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(y-1)^4}{x^2+y^2+2(1-x-y)}$

16.18 (*) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-2xy+y^3}{x^2+y^2}$

16.19 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\frac{\pi}{2},0)} \frac{y}{\cos x}$

16.20 (*) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

16.21 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+xy)}{x^2+y^2}$

Calcolare le derivate parziali (o dimostrare la loro non esistenza) per le seguenti funzioni:

16.22 $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

16.23 $f(x,y) = |xy|$

16.24 $f(x,y) = |x-y|\,(x+y)$

16.25 (∗) Trovare estremi relativi ed assoluti nel piano della funzione

$$f(x,y) = 5 + (x+\sin y)^3(x-\sin y)\,.$$

16.26 Determinare il massimo ed il minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = (x-y)^2(x+y)$$

nell'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\,,\ x+y \ge 0\}$.

16.27 (∗) Trovare (se esistono) il massimo e il minimo assoluti nel piano della funzione

$$f(x,y) = \frac{2-x^2y^2}{\exp\left(4\sqrt{x^2+y^2}\right)}\,.$$

16.28 Calcolare minimo e massimo assoluto della funzione

$$f(x,y) = (2x-3)e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

nel cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 1. Mostrare che l'origine è un estremo relativo per f.

16.29 Si trovino estremi relativi e assoluti della funzione

$$f(x,y) = e^{x^2-y^2}(x^4 - y^4)$$

nel cerchio di centro l'origine e raggio 2.

16.30 Si trovino estremi relativi e assoluti della funzione

$$f(x,y) = \frac{x^4}{4} + y^2 - \frac{5}{6}x^3 + x^2 - \frac{x}{2}$$

nel dominio $D = \{(x,y) : |x| \leq 2, |y| \leq 2\}$.

16.31 (∗) Trovare massimi e minimi locali della funzione $f(x,y) = [(x-2)^2 - 9y^2 - 5]\exp(x + \frac{2-x^2+9y^2}{4})$

16.32 Data la funzione di due variabili

$$f(x,y) = \ln(8y - 2x^2 - 2y^2)\,,$$

a) determinarne il dominio;
b) individuarne i punti critici;
c) individuare eventuali punti di massimo o minimo relativi.

16.33 Data la funzione di due variabili

$$f(x,y) = (e^{x+1} - 1)\ln(1 + y^2) + x^2 - x\,,$$

a) individuarne i punti critici;
b) individuare eventuali punti di massimo o minimo relativi.

17 Risposte ad alcuni esercizi

1.1: $x \le \log_4 3$;
1.2: $x \in (-\infty\,,\, -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}\,,\, +\infty)$, con $x \ne \pm 3$;
1.3: $\ln\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) \le x \le \ln\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$, oppure $\ln\left(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right) \le x \le \ln\left(\frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right)$, con $k \in \mathbb{N}$;
1.6: $2\pi < x \le e + 4$;
1.8: $\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi < x \le \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, oppure $\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \le x < \pi + 2k\pi$, oppure $\pi + 2k\pi < x \le \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi$, oppure $\dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \le x < \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

4.1: $\max E = 1$, $\inf E = -\dfrac{1}{2}$; **4.2:** $\sup E = 2$, $\inf E = -2$; **4.3:** $\max E = \dfrac{5}{2}$, $\min E = -3$; **4.4:** $\max E = \dfrac{1}{9}$, $\inf E = 0$; **4.5:** $\max E = 7$, $\inf E = 1$; **4.6:** $\max E = \operatorname{arctg} 2$, $\inf E = \dfrac{\pi}{4}$; **4.7:** $\sup E = 1$, $\min E = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$; **4.8:** $\sup E = 2$, $\inf E = -1$; **4.9:** $\sup E = +\infty$, $\min E = -3$; **4.10:** $\sup E = 1$, $\inf E = -1$; **4.11:** $\sup E = 1$, $\min E = 0$; **4.12:** $\max E = 4$, $\min E = 2$; **4.13:** $\max a_n = a_3 = 6$, $\inf a_n = -\infty$;

5.8: $-\infty$; **5.9:** $-\frac{2}{3}$; **5.10:** $\frac{1}{2\ln a}$; **5.11:** $\frac{1}{\ln 2}$; **5.12:** $-\frac{2}{3}$; **5.14:** $\frac{1}{2e}$; **5.15:** 1 se $\alpha > 1$, e se $\alpha = 1$, $+\infty$ se $0 < \alpha < 1$; **5.16:** $-\frac{1}{2}$; **5.17:** $+\infty$; **5.18:** 0; **5.19:** $\frac{1}{4}$; **5.20:** 0; **5.21:** $\frac{1}{e^2}$; **5.22:** $\frac{1}{2}$; **5.23:** $\frac{2}{3}$; **5.24:** $-\infty$; **5.25:** e; **5.26:** $c = \ln 2$; **5.30:** g, k, h, f; **5.32:** $f(x) \sim x^3$ per $x \to 0$;

6.9: f continua $\Leftrightarrow a + b = 1$; f invertibile $\Leftrightarrow a > 0$ e $a + b \ge 1$, oppure $a < 0$ e $a + b \le 0$; **6.10:** $a = 0$, $b = -2\pi$; **6.11:** $x = \dfrac{1}{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}$, $x = \dfrac{1}{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$; **6.12:** $b = 3$; **6.13:** $b = 1$; **6.14:** $b = -2$;

7.7: $\operatorname{tg} \dfrac{1}{2}$; **7.8:** 0; **7.9:** $+\infty$; **7.10:** 0; **7.11:** 0; **7.12:** 1; **7.13:** 0; **7.14:** $+\infty$; **7.15:** 1; **7.16:** 0; **7.17:** 3; **7.26:** $\dfrac{1}{e}$; **7.34:** $\dfrac{3}{2}$; **7.27:** 1; **7.28:** 0; **7.33:** $-\infty$; **7.35:** $\dfrac{1}{2}$; **7.36:** $+\infty$; **7.37:** $+\infty$; **7.38:** 0; **7.39:** 1; **7.40:** 0; **7.41:** 0; **7.42:** e^{-1}; **7.44:** $1 - \sqrt{2}$; **7.45:** 0; **7.46:** 1; **7.47:** $+\infty$; **7.48:** 0; **7.49:** 0; **7.50:** e^{-6}; **7.51:** $+\infty$; **7.52:** 1; **7.53:** $\dfrac{5}{2}$; **7.54:** 0; **7.55:** 1; **7.56:** 2π; **7.57:** $+\infty$; **7.58:** e; **7.59:** $-\infty$; **7.60:** 3; qquad **7.61:** $+\infty$; **7.62:** che non esiste l; **7.63:** no, ad esempio $a_{2n+1} = \dfrac{n}{n+1}$, $a_{2n} = n$; **7.64:** a) in generale è falso; b) in generale è falso; c) vero; d) falso; **7.65:** $\sup a_n = +\infty$, $\inf a_n = 0$, non ammette limite;

9.1: $\max f = f\left(\dfrac{5 - \sqrt{7}}{8}\right) \approx 0.048$; $\min f = f(2) \approx -1.17$;

11.2: 1; **11.3:** $\frac{1}{3}$; **11.4:** $\frac{7}{12}$; **11.5:** $-\frac{3}{2}$; **11.6:** $\frac{1}{2}$; **11.7:** 1; **11.8:** $-\frac{2}{3}$; **11.9:** 0; **11.10:** 0; **11.11:** $\sqrt{3}$; **11.12:** $-5\ln^2 10$; **11.13:** $-\frac{7}{6}$; **11.14:** 4; **11.15:** $\frac{2}{3}$; **11.16:** $\frac{\pi}{2}$; $\frac{2}{\pi}$;

13.1: converge; **13.2:** converge; **13.3:** converge; **13.4:** non converge; **13.5:** non converge; **13.6:** converge; **13.7:** converge;

14.3: diverge positivamente (si noti che è una serie a segno costante); **14.13:** diverge positivamente; **14.14:** convergente; **14.15:** divergente; **14.16:** convergente; **14.17:** divergente; **14.18:** divergente; **14.19:** convergente; **14.20:** convergente; **14.21:** divergente; **14.22:** divergente; **14.23:** convergente; **14.24:** convergente; **14.25:** divergente;

15.22: $z = 0$, $z = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$;