§5 Continuità, derivabilità, invertibilità, punti critici, massimi, minimi

Per le definizioni e teoremi si fa riferimento ad uno qualsiasi dei libri M.Bertsch - R.Dal Passo *Lezioni di Analisi Matematica*, I edizione settembre 1996, ARACNE EDITRICE, via Raffaele Garofalo, 133 A/B 00173 Roma tel.0672672233/22, M.Bertsch - R.Dal Passo *Elementi di Analisi Matematica*, I edizione ottobre 2001, ARACNE EDITRICE

Il simbolo **Es:** significa la presenza di una o più domande a cui ancora non si è data una risposta o per motivi di tempo o perché non si è riusciti nell'intento

$Disc(f)$ e $Cont(f)$ indicano rispettivamente l'insieme dei punti di discontinuità e di continuità di una funzione. Gli insiemi che possono essere scritti come unione numerabile di chiusi sono storicamente indicati con il simbolo F_σ. Gli insiemi che possono essere scritti come intersezione numerabile di aperti sono storicamente indicati con il simbolo G_δ.

1.5*** Usare l'esercizio **8.3***** per dimostrare che $\sup\{x\in \mathbf{R} | x=\cos n, n\in\mathbf{N}\backslash\{0\}\}=+1$ mentre l'inf è -1

2.5 Sia data una funzione $f\colon \mathbf{R}\to Im(f)\subset \mathbf{R}$. Una definizione possibile di continuità in x_o è: "*la controimmagine di un qualsiasi insieme aperto (chiuso) contenente $f(x_o)$ contiene una sfera aperta (chiusa) contenente x_o*" (in formule f è continua in x_o se dato $V\ni f(x_o)$ V aperto/chiuso, $U \doteq f^{-1}(V)=\{x\in\mathbf{R}\ | f(x)\in V\}\supset O$ e O è una sfera è aperta/chiusa contenente x_o.). Dimostrare che tale definizione *è equivalente* alla definizione `(5.2) pag.183` del libro di testo.

Sia data una funzione $f\colon \mathbf{R}\to Im(f)\subset\mathbf{R}$ continua. Dimostrare che: *la controimmagine di un qualsiasi insieme aperto (chiuso) è un insieme aperto (chiuso).*

i) Si mostri con un esempio che se una funzione è discontinua in un punto, diciamo x_o, allora la controimmagine di un aperto contenente $f(x_o)$ non è detto contenga un intervallo aperto contenente x_o.
ii) Data una funzione $f\colon E\subset\mathbf{R}$, $(E\neq\mathbf{R})$ sarebbe uguale se si definisse la continuità nel seguente modo: la funzione è continua in x_o se la controimmagine di un aperto contenente $f(x_o)$ è un aperto contenente x_o?
Dare un esempio di:

iii) funzione continua $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ e di insieme aperto U tale che $f(U)$ non è aperto

iv) funzione continua $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ tale che la controimmagine di un insieme limitato è non limitata

v) funzione continua $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ e di insieme chiuso C tale che $f(C)$ non è chiuso[(1.5)]

vi)** funzione continua $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ ed insieme C costituito da *punti isolati* tale che $f(C)$ non è chiuso

vii)** Si dimostri che se $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ è continua e $\lim_{|x|\to+\infty}|f(x)|=+\infty$ allora l'immagine di un insieme chiuso è chiusa.

viii) Si dica se è vera la seguente affermazione ed in caso contrario si dia un esempio: *sia data una funzione continua $f\colon U\subseteq\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ e sia $\{x_n\}$ una successione in U. Allora se $f(x_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}f(x_o)$ si ha che $x_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}x_o$*

3.5 Un ben noto teorema dice che *l'immagine continua di un insieme compatto è compatta* (in

---

(1.5) si veda l'esercizio N.2 pag.98 del libro W.Rudin: *The principle of mathematical analysis*, third edition McGraw–Hill Book Company

formule se $f: Dom(f) \subset \mathbf{R}^n \to Im(f) \subset \mathbf{R}^m$ (si pensi ad $n = m = 1$) è continua, $K \subset Dom(f)$ e compatto, allora $f(K)$ è compatto in $Im(f)$).
i) Dare un esempio di funzione continua tale che preso un compatto $K' \subset Im(f)$ l'insieme $\{x \in Dom(f) |\ f(x) \in K'\}$ non è compatto (in poche parole si dice che *la controimmagine continua di un insieme compatto non necessariamente è compatta*).
ii) Dimostrare ovvero trovare un controesempio alla affermazione: se $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è tale che $f(K)$ è compatto non appena K è un compatto, allora f è continua.

4.5*** Data una qualsiasi funzione $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ si dimostri che $Disc(f) = F_\sigma$ ossia è costituito dall'unione al più numerabile di insiemi chiusi (quindi non necessariamente è un insieme chiuso). Dunque si ha $Disc(f) = \cup_{k=1}^\infty F_k$, $F_k = \overline{F}_k$ (un numero finito od infinito di F_k può essere vuoto).
È evidente che $Cont(f) = G_\delta$ e quindi $Cont(f) = \cap_{k=1}^\infty U_k$, $U_k = \overset{\circ}{U}_k$
• dato un insieme chiuso $C = \overline{C}$, si dia una funzione f tale che $Disc(f) = C$.
• dato un insieme $F = \cup_{k=1}^\infty F_k$ con $F_k = \overline{F}_k$ (ossia un F_σ qualsiasi), si costruisca una funzione tale che $Disc(f) = F$
• data $f: E \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ si dimostri che $Disc(f) = \bigcup_{A \subset E} \overline{A} \backslash f^{-1}(\overline{f(A)})$[2.5]

5.5 Dire per quali valori di a e b è derivabile la funzione f_1 ed in quali punti del suo dominio è continua prima e derivabile poi f_2. È invertibile f_2? È monotona f_2?

$$f_1(x) = \begin{cases} 1/|x| & |x| > c \\ a + bx^2 & |x| \le c \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} x & \text{per} \quad x \in \mathbf{Q} \\ -x & \text{per} \quad x \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q} \end{cases}$$

Dare un esempio di funzione $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, continua in $x = 0$ ma non continua in nessun punto di alcun intorno di $x = 0$.

5.5.1 Si dimostri che la funzione $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & -1 \le x \le 1 \\ -1+e^{-10+24\sqrt{x}-14x} & x > 1 \\ -1+e^{-10+24\sqrt{-x}+14x} & x < -1 \end{cases}$ è derivabile due volte ma non tre volte.

6.5** Dire in quali punti è continua, derivabile la *funzione di Riemann*
$f(x) = \begin{cases} 1/q & \text{se } x = p/q, \ (p,q) = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ si intende $f(0) = f(\frac{0}{1}) = 1$; $(p,q) = 1$ vuol dire primi fra di loro. Cosa cambierebbe se si definisse una funzione come la precedente con l'unica differenza che $f(0) = 0$? Osservare che il risultato si accorda con quanto affermato dall'esercizio **4.5*****.

7.5* Stabilire l'uniforme continuità nei rispettivi domini delle funzioni $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \sin(\sin x)$, $f_3(x) = x + \sin x$, $f_4(x) = x \sin x$,

$$f_5(x) = \sin(x \sin x), \quad f_6(x) = \sin(\ln|x| + \sin\tfrac{1}{x}), \quad f_7(x) = \begin{cases} \sin(x \sin \dfrac{1}{x}) & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f_8(x) = \begin{cases} \sin(x + \dfrac{x}{\ln|x|}) & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad f_9(x) = \begin{cases} \sin(x \ln|x|) & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f_{10}(x) = \begin{cases} \sin(x^2 \sin \dfrac{1}{x}) & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad f_{11}(x) = \begin{cases} \sin(x^2) \sin \dfrac{1}{x} & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

[2.5] Per saperne di più si può consultare il libro K.Kuratowski *Topology*, vol.I 1966 Academic Press, pag.103

• Se f e g sono uniformemente continue in $[a,+\infty)$ si risponda alle seguenti domande: 1) sono uniformemente continue le funzioni $f+g$ e fg? 2) se f è uniformemente continua mentre $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$, è uniformemente continua $f+g$?

8.5 Laddove è verificata la formula $(f^{-1})'(y_o)=(f'(x_o))^{-1}$ con $y_o=f(x_o)$ si calcoli $(f^{-1})''(y_o)$ e $(f^{-1})'''(y_o)$.

9.5 Dire per quali valori di γ è invertibile la funzione $f(x)=3x|x|+\frac{1}{2}\gamma\big(x\sqrt{x^2+4}+4\ln(x+\sqrt{x^2+4})-2x\big)+x$

10.5 Discutere l'invertibilità delle seguenti funzioni nei rispettivi domini $f_1(x)=\frac{2}{5}(x+1)^{5/2}-x-\frac{3}{4}x^2$, $f_2(x)=\frac{(x^2+1)\log\sqrt{x}}{x}$ e trovare il numero di soluzioni $x\neq 0$ della equazione $(x^2+1)\ln\sqrt{|x|}=\alpha x$ al variare di $\alpha\in\mathbf{R}$ $f_3\colon(-\infty,0)\to\mathbf{R}$ $f_3(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x-(x^2+1)^{\frac{1}{3}}-x\arctan x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. Trovare il dominio della funzione inversa.

11.5 Data $f(x)=2x^3-4x^2+2x+4$ con $x\in\mathbf{R}$. Determinare a e b tale che f è invertibile in ognuno degli intervalli $(-\infty,a]$, $[a,b]$, $[b,+\infty)$. Sia g l'inversa di f in $(-\infty,a]$. Determinare il dominio di g ed i punti del suo dominio nei quali g è derivabile. Calcolare $g'(4)$.

• Calcolare la derivata in $\frac{1}{8}$ della inversa della funzione $f(x)=e^x+\ln(\frac{1}{2}+4e^x)$

• Calcolare la derivata in $\frac{3}{2}$ della inversa della funzione $f(x)=3e^{x-1}+\ln(\frac{e}{2}+3e^x)$

12.5 Data $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ tale che $f(0)=0$ e $|f'(x)|\le|f(x)|$. Allora si ha $f\equiv 0$. (Suggerimento: usare il Teorema di Lagrange più volte).

13.5 Siano date le cinque seguenti funzioni

$$f_{a,c}(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x} & \text{per } x<0\\ x^4+ax^2 & \text{per } x\in[0,2]\\ c+\ln x & \text{per } x>2.\end{cases}\qquad g_{a,c}(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x} & \text{per } x<0\\ -x^4-ax^2 & \text{per } x\in[0,2]\\ c+\ln x & \text{per } x>2.\end{cases}$$

$$h_{a,c}(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x} & \text{per } x<0\\ x^4+ax^2 & \text{per } x\in[0,2]\\ c+1/x & \text{per } x>2.\end{cases}\qquad k_{a,c}(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x} & \text{per } x<0\\ -x^4+ax^2 & \text{per } x\in[0,2]\\ c+1/x & \text{per } x>2.\end{cases}$$

$$p_{a,c}(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x} & \text{per } x<0\\ -x^4+ax^2+17 & \text{per } x\in[0,2]\\ c+\ln x & \text{per } x>2.\end{cases}$$

Dire per quali valori di a e c la funzione è:
i) invertibile su tutto $\mathbf{R}$; in tal caso trovare il dominio dell'inversa e calcolare la sua derivata in $\frac{1}{16}(1+4a)$ per quanto riguarda il primo ed il terzo; in $-\frac{1}{16}(1+4a)$ per il secondo, in $\frac{-1}{16}(1+4a)$ per il quarto e
ii) invertibile con inversa definita su tutta la retta e continua su tutto l'asse reale
iii) continua su tutto $\mathbf{R}$.

14.5 Dire per quali $a\in\mathbf{R}$ la seguente funzione g_a è invertibile nel suo dominio $(-\infty,0]\cup(2,+\infty)$

$$g_a(x)=\begin{cases}\ln(1+\sqrt{-x})+x^4-1 & x\le 0\\ \dfrac{ax+1}{x-2} & x>2\end{cases}$$

15.5* Sia $f\colon(a,\infty)\to\mathbf{R}$ continua e derivabile tale che $|f(x)|\le M$ per ogni $x\in(a,\infty)$. Allora se esiste $\lim_{x\to+\infty}f'(x)$ esso è zero.

16.5** Scrivere una funzione tale che $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ ma tale che $\lim_{x\to+\infty}f'(x)\neq 0$. Si consideri prima il caso in cui la funzione tende a zero in modo non monotono e successivamente monotono.

17.5* Dimostrare la seguente affermazione ovvero trovare un controesempio: *È data una funzione f derivabile nell'aperto (a,b) e $f'(c)=0$ con $a<c<b$. Allora c è un punto di massimo oppure di minimo oppure di flesso a tangente orizzontale.*

18.5 1) Sia $f\colon[a,b]\to\mathbf{R}$ continua e derivabile due volte nell'aperto tale che la retta congiungente $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$ interseca $f(x)$ in un punto $c\neq a$ e $c\neq b$. Allora esiste $x_o\in(a,b)$ tale che $f''(x_o)=0$.

2) Si dimostri inoltre che se $f\colon[a,b]\to\mathbf{R}$ è continua e derivabile nell'aperto ed inoltre $f'(a)=f'(b)$ allora esiste $\xi\in[a,b]$ tale che $f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$ (geometricamente vuol dire che la corda passante per i punti a e ξ e la tangente in ξ coincidono)

19.5 Discutere al variare di α nei reali l'iniettività delle funzioni

$$f(x)=\begin{cases}-x(x+2)^{-1} & x<-2\\ -x+5+\alpha & x\ge -2\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}(x-2)(x+1)^{-1} & x<-1\\ \alpha e^{-x-1}-2 & x\ge -1\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\arcsin(x/4\alpha) & |x|\le 4\alpha\\ 6-x & |x|>4\alpha\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}-x^2+x+1 & x<0\\ x^2+(1-\alpha)x-\alpha & x\ge 0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}-16(\pi)^{-1}\arctan(x^{-1}\sqrt{x^2+2}) & x<0\vee x>2\\ 4\cos^3(\alpha x) & 0\le x\le 2\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\sin(\alpha x) & |x|\le 1\\ x-1/2 & |x|>1\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}x^2-2\alpha x & x\ge 1\\ x-4 & x<1\end{cases}$$

20.5 Dimostrare che $0<x-\log(1+x)<\frac{x^2}{2}$ per $x>0$

21.5* Data la funzione $f_1(x)=\begin{cases}\lambda x+x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ $\lambda\in\mathbf{R}$, dare una stima di un intervallo contenente l'origine in cui sia invertibile al variare di λ ovvero mostrare che tale intervallo non esiste. Ripetere la stessa analisi per la funzione $f_2(x)=\begin{cases}\lambda x+x^3\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ $\lambda\in\mathbf{R}$.

22.5** Si trovi l'errore nei seguenti passaggi: Si consideri la funzione dell'esempio **17.5*** e si applichi il teorema di Lagrange all'intervallo $[0,x]$ per cui esiste ξ_x tale che $f(x)-f(0)=xf'(\xi_x)$; quindi $x^2\sin\frac{1}{x}=x(2\xi_x\sin\frac{1}{\xi_x}-\cos\frac{1}{\xi_x})$ ossia $\cos\frac{1}{\xi_x}=x\sin\frac{1}{x}-2\xi_x\sin\frac{1}{\xi_x}$. Ora mandiamo x a zero e quindi ξ_x a zero ottenendo $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{\xi_x}=\lim_{x\to 0}\Big(x\sin\frac{1}{x}-2\xi_x\sin\frac{1}{\xi_x}\Big)=0$ ed essendo $0<\xi_x<x$ si ha $\lim_{\xi_x\to 0}\cos\frac{1}{\xi_x}$ che chiaramente costituisce un assurdo.

23.5 Trovare la derivata centesima della funzione $\frac{x^2+1}{x^3-x}$

24.5 Dimostrare che per una funzione derivabile in un punto x_o del suo dominio si ha $\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}(f(x_o+h)-f(x_o-h))=f'(x)$.
• Dire se l'esistenza del limite $\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}(f(x_o+h)-f(x_o-h))$ implica che la funzione è derivabile
• Dire se l'esistenza del limite $\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}(f(x_o+h)-f(x_o-h))$ implica che la funzione è continua
Dimostrare che la derivata di una funzione pari è dispari e viceversa.

24.5.0.5** Data una funzione reale $f(x)\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ si definisca la funzione $f^*(x)\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ $f^*(x)\stackrel{\rm def}{=}\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}(f(x+h)-f(x-h))$ e si suppongano sia f che f^* è continue in x_o. Si dimostri che esiste $f'(x_o)$ e che $f'(x_o)=f^*(x_o)$ oppure si dia un controesempio(3.5)

24.5.1 Sia data al funzione $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & |x|\le 1\\ d+ce^{-ax^2-bx} & x>1\\ d+ce^{-ax^2+bx} & x<-1\end{cases}$ Tenendo d come parametro si calcolino le costanti a,b,c tale che la funzione $f(x)$ sia due volte derivabile.
• Dette $M_0\stackrel{\rm def}{=}\sup_{x\in\mathbf{R}}|f(x)|$, $M_1\stackrel{\rm def}{=}\sup_{x\in\mathbf{R}}|f'(x)|$, $M_2\stackrel{\rm def}{=}\sup_{x\in\mathbf{R}}|f''(x)|$, si calcoli al variare di d la quantità $\frac{(M_1)^2}{2M_0M_2}$ e si verifichi che è strettamente minore di 1.

25.5** Supponiamo che $f\colon I\subseteq\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ sia due volte derivabile con derivate limitate. Sia $M_j=\sup_{x\in I}|f^{(j)}(x)|$ con $j=0,1,2$. Dimostrare che
1) Se $I=[-a,a]$ allora $M_1\le\frac{M_o}{a}+\frac{M_2(a^2+x^2)}{2a}$
2) Se la lunghezza di I è maggiore od uguale a $2\sqrt{\frac{M_o}{M_2}}$ si ha $M_1\le 2\sqrt{M_oM_2}$
3) Se $I=\mathbf{R}$ si ha $M_1^2\le 2M_oM_2$.
Es: Relativamente agli esercizi 2) e 3) dare esempi in cui vi è l'uguaglianza.

26.5* È data la funzione $f\colon[0,+\infty)\to\mathbf{R}$, derivabile in $(0,+\infty)$ (si intende che in 0 esiste la derivata destra) tale che $f(0)=0$ e $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$. Dimostrare che esiste un punto $\xi\in(0,+\infty)$ tale che $f'(\xi)=0$.

27.5 *Proprietà ottiche delle coniche.*
Data una ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ si identifichino i due fuochi detti F_1 e F_2. Preso un punto M appartenente all'ellisse si congiunga M con F_1 ed M con F_2 (si ottengono i cosiddetti raggi focali). Dimostrare che la normale in M all'ellisse (la retta ortogonale alla tangente all'ellisse in M) divide l'angolo $F_1\hat{M}F_2$ in due parti uguali.

Data una parabola di equazione $y=ax^2+bx+c$ si identifichi il fuoco F di coordinate (q,p). Dato un punto della parabola $P\equiv(x_o,y_o)$ si dimostri che la normale alla parabola per P forma angoli uguali con la retta FP e con la semiretta uscente da P e parallela all'asse delle ordinate. Tale proprietà ottica della parabola spiega come mai le parabole che vengono comunemente montate per il ricevimento del segnale dai satelliti hanno una sorta di "appendice" posizionata immediatamente davanti alla parabola stessa. Infatti le onde elettromagnetiche provenienti dallo spazio vengono convogliate verso il "fuoco" dalla parabola che funge da specchio. Se invece si pone una sorgente nel fuoco il risultato è che i raggi vengono "sparati" parallelamente verso l'infinito e su tale principio si basano i proiettori di luce.

Data una iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ si identifichino i fuochi F_1 e F_2. Preso un punto M appartenente all'iperbole si congiunga M con F_1 ed M con F_2 (si ottengono i cosiddetti raggi

(3.5) da *S. Haines; L.F.Leecth; Freshman Honors Students American Mathematical Monthly* Vol.74, No. 6 (Jun.–Jul., 1967),721 la funzione f e la soluzione ivi proposta è leggermente diversa dalla presente sebbene l'idea sia la stessa.

focali). Dimostrare che la tangente in M all'iperbole divide l'angolo $F_1\hat{M}F_2$ in due parti uguali. In questo caso se si pone una sorgente luminosa in uno dei fuochi, i raggi emessi vengono riflessi verso l'esterno (proseguono) come se venissero emessi dall'altro fuoco.

Si dimostri poi che i punti medi delle corde parallele di una curva del secondo ordine (ellisse, iperbole oppure parabola) stanno tutti su di una stessa retta.

28.5 Si dimostrino le formule $\frac{a-b}{a} \leq \ln\frac{a}{b} \leq \frac{a-b}{b}$ con $0 < b \leq a$ e $\frac{a-b}{\cos^2 b} \leq \tan a - \tan b \leq \frac{a-b}{\cos^2 a}$ con $0 \leq b \leq a < \frac{\pi}{2}$.

29.5 Dimostrare la disuguaglianza $\frac{x^3}{6}\ln x > \frac{11}{36}x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} - \frac{1}{18}$ per $x > 0$ ed $x \neq 1$.

30.5* Dare un esempio di funzione *crescente in un punto* ma che non è crescente in alcun intorno del punto. Quello che si cerca è una funzione per cui si verificano le seguenti proprietà : esiste x_o ed un intervallo $(x_o-\delta, x_o+\delta)$ tale che $f(x) \leq f(x_o)$ per $x_o - \delta < x \leq x_o$ e $f(x) \geq f(x_o)$ per $x_o \leq x < x_o + \delta$ ma non esiste alcun punto $x_1 \neq x_o$, $x_1 \in (x_o-\delta, x_o+\delta)$ per cui $x - \delta < x \leq x_1 \;\Rightarrow\; f(x) < f(x_1)$ e $x_1 \leq x < x + \delta \;\Rightarrow\; f(x) > f(x_1)$. Vedi l'esercizio **61. 5****···** per una funzione che ha in ogni punto le caratteristiche della funzione data .

31.5 Sia dato un insieme K compatto in $\mathbf{R}^n$ ed M un suo sottoinsieme tale che $\overline{M} = K$ (si pensi ad esempio $K = [0,1]$ ed $M = \mathbf{Q} \cap [0,1]$ oppure $K = [0,1]$ ed $M = (0,1)$). Sia data ora una funzione $f(x)\colon M \to \mathbf{R}$ continua. Dimostrare che è possibile trovare una funzione $F(x)\colon K \to \mathbf{R}$ continua che sia il prolungamento di f a K ossia tale che $F|_M = f$ se e solo se f è uniformemente continua su M.

32.5** Sia data la rappresentazione decimale di un numero $t \in [0,1]$ $t = 0,t_1t_2t_2\ldots t_n\ldots = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t_k}{10^k}$ (chiaramente t_k è un intero compreso fra 0 e 9). Data la sottosuccessione dei naturali $\{n_k\}$ k intero positivo e $n_1 < n_2 < n_3 \ldots < n_k < \ldots$ si definisce la funzione $f\colon[0,1] \to \mathbf{R}$ $f(t) = 0,t_{n_1}t_{n_2}t_{n_3}\ldots t_{n_k}\ldots = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t_{n_k}}{10^k}$. Trovare il dominio della funzione ed esaminarne la continuità

33.5*** *Assumendo che l'insieme dei numeri reali non può essere scritto come unione al più numerabile di insiemi non densi in alcun punto*[4.5] ed usando l'esercizio **4.5*****, si dimostri che non possono esistere funzioni che siano continue sui razionali e discontinue sugli irrazionali. Confrontare con l'esercizio **6.5****. Dire che l'insieme dei numeri reali non può essere scritto come unione al più numerabile di insiemi non densi in alcun punto vuol dire che se esiste una rappresentazione dei numeri reali per cui $\mathbf{R} = \cup_{k=1}^{+\infty}F_k$ allora per almeno uno degli F_k deve verificarsi la relazione $\overset{\circ}{\overline{F}_k} \neq \emptyset$. La dimostrazione di tale fatto richiede la conoscenza di un teorema (il teorema di Baire appunto) che normalmente non fa parte del programma di analisi dei primi due anni. Oltre alla dimostrazione che fa uso dell'affermazione appena citata sui numeri reali è data nella **Appendice 1** un'altra dimostrazione che risale al matematico italiano `Vito Volterra`

34.5 Determinare il numero di soluzioni reali della equazione $\frac{\sin 2\pi x}{2\pi} + x^3 + 2x - e^{-x} = 0$. Determinare un'approssimazione di ognuna delle soluzioni a meno di un errore che non superi 0.5

35.5 Dare un esempio di funzione $f\colon[a,b] \to [c,d]$ invertibile su $[a,b]$ ma $Im(f) \neq [c,d]$ ossia f non è surgettiva.

[4.5] La definizione di non densità è quella data successivamente all'esercizio **20.1.5**** . La dimostrazione fa uso del **Teorema di Baire** (o della categoria) ed è dimostrato nella **Appendice 2**

36.5 Sia data la funzione $f\colon[a,b]\to\mathbf{R}$ che verifica la disuguaglianza $|f(x_1)-f(x_2)|\le C|x_1-x_2|^{1+\alpha}$ con C,α costanti positive. Dimostrare che f è costante.

37.5 Supponiamo per una funzione f si verifichi la relazione $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$. Trovare $\lim_{x\to+\infty}[f(x+h)-f(x)]$

38.5* Sia data $f\colon[a,b]\to\mathbf{R}$ derivabile con continuità sull'intervallo (a,b) (vuol dire che per ogni $y\in(a,b)$ si ha $\lim_{x\to y}f'(x)=f'(y)$ ed agli estremi si hanno solo limiti destri e sinistri di derivate destre e sinistre rispettivamente). Allora f è uniformemente derivabile in $[a,b]$ ossia $\forall\,\varepsilon>0\;\exists\;\delta_\varepsilon>0$ *t.c.*$|x-x_1|<\delta\;\Rightarrow\;|f'(x_1)-\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}|<\varepsilon$ (δ dipende da ε ma non da x_1)

39.5 È data la funzione $y=x+e\sin x\doteq f(x)$. Per quali valori di e, se esistono, la funzione è invertibile?

40.5 Sia data la funzione $f(x)$ definita nell'intorno di un punto x_o. È noto che $\forall\;\delta>0\;\exists\;\varepsilon>0$ *t.c.* $|x-x_o|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_o)|<\varepsilon$. È continua la funzione in x_o? Dare un esempio se non vi è continuità.
Supponiamo invece che $\forall\;\varepsilon>0\;\exists\;\delta>0$ *t.c.* $|f(x)-f(x_o)|<\varepsilon\Rightarrow\;|x-x_o|<\delta$. È continua la funzione in x_o? Dare un esempio se non vi è continuità.

41.5 È data una funzione continua $f\colon[a,b]\to\mathbf{R}$. Dimostrare che presi n punti in $[a,b]$ $(x_1,\dots,x_n)$ esiste un punto x_o tale che $f(x_o)=\frac{1}{n}[f(x_1)+\dots f(x_n)]$.

42.5** È data una funzione $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ che verifica la proprietà per cui presi due punti qualsiasi $x_1<x_2$, per ogni $c\in(f(x_1),f(x_2))$ esiste un punto $x_c\in(x_1,x_2)$ in cui $f(x_c)=c$ (proprietà dei valori intermedi; vedi `Corollario 5.2` e `Teorema 5.5`). È continua la funzione $f(x)$ sul suo dominio?

43.5 Dimostrare che se $\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^{n-i}=0$ ha una radice positiva $x=x_o$, allora anche la equazione $\sum_{i=0}^{n-1}ia_ix^{n-i-1}=0$ ha una radice positiva e minore di x_o.

44.5* Sia data una distanza in $\mathbf{R}^n$ ossia una funzione $\rho\colon\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ (vedi `pag.100` del libro di testo) che soddisfa i)-iii). Sia $\underline{x}_o\in\mathbf{R}^n$ e si dimostri che $\rho(\underline{x},\underline{x}_o)$ è una funzione continua di $\underline{x}$
Si dimostri poi che la distanza da un insieme A (vedi esercizio **13.1.5***) è anche essa una funzione continua di x.
Definiamo inoltre *distanza fra due insiemi* la seguente formula $\rho(A,B)=\inf_{x\in A}\inf_{x\in B}|x-y|$
Dimostrare che se A è compatto e B chiuso allora $\rho(A,B)=0$ implica $A\cap B=\not\emptyset$
Viceversa dare due insiemi A e B chiusi disgiunti per i quali $\rho(A,B)=0$ ma $A\cap B=\emptyset$ (si intende che gli insiemi sono disgiunti se non hanno punti in comune).

45.5* Supponiamo che una data funzione sia monotona, limitata e continua su un intervallo (a,b) finito od infinito. Dimostrare che la funzione è uniformemente continua su (a,b). Suggerimento: si usi l'esercizio **31.5** quando un estremo dell'intervallo è finito. Quando un estremo è infinito si tenga presente il risultato dell'esercizio **7.5***–f_7.)

46.5 Una linea retta è tracciata attraverso l'origine e parallela alla tangente in un arbitrario punto M di una curva. Trovare il luogo dei punti P di intersezione della linea retta e la linea retta parallela all'asse y e passante per M. Esplicitare tale calcolo per le seguenti curve: 1) $y^2=2px$ 2) $y=\log_b x$ 3) $x^2+y^2=a^2$ 4) $y=\sqrt{a^2-x^2}-a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$

47.5* Sia data $f\colon I\to\mathbf{R}$ monotona dove I è un intervallo limitato od illimitato. Dimostrare che l'insieme dei punti $c \in I$ per i quali $\lim_{x\to c} f(x)$ esiste ed è diverso da $f(c)$ è al più numerabile.

48.5* ** Costruire una applicazione $f\colon [a,b] \to (a,b)$ *biiettiva su* (a,b) ossia iniettiva e surgettiva.

49.5** Risolvere l'esercizio **19.1.5** facendo uso di una o più opportune funzioni continue.

50.5* Data $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ derivabile, siano $P = \inf_{x\in[a,b]} f'(x)$ e $Q = \sup_{x\in[a,b]} f'(x)$. Si dimostri che preso un punto $c \in [P,Q]$ esiste $x_o \in [a,b]$ tale che $f'(x_o) = c$ (Teorema di Darboux). Dal teorema si deduce che la derivata di una funzione verifica la tesi del "Teorema dei valori intermedi".

51.5** Dimostrare ovvero trovare un controesempio alla seguente affermazione: "*Se una funzione ammette nell'intorno di a la rappresentazione* $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}Bh^2 + o(h^2)$ *allora* $\frac{d^2 f}{dx^2}|_a$ *esiste*"
Forse è opportuno spendere due parole sulla natura dell'esercizio. Come è noto se una funzione è n volte derivabile in un punto a allora esiste il polinomio di Taylor che verifica la formula `6.30 pag.250`. Dunque all'aumentare del numero di derivate si può ben approssimare la funzione nell'intorno del punto. Se ad esempio la funzione è solamente continua ($n = 0$), si ha $f(x) - f(a) = o(1)$ (come al solito con $o(1)$ si intende una qualsiasi quantità che tende a zero per $x \to 0$). Se $n = 1$, ossia la funzione è derivabile una sola volta, si ha $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$.
È vera anche la seguente affermazione che in un certo senso inverte la precedente nel caso di $n = 1$: "*Se una funzione* $f(x)$, *nell'intorno del punto a ammette una rappresentazione del tipo* $f(a+h) = f(a) + Ah + o(h)$, *allora f è derivabile in a e la sua derivata vale A*"
Per dimostrare l'affermazione basta eseguire il limite $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ed osservare che è uguale ad A.
È lecito quindi domandarsi ed è questo il senso dell'esercizio), se per $n = 2$ è vera una affermazione analoga alla precedente che costituisce il caso $n = 1$

52.5** A `pag.241-243` del libro di testo si dimostra la affermazione per cui se una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$, derivabile in (a,b), ha $f'(x_o) = 0$ ($a < x_o < b$) ed inoltre esiste un intorno $(c,d) \subset (a,b)$, $x_o \in (c,d)$ tale che $f'(x) \geq 0$ per $x_o < x < d$ e $f'(x) \leq 0$ per $c < x < x_o$ allora x_o è un punto di minimo locale (se $(a,b) = (c,d)$ il minimo è globale). Se inoltre $f'(x) > 0$ per $x_o < x < d$ e $f'(x) < 0$ per $c < x < x_o$ allora x_o è un punto di minimo locale forte. Si dia un esempio di funzione derivabile che ha in x_o un minimo locale ma non esiste nessun intorno di x_o tale che $f'(x)$ è positiva a destra di x_o e negativa a sinistra di x_o.
Se l'esempio precedente non soddisfa la richiesta che segue dare un esempio di funzione derivabile che ha un minimo locale **forte** in x_o e la derivata prima le stesse caratteristiche precedenti.

• Si dimostri ovvero si dia un controesempio alla affermazione seguente: *Se una funzione* $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *è derivabile due volte in* $x = 0$, *e inoltre si ha* $f'(0) = f''(0)$, $x \cdot f(x) > 0$ *per ogni* $x \neq 0$, *allora esiste* $f'''(0)$ *ed è positiva*

53.5 Data una funzione $f(x)$ sia $T(f) \doteq \{y \in\ Im(f) \mid f'(x) = 0,\ y = f(x)\}$ (chiaramente supponiamo che f sia derivabile almeno nei punti in cui $f'(x) = 0$). Con $E(f)$ indichiamo invece l'insieme dei punti che fanno parte dell'immagine di f e che sono massimi oppure minimi. Quale delle seguenti relazioni $T(f) \subset E(f)$, $T(f) = E(f)$, $T(f) \supset E(f)$ è vera per una generica funzione?
Nel caso della funzione f_2 dell'esercizio **5.5**, della funzione $f(x)$ dell'esercizio **6.5**** e della funzione di Dirichlet si trovi $E(f)$

54.5 Si consideri una funzione $f\colon U \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua. Si dimostri ovvero si dia un controesempio alla seguente affermazione: se $f \circ f$ è derivabile allora f è derivabile.

55.5 Sia data una funzione $f\colon (a,b) \to \mathbf{R}$ derivabile che in x_o e x_1, $x_o < x_1$, ha due massimi locali forti. Dimostrare che esiste un terzo punto $x_2 \in (x_o, x_1)$ in cui $f'(x_2) = 0$ ed è un minimo

56.5 Risolvere l'esercizio **31.7** del capitolo sulle funzioni di due variabili.

Definizione Un numero reale ξ è detto *algebrico di grado* n se esso soddisfa la equazione polinomiale $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0$ dove i coefficienti a_k sono tutti interi positivi o nulli e n è il più piccolo possibile. Ad esempio un numero razionale è algebrico di grado 1 mentre $\sqrt{2}$, e $\sqrt{3}$, sono algebrici di grado 2. Un numero non algebrico è trascendente. Un numero x è detto di *Liouville* se per ogni $n > 1$ esistono p_n, q_n, tali che $|x - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^n}$. Un esempio di numero di Liouville è $\sum_{k=0}^{\infty}(10)^{-k!}$

57.5*** Si dimostri che per ogni numero reale algebrico ξ di grado $n > 1$ esiste un numero intero positivo M tale che $|\xi - \frac{p}{q}| > \frac{1}{Mq^n}$ per ogni coppia p, $q > 0$ di numeri interi (Suggerimento: usare il teorema del valor medio relativamente alla differenza $P(x) - P(\xi)$ dove $P(x)$ è un polinomio tale che $P(\xi) = 0$).
Dimostrare che ogni numero di *Liouville* è trascendente.

58.5*** Sia data la funzione (si veda l'esercizio **6.5****) $f_n(x) = \begin{cases} 1/q^n, & x = p/q,\ (p,q) = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Si dimostri che: 1) se $n \le 2$ allora la funzione non è derivabile in nessun punto (suggerimento: si usi l'ultima parte della soluzione dell'esercizio **6.5****) 2) se $n \ge 3$ allora è derivabile sugli irrazionali algebrici di grado $n-1$ (suggerimento: usare il risultato dell'esercizio **57.5*****) 3) per ogni n esistono dei numeri trascendenti nei quali f_n è non derivabile.

Es: Si dica in quali punti è derivabile le funzione $f(x) = \begin{cases} 2^{-q}, & x = p/q,\ (p,q) = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

59.5*** Nel capitolo §**8** si dà la nozione di insieme avente misura di Lebesgue nulla. Si dimostri che la funzione f_n con $n > 2$ dell'esercizio **58.5***** è derivabile ovunque tranne un insieme avente misura di Lebesgue nulla.

60.5**...** Nell'esercizio **4.5***** si è caratterizzato l'insieme $Disc(f)$ per una qualsiasi funzione. Nell'**Appendice 1** e nell'**Appendice 2** si caratterizza l'insieme $Disc(f')$ che è un pò più complicato di $Disc(f)$

61.5**...** Dare un esempio di: 1) funzione definita e continua su tutto $\mathbf{R}$ ma avente derivata in nessun punto 2) funzione derivabile ovunque ma monotona in nessun intervallo (5.5).

62.5*** Usando una parte dell'esercizio **3.7***** si dimostri che se una funzione continua $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ soddisfa alle condizioni $f(x + 2\pi) = f(x)$ e $f(x + 2\pi\omega) = f(x)$ per ogni x con $\omega \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ allora la funzione è costante(6.5)

63.5*** Si dia una funzione che abbia gli stessi punti di continuità della funzione **6.5**** ma sia strettamente crescente. In relazione alle due funzioni interessate si veda l'esercizione **44.8***

64.5** È data una successione di funzioni $\{f_n\}$ $f_n\colon E \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Si dica chi è l'insieme $\cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{m=1}^{\infty} \{x \in E : |f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \frac{1}{k}\}$.
- Si descriva l'insieme dei punti per i quali $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$

(5.5) Si consiglia di guardare rispettivamente la **Appendice 10** e **Appendice 5** rispettivamente

(6.5) Tale esercizio è preso dall'articolo V.I.Arnol'd *Small denominators.I Mapping of the circumference onto itself* AMS Transl.Ser.,2 **46**, p.221

• Data una funzione $f\colon E\subseteq \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, si definisca l'insieme dei punti $x_o\in E$ in cui la funzione non è derivabile (si veda l'esercizio **31.7** sulle funzioni di due o più variabili) e l'insieme dei punti in cui è derivabile.

65.5** Nella **Appendice 2** si definiscono le *Derivate di Dini.* Riscriviamo per comodità tali definizioni
$D^+f(x)=f^+(x)\stackrel{\rm def}{=}\overline{\lim}_{h\searrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $\quad D_+f(x)=f_+(x)\stackrel{\rm def}{=}\underline{\lim}_{h\searrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$,
$D^-f(x)=f^-(x)\stackrel{\rm def}{=}\overline{\lim}_{h\nearrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $\quad D_-f(x)=f_-(x)\stackrel{\rm def}{=}\underline{\lim}_{h\nearrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, *(consideriamo pure i limiti infiniti) e sono dette rispettivamente $D^+f(x)$–derivata superiore destra, $D_+f(x)$–derivata inferiore destra, $D^-f(x)$–derivata superiore sinistra, $D_-f(x)$–derivata inferiore sinistra. Le definizioni sono date da $D^+f(x)=\inf_{\delta>0}\sup_{0<h<\delta}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Se $\{\delta_k\}$ è una successione decrescente allora la successione $\{S_k\}=\sup_{0<h<\delta_k}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ è pure descrescente (eventualmente l'estremo inferiore può essere $-\infty$). $D^-f(x)=\sup_{\delta>0}\inf_{0<h<\delta}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Se $\{\delta_k\}$ è una successione decrescente allora la successione $\{I_k\}=\inf_{0<h<\delta_k}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ è pure crescente (eventualmente l'estremo superiore può essere $+\infty$). Per i limiti sinistri le definizioni sono del tutto analoghe. Chiaramente si hanno le relazioni $D_+f(x)\le D^+f(x)$, $D_-f(x)\le D^-f(x)$ e una funzione è derivabile a destra se $D_+f(x)=D^+f(x)$ mentre è derivabile a sinistra se $D_-f(x)=D^-f(x)$ con i limiti che possono assumere il valore $\pm\infty$. Se una funzione è derivabile a destra diciamo che esiste $f'_+(x)$ e viceversa a sinistra con $f'_-(x)$.* Sempre nella **Appendice 2** si dimostrano il **Teorema 4.10.2** e **Teorema 5.10.2** che diamo per acquisiti.

• Sia data ora una funzione continua $f\colon[a,b]\to\mathbf{R}$; si dimostri che se una delle derivate di Dini è non–negativa al più tranne una quantità numerabile di punti, allora la funzione è non decrescente. Si dia un esempio di funzione non continua per la quale non vale la tesi

66.5** Sia $f\colon[a,b]\to\mathbf{R}$ continua e derivabile in (a,b). Si dimostri che se $C\ge\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ allora $f'(x)\le C$ per una quantità non–numerabile di punti

67.5* Si dia un esempio di quoziente $\frac{f(x)}{g(x)}$ per il quale: 1) esiste $\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}$ (x_o può essere infinito) 2) sono verificate tutte le ipotesi del Teorema di L'Hopital tranne quella per cui esiste $\lim_{x\to x_o}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

68.5* Si dia un esempio di funzione $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ che sia discontinua in tutti i punti tranne l'origine e inoltre $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=0$ per ogni n intero positivo.

69.5*** Si dia un esempio di funzione $f\colon(0,1)\to\mathbf{R}$ tale che $f'(x)=1$ in un insieme infinito di $(0,1)$ ma $|f|$ è derivabile in nessun punto(7.5)

• Si dia un esempio di funzione continua $f\colon(-1,1)\to\mathbf{R}$ con le seguenti caratteristiche: 1) $f'(x)=1$ in un insieme infinito $E\subset(-1,1)$ tale che $0\in E'\backslash E$ e $f'(0)$ non esiste 2) $|f|$ è derivabile in nessun punto. Per rispondere alla presente domanda bisogna conoscere la risposta alla domanda 1) dell'esercizio **61.5****··· (esistenza di una funzione continua non derivabile sull'intervallo $[a,b]$ $-\infty\le a<b\le+\infty$).

• • Costruire una una funzione tale che $f'(x)=1$ su un sottoinsieme *denso* (e quindi infinito) di $(0,1)$ e $|f|$ non derivabile in nessun punto

Es: • • • Costruire una una funzione tale che f è derivabile su un sottoinsieme *denso* di $(0,1)$ e $|f|$ non derivabile in nessun punto (sono ammesse derivate infinite).

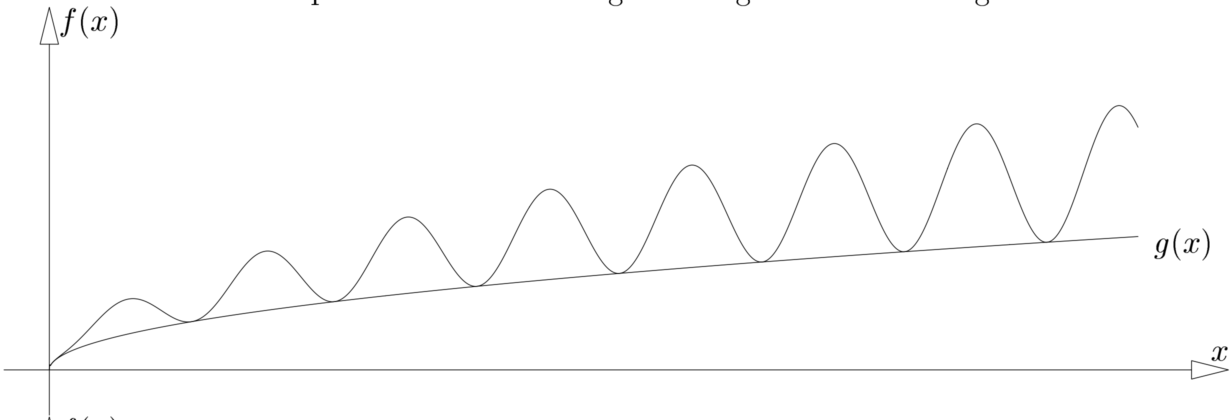
(7.5) da *E.Just; E.Andersen; J.G.Mauldon* *American Mathematical Monthly* Vol.75, No.6, p.688 1967; la funzione $|f|$ e la soluzione ivi proposta è leggermente diversa dalla presente sebbene l'idea sia la stessa.

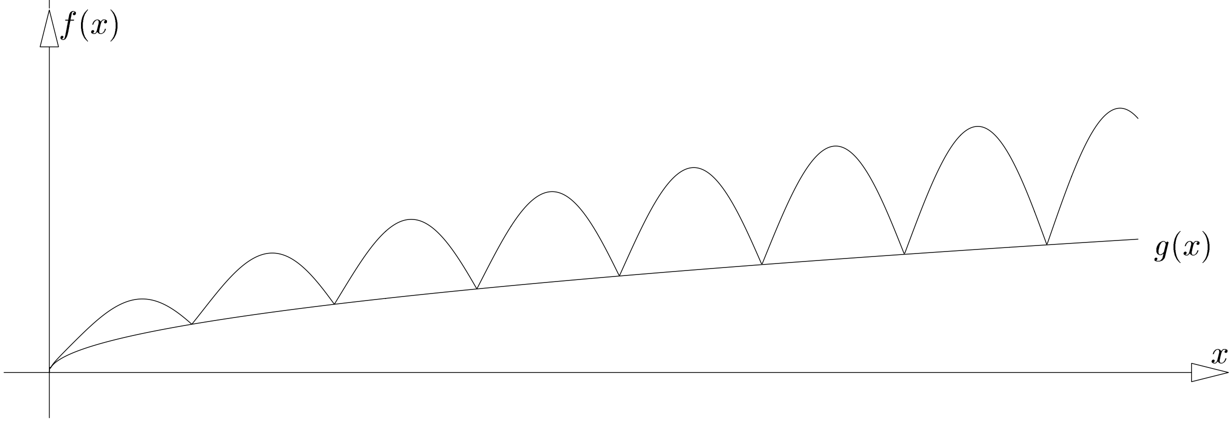
70.5 Si dimostri il seguente teorema: *Sia data una funzione* $f\colon K \subseteq \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ *con* K *compatto. Allora se* f *è invertibile, l'inversa è a sua volta continua.*

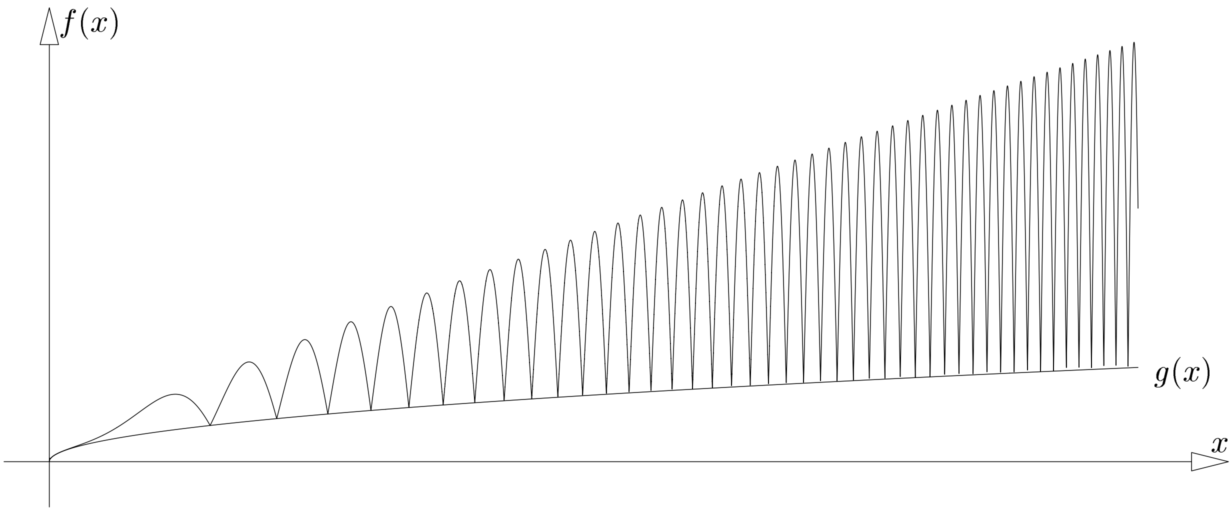
Definizione un insieme $E \subset \mathbf{R}$ si dice *sconnesso* se $E = A \cup B$ con $\overline{A} \cap B = \overline{B} \cap A = \emptyset$. La stessa definizione è valida in $\mathbf{R}^n$

71.5 Si dimostri che l'immagine continua di un insieme connesso è connessa.

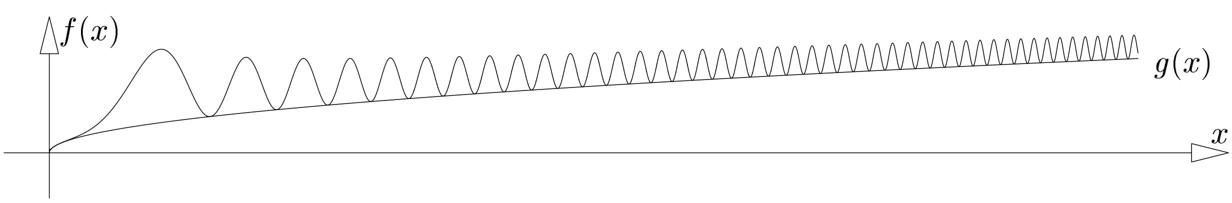
72.5 Si dia un esempio di funzione il cui grafico è grosso modo il seguente







¡



ossia delle funzioni $f(x)$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ma tale che $f(x)$ non è strettamente monotona, $f(x) \geq g(x)$ e il grafico ha le caratteristica disegnata.

73.5 Si dia un esempio di funzione $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua, derivabile su un insieme denso E e tale che $|f'(x)| = +\infty$ per $x \in E$.

74.5 Siano a e b non negativi e sia data la funzione $P(a,b) = \begin{cases} \frac{1}{e} a^{\frac{a}{a-b}} b^{\frac{b}{b-a}} & a \neq b \\ a & a = b \end{cases}$ Dimostrare che $P(a,b) \geq \left(\frac{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}{2}\right)^3$

75.5*** Si dimostri che la funzione $f(x) = \begin{cases} \cos x^{-1} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ è una derivata [Suggerimento: si scriva $x \sin x^{-1}$ e se ne faccia la derivata ...]. Nell'esercizio **22.8** si risolve un problema analogo ma usando gli integrali. [Il testo è preso dall'esercizio E3329 (Balazard, Botsko, Grivaux, Kuczma) *American Mathematical Monthly* vol.98, No.3.(Mar.,1991), pp.267–268]

Dimostriamo ora il seguente Teorema: *Se $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ha il grafico chiuso, allora sono equivalenti le quattro affermazioni*
1) f è continua
2) f è localmente limitata
3) f verifica la proprietà dei valori intermedi
4) Il grafico di f è connesso in $\mathbf{R}^2$

Con l'esercizio **76.5** si dimostra che 2) implica 1). Con l'esercizio **77.5** si dimostra che 3) implica 1). Con l'esercizio **78.5** si dimostra che 4) implica 3). I teoremi per cui 1) implica 2)–4) sono ben noti [da: *C.E.BurgessA.M.M.* Vol.97, No.4 (Apr., 1990), 337–339]

76.5 Sia data una funzione $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *localmente limitata* . Se il grafico di f, $A \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, f(x))\colon x \in \mathbf{R}\}$ è un sottoinsieme chiuso di $\mathbf{R}^2$ allora f è continua [da: *C.E.BurgessA.M.M.* Vol.97, No.4 (Apr., 1990), 337–339]

77.5 Sia data una funzione $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tale che il grafico è chiuso e verifica la proprietà dei valori intermedi. Allora f è continua. [da: *C.E.BurgessA.M.M.* Vol.97, No.4 (Apr., 1990), 337–339]

78.5 Dimostrare che una funzione $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ avente grafico connesso verifica la proprietà dei valori intermedi [da: *C.E.BurgessA.M.M.* Vol.97, No.4 (Apr., 1990), 337–339]

Se si toglie l'ipotesi, grafico chiuso, ugualmente 4) implica 3), ovviamente 1) implica 2)–4) ma le altre implicazioni sono false.
Per 2) $\not\Rightarrow$ 3) vedi f_4 nella risoluzione; per 3) $\not\Rightarrow$ 2) vedi f_1; per 2) $\not\Rightarrow$ 4) vedi f_4; per 4) $\not\Rightarrow$ 2) si prenda $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(1/x)}{x} & x \neq 0 \\ 0 \quad x = 0 \end{cases}$ (in questo caso occore dimostrare che il grafico di g è connesso); per 3) $\not\Rightarrow$ 4) vedi f_3. Per quest'ultimo controesempio l'autore fà uso dell'*assioma della scelta* attraverso il *buon ordinamento*; una scelta che appare eccessiva.

79.5 Sia data una funzione $f\colon [a, +\infty) \to (0 + \infty)$ uniformemente continua. Sia $a > 0$. Dimostrare oppure trovare un controesempio alle tre affermazioni: 1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+a)}{f(x)} = 1$. 2) se esiste (finito o infinito) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, allora $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+a)}{f(x)} = 1$. 3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+\frac{1}{x})}{f(x)} = 1$.

80.5 Sia data una funzione derivabile $f\colon(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f+f'=0$. Allora $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ (e quindi anche f') [G.H.Hardy *A Course in Pure Mathematics*, 10th ed., 1967, p.281, problem 50; 2) Problem E2663 of *Amer. Math. Monthly*, Vol.85, No.8. (Oct.,1978), pp.685–686]
Sulla stessa falsariga dimostrare che se $\lim_{x\to+\infty} f+f'+f''=L$ (si intende che esiste la derivata seconda) allora $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$ [Problem 5875 of *Amer. Math. Monthly*, Vol.81, No.1. (Jan.,1974), pp.92–93];

81.5 Diamo una definizione. Sia $f\colon I\to\mathbf{R}$, I intervallo, una funzione derivabile e $[a,b]\subset I$. Diciamo che f è uniformemente derivabile in $[a,b]$ se $\forall\ \varepsilon\ \exists\ \delta_\varepsilon\colon\ 0<|h|<\delta,\ x+h\in I\ \Rightarrow \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|<\varepsilon,\ x\in[a,b]$. Sussiste il seguente interessante teorema. La nozione di uniforme differenziabilità si riferisce al fatto δ_ε dipende solo da ε e non da $x\in[a,b]$.
Teorema *f' è continua in $[a,b]$ se e solo se f è uniformemente differenziabile in $[a,b]$*
[R.Weinstock *American Mathematical Monthly* vol.64, No.7.(Aug. – Sep.,1957), pp.492]

SOLUZIONI

2.5 i) $f(x)=\begin{cases}0 & \text{se}\quad x\neq 0\\ 1 & \text{se}\quad x=0\end{cases}$ Si prenda l'intervallo in ordinate $V=(\frac12,\frac32)$. La sua controimmagine è data dal punto $x=0$ e quindi non contiene nessun intervallo aperto.

ii) No, non è la stessa cosa. Si prenda la funzione $f(x)=\begin{cases}x & x\in(-1,2)\\ 1 & x=3\end{cases}$ È chiaro che $f^{-1}(\frac12,\frac32)=(\frac12,\frac32)\cup\{3\}$ che non è certamente un insieme aperto.
iii) $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ $f(x)\equiv r$ con r costante qualsiasi e si prenda $U=(b,c)$. L'immagine di U secondo f è identicamente il punto r che è palesemente un insieme chiuso. iv) Stessa funzione di cui sopra. Infatti la controimmagine di r secondo f è tutto l'asse reale. Si noti che la funzione si guarda bene dall'essere invertibile. v) $f\colon\mathbf{R}\to(0,1]$ $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$; infatti l'immagine secondo f della retta reale, che è un insieme chiuso, è l'insieme $(0,1]$ che non è chiuso vi**) $f(x)=\sin x$ e $C=\mathbf{N}$ (la dimostrazione che $\sin C$ non è chiuso è legata all'esercizio **1.5*****). Qualsiasi funzione si prenda la soluzione deve contemplare il fatto che C non può essere limitato in quanto un insieme chiuso e limitato è compatto e l'immagine continua di un compatto è compatta e dunque chiusa. viii) L'affermazione è falsa. Un controesempio è dato dalla funzione $f\colon[0,1]\cup(2,3]\to\mathbf{R}$ $f(x)=\begin{cases}x & \text{se } 0\le x\le 1\\ x-1 & \text{se } 2<x\le 3\end{cases}$ Se $y_n=f(x_n)\doteq x_n-1\to 1^+$ si ha $x_n\to 2^+$ ma $f(1)=1$.
Si noti che l'affermazione data nel testo e la cui falsità è evidenziata dal precedente esempio, è equivalente ad affermare che l'inversa di f, qualora esista è continua. L'affermazione dunque è vera qualora la f sia invertibile e l'inversa è continua; ad esempio se f è definita su di un intervallo, è continua ed invertibile oppure se è definita su di un insieme compatto, è continua ed invertibile.

3.5 i) Si prenda ad esempio $f(x)=\sin x$, $K'=\{0\}$. ii) L'affermazione è falsa. Si prenda la funzione $\mathcal{X}_{\mathbf{Q}}\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ che vale 1 se $x\in\mathbf{Q}$ e 0 se $x\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$

4.5*** Dimostrare che $Disc(f)=\cup_{k=1}^{\infty}\cap_{x\in Dom(f)}\overline{\{y\in Dom(f)\colon|f(x)-f(y)|\ge\frac1k\}}$ e di conseguenza $Cont(f)=\cap_{k=1}^{\infty}\cup_{x\in Dom(f)}\{y\in Dom(f)\colon|f(x)-f(y)|<\frac1k\}^{\circ}$.

- $f(x)=\begin{cases}1 & \partial C\ \vee\ \overset{\circ}{C}\cap\mathbf{Q}\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$

Si sostituisca ora $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ con $f: X \to \mathbf{R}$ e $X \subset \mathbf{R}$ completo. Sugli spazi completi si può vedere la **Appendice 2**. La comprensione di essa richiede una buona conoscenza degli argomenti che la precedono. Ossia si consideri X, sottoinsieme completo di $\mathbf{R}$ e quindi lo spazio metrico $(X; d)$ dove $d(x, y) = |x - y|$. Rimane vero il risultato? La risposta è no. Si prenda ad esempio $X = [0, 1] \cup \{2\}$. Come sottoinsieme di $\mathbf{R}$, X è chiuso e quindi $(X; d)$ è completo. Il punto ora è che qualsiasi funzione $f: X \to \mathbf{R}$ è continua in 2 poiché gli intorni $U = \{x \in X: |x-2| < 1\}$ sono costituiti dal singoletto $\{2\}$. In altre parole gli insiemi aperti U di raggio minore di 1 intorno al punto 2 sono dati esattamente dal punto 2 e quindi la funzione è continua in 2. Dunque non può esistere una funzione f tale che $Disc(f) = X$. Ciò che X non verifica è la relazione $X' = X$ la quale escluderebbe immediatamente $\{2\}$ dall'insieme.

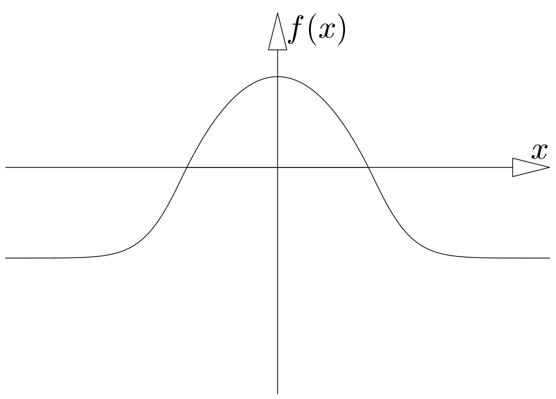
• $f(x) = \begin{cases} 2^{-k} & x \in \overset{\circ}{A}_k \cap \mathbf{Q} \ \vee \ x \in \partial A_k \\ 0 & x \in \overset{\circ}{A}_k \cap \mathbf{Q}^c \ \vee \ x \in \mathbf{R} \backslash F \end{cases}$

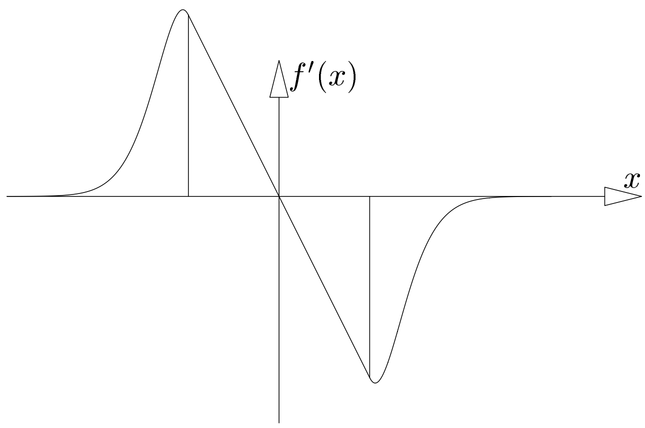
dove $A_1 = F_1$, $A_2 = F_2 \backslash F_1;$, $A_3 = F_3 \backslash (F_1 \cup F_2)$, $\cup_{k=1}^{\infty} F_k = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$ e via dicendo.

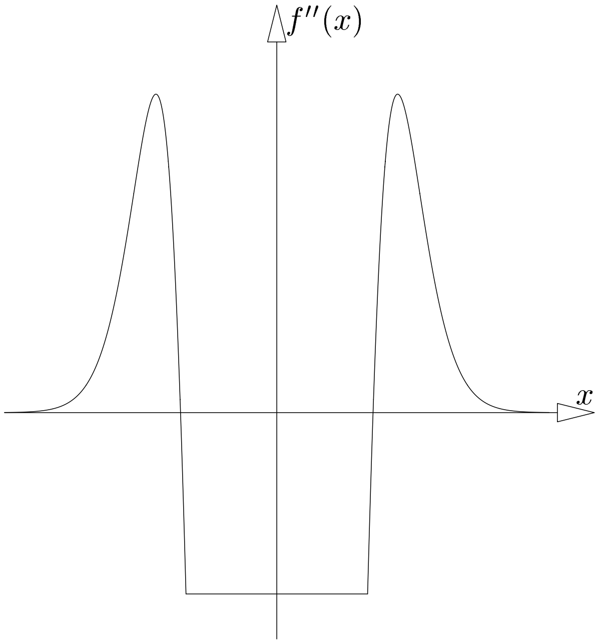
f è discontinua in F e continua nel complementare.

5.5 $a = \frac{3}{2}|c|$, $b = \frac{1}{2|c|^3}$; f_2 è continua solo per $x = 0$. È iniettiva e dunque invertibile ma non è monotona in nessun intervallo. Non è derivabile in nessun punto.

5.5.1 $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & -1 \le x \le 1 \\ -1 + e^{-10+24\sqrt{x}-14x} & x > 1 \\ -1 + e^{-10+24\sqrt{-x}+14x} & x < -1 \end{cases}$ il cui grafico è







$$f'(x) = \begin{cases} -2x & |x| \le 1 \\ e^{-10+24\sqrt{x}-14x}(-14 + \dfrac{12}{\sqrt{x.}}) & x > 1 \\ -e^{-10+24\sqrt{-x}+14x}(-14 + \dfrac{12}{\sqrt{-x}}) & x < -1 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & |x| \le 1 \\ e^{-10+24\sqrt{x}-14x}\dfrac{196x^{3/2} - 336x + 144\sqrt{x} - 6}{x^{3/2}} & x > 1 \\ e^{-10+24\sqrt{-x}+14x}\dfrac{196(-x)^{3/2} + 336x + 144\sqrt{-x} + 6}{x^{3/2}} & x < -1 \end{cases}$$

$$f'''(x) = \begin{cases} 0 & |x| \le 1 \\ e^{-10+24\sqrt{x}-14x}\dfrac{-6048x^{3/2} + 1980x - 216\sqrt{x} + 9 + 7056x^2 - 2744x^{5/2}}{x^{5/2}} & x > 1 \\ e^{-10-24\sqrt{-x}+14x}\dfrac{6048|x|^{3/2} + 1980x + 216\sqrt{|x|} - 9 - 7056x^2 + 2744|x|^{5/2}}{|x|^{5/2}} & x < -1 \end{cases}$$

6.5 La funzione scritta nell'esercizio è detta *funzione di Riemann* ed è continua sugli irrazionali mentre è discontinua sui razionali. Si provi ad immaginare cosa potrebbe voler dire "disegnare il grafico della funzione". Notare inoltre che l'insieme dei punti di discontinuità di f è scrivibile come $\cup_{p\in\mathbf{Q}}\{p\}$ ed essendo i razionali un insieme numerabile, ciò costituisce una verifica ulteriore dell'esercizio **4.5*****. Se si prendesse la funzione di Dirichlet (discontinua in ogni punto dell'asse reale) e si scrivesse l'insime dei punti di discontinuità nel seguente modo $\cup_{p\in\mathbf{R}}\{p\}$, apparentemente si cadrebbe in contraddizione con quanto asserito nell'esercizio **4.5***** non essendo $\mathbf{R}$ numerabile. Il punto è che $\mathbf{R}$ si può scrivere pure come $\bigcup_{k\ge1}[-k,k]$ che è precisamente l'unione numerabile di insiemi chiusi. Si potrebbe anche indicare direttamente $\mathbf{R}$ essendo esso e l'insieme vuoto sia aperti che chiusi. Ponendo $f(0) = 0$ si ottiene una funzione continua in 0 oltreché sugli irrazionali. La funzione non è derivabile in nessun punto.

7.5* Sono uniformemente continue su: tutto $\mathbf{R}$ le funzioni $f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_7,\ f_{10},\ f_{11}$; su ogni insieme aperto oppure chiuso ma limitato $f_4,\ f_5$, ed f_8 su $(-\infty,a]\cup[b,+\infty)$ con $a<0$ e $b>0$ f_6; su insiemi del tipo $(-\infty,a]$, $[a',b']$, $[b,\infty)$, con $a<-1$, $b>1$, $[a',b']\subset[-1,1]$ f_8; su ogni insieme limitato f_8.

8.5 $(f^{-1})''(y_o) = -\frac{f''(x_o)}{(f'(x_o))^3}$ e $(f^{-1})'''(y_o) = \frac{(f'')^2(x_o) - f'f'''(x_o)}{(f'(x_o))^3}$

9.5 $\gamma \le -\frac{1}{3}(1+2\sqrt{109})\ \vee\ \gamma \ge -1.$

10.5 f_1 è invertibile su tutto il suo dominio f_2 è invertibile nel suo dominio e l'equazione data ha due soluzioni f_3 come le precedenti ed il dominio dell'inversa è $(-\infty,-1]$

11.5 $a=\frac{1}{2}$ $b=1$; il dominio richiesto è $(-\infty,\frac{116}{27}]$ e g è derivabile in $(-\infty,\frac{116}{27})$

La derivata dell'inversa di $f(x)=e^x+\ln(\frac{1}{2}+4e^x)$ in $\frac{1}{8}$ è $\frac{8}{5}$

La derivata dell'inversa di $f(x)=3e^{x-1}+\ln(\frac{e}{2}+3e^x)$ in $\frac{3}{2}$ è 1

13.5 - Primo del gruppo - i) $a\geq 0$, $c\geq 16+4a-\log 2$. Il dominio dell'inversa è tutto l'asse reale se $c=16+4a-\log 2$ mentre per $c>16+4a-\log 2$ è $\mathbf{R}\backslash(16+4a,c+\log 2]$; inoltre $(f^{-1}_{a,c})'(\frac{1}{16(1+4a)})=2/(1+2a)$
ii) $a\geq 0$, $c=16+4a-\log 2$.
iii) $a\in\mathbf{R}$, $c=16+4a-\log 2$.

13.5 - Secondo del gruppo - i) $a\leq -8$, $c\geq -16-4a-\log 2$. Il dominio dell'inversa è tutto l'asse reale se $c=-16-4a-\log 2$ mentre per $c>-16-4a-\log 2$ è $\mathbf{R}\backslash(-16-4a,c+\log 2]$; inoltre $(g^{-1}_{a,c})'(\frac{1}{16(1+4a)})=-2/(1+2a)$
ii) $a\leq -8$, $c=-16-4a-\log 2$.
iii) $a\in\mathbf{R}$, $c=-16-4a-\log 2$.

13.5 - Terzo del gruppo - i) $a\geq 0$, $c\geq 16+4a$; il dominio dell'inversa è $(-\infty,\frac{2c+1}{2})$ se $c=16+4a$ mentre per $c>16+4a$ è $(-\infty,16+4a]\cup(c,\frac{2c+1}{2})$ inoltre $(h^{-1}_{a,c})'(\frac{1}{16(1+4a)})=2/(1+2a)$
ii) per nessun valore di a e c in quanto l'inversa non può avere dominio tutta la retta. Ove anche si richiedesse solamente che l'inversa sia continua sul suo dominio di esistenza non si avrebbe ugualmente nessun valore a e c in quanto per $x=c$ si avrebbe un asintoto verticale. È evidente che l'esempio appena dato non soddisfa le conclusioni dei `Teoremi 5.6 e 5.10`. Verificare dove vengono a mancare le ipotesi di ciascuno dei teoremi.
iii) nessun valore di a e c.

13.5 - Quarto del gruppo - i) $a\geq 8$, $c\geq -16+4a$. Il dominio dell'inversa è tutto l'asse reale se $c=-16+4a$ mentre per $c>-16+4a$ è $\mathbf{R}\backslash(-16+4a,c+\frac{1}{2}]$; inoltre $(k^{-1}_{a,c})'(\frac{1}{16(1+4a)})=2/(-1+2a)$
ii) Come l'esercizio precedente
iii) Come l'esercizio precedente.

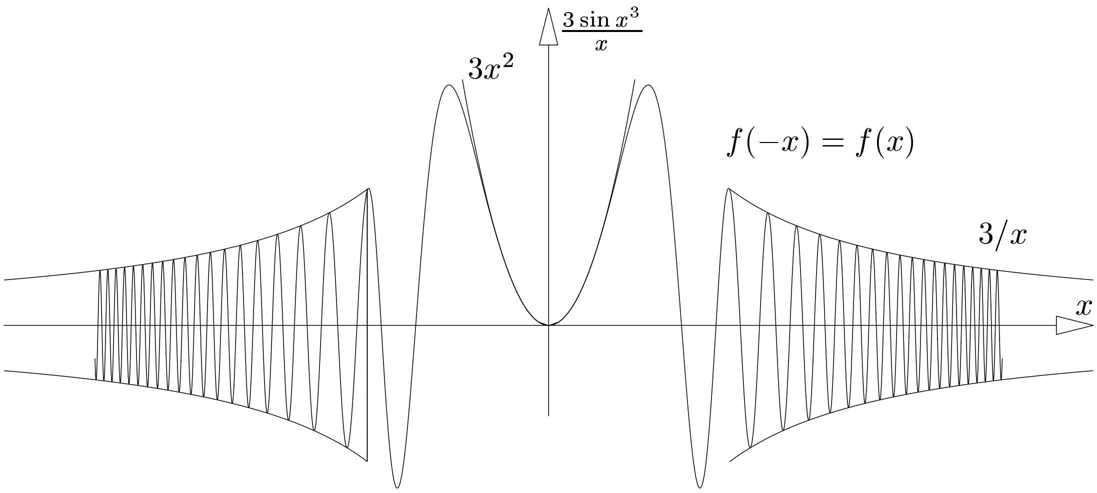
13.5 - Quinto del gruppo - Ci sono due casi distinti. Il primo è i) $a\geq 8$, $c\geq -16+4a-\ln 2$. Il dominio dell'inversa è tutto l'asse reale se $c=-16+4a+\ln 2$ mentre per $c>-16+4a+\ln 2$ è $\mathbf{R}\backslash(-16+4a,c+\ln 2]$; inoltre $(p^{-1}_{a,c})'(\frac{1}{16(1+4a)})=2/(-1+2a)$
ii) $a\geq 8$, $c=-16+4a-\log 2$.
iii) $a\in\mathbf{R}$, $c=-16+4a-\log 2$.

Il secondo caso è costituito da i) $-\frac{1}{4}<a<0$, $c\geq 17$. Il dominio dell'inversa è $\mathbf{R}\backslash(0,1+4a)\cup(17,c+\ln 2]$
ii) Nessun valore
iii) Nessun valore

14.5 $a\leq -1$

15.5* Si proceda per assurdo e si usi il Teorema di Lagrange.

16.5** Un esempio di funzione che tende a zero in modo non monotono è dato da $f(x)=\frac{3\sin x^3}{x}$ il cui grafico è



Si può verificare che non esiste il limite per x che tende a $+\infty$ della derivata prima ed inoltre la derivata prima è illimitata. Se esistesse il limite della derivata prima, dall'esercizio precedente, essendo la funzione $f(x)$ limitata, dovrebbe essere zero.

Più difficile è il caso di funzione che tende a zero in maniera monotona. Un esempio è il seguente $f\colon[1,+\infty) \to (0,1]$, $f(x) = \begin{cases} -2x + 2k + 2^{-k+1} & k \le x < k + 2^{-k-1} \quad k \ge 1 \\ 2^{-k} & k + 2^{-k-1} \le x < k+1 \end{cases}$

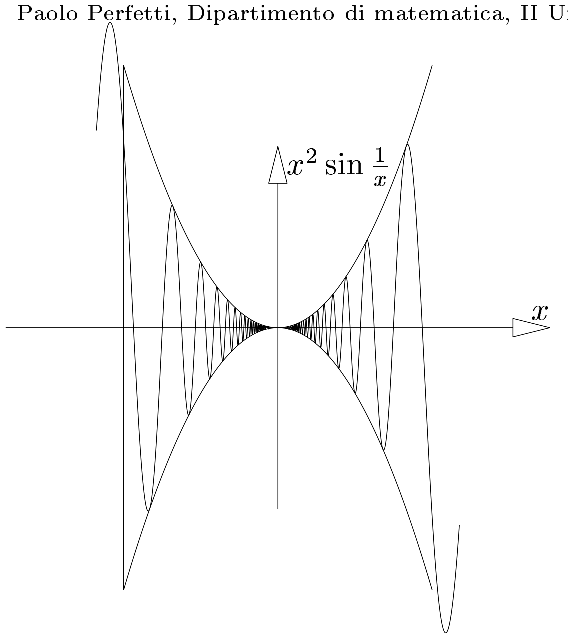
In questo caso la funzione è derivabile in tutti i punti ad eccezione dei punti con ascissa intera oppure del tipo $k + \frac{1}{2^{k+1}}$. La derivata prima è $f'(x) = \begin{cases} -2 & k < x < k + 2^{-k-1} \quad k \ge 1 \\ 0 & k + 2^{-k-1} < x < k+1 \end{cases}$

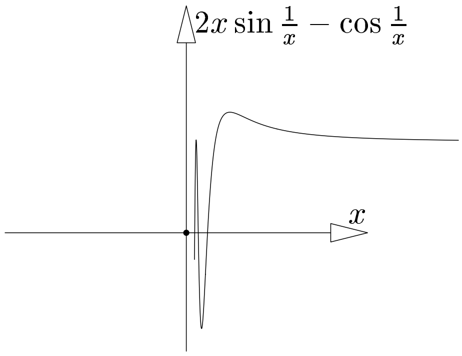
e quindi il limite non esiste (come ci apettavamo). Un pò più difficile è il caso in cui si voglia la funzione ovunque derivabile. In tal caso costruiamo una funzione *che si raccordi in modo derivabile alla funzione precedente nei punti di coordinate* $(k, \frac{1}{2^{k-1}})$ *e* $(k + \frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k})$. Si veda a tal punto la risoluzione dell'esercizio.

Si può verificare che la precedente funzione, pur essendo derivabile ovunque, non è derivabile due volte nei punti di raccordo. Per avere una funzione con le caratteristiche date e che almeno due volte derivabile si veda l'esercizio **25.8**.

17.5 L'affermazione è falsa ed il controesempio è dato da $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ per $x \neq 0$ e 0 per $x = 0$. In 0 la derivata è nulla ma si dimostri che 0 non può essere estremo locale né tantomeno un flesso [(9.5)]. Il grafico, necessariamente approssimato vicino all'origine, è il seguente (anche quello della derivata)

[(9.5)] Coloro i quali hanno letto il compito dato in occasione dell'Esame di Stato per il conseguimento della licenza liceale scientifica, A.S. 1998-1999, potranno notare una somiglianza con il primo dei quesiti proposti. Lì si chiedeva di stabilire la relazione di necessità e/o sufficienza fra l'avere una funzione derivata uguale a zero in un punto e l'essere quel punto di massimo o di minimo. La risposta era chiaramente che la derivata uguale a zero è condizione necessaria ma non sufficiente ed un possibile controesempio è dato dalla funzione $f(x)=x^3$ che in $x=0$ ha un flesso e contemporaneamente derivata nulla. L'esercizio proposto dimostra che la derivata nulla non è sufficiente neppure se aggiungiamo che nel punto in questione vi possa essere un flesso.





19.5 - Primo del gruppo - $\alpha \leq -8$ - Secondo del gruppo - $\alpha \in (-\infty, 0) \cup (0, 3]$ - Terzo del gruppo - $\alpha \geq \frac{3}{2} + \frac{\pi}{8}$. - Quarto del gruppo - $\alpha \leq -1$ - Quinto del gruppo - $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$ - Sesto del gruppo - $|\alpha| < \frac{\pi}{6}$ - Settimo del gruppo - $\alpha \leq -3$

21.5 Per f_1 la risposta è $|\lambda| > 1$ mentre per f_2 la risposta è $\lambda \neq 0$.

23.5 $(-\frac{1}{x^{101}} + \frac{1}{(x+1)^{101}} + \frac{1}{(x-1)^{101}})(100)!$.

24.5 Se esiste $\lim_{h\to 0} \frac{1}{2h}(f(x_o + h) - f(x_o - h))$ non è detto che la funzione sia derivabile in x_o. Se $f(x) = |x|$ si ha $f(h) - f(-h) = 0$ per ogni h ma la funzione non è derivabile in zero.

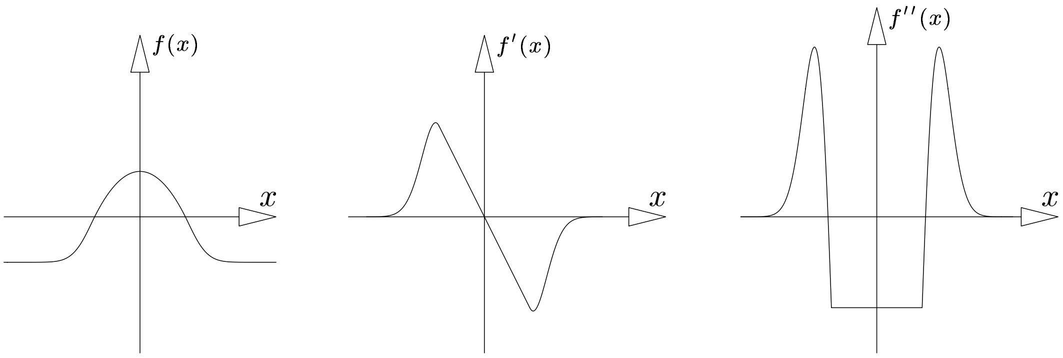
• Non è detto neppure che sia continua. Infatti la funzione $f(x) = \begin{cases} |x| & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ verifica $\lim_{h\to 0} \frac{1}{2h}(f(x_o + h) - f(x_o - h))$ ma non è continua.

24.5.0.5** L'affermazione è falsa e il controesempio è dato dalla seguente funzione. Siano $\{x_n\}$ e α_n, due successioni tale che $x_n \searrow 0$ e $\alpha_n \searrow 0$ (ad esempio $x_n = \alpha_n = \frac{1}{n}$) e sia $y_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1})$ definiamo la funzione $\tilde{f}\colon \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ $\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 0 & x \in \{x_n\} \\ \alpha_n(x - x_{n+1}) & x_{n+1} < x < y_n \\ -\alpha_n(x - x_n) & y_n < x < x_n \\ \dfrac{1}{2}\alpha_n(x_n - x_{n+1}) + y_n & x = y_n \end{cases}$

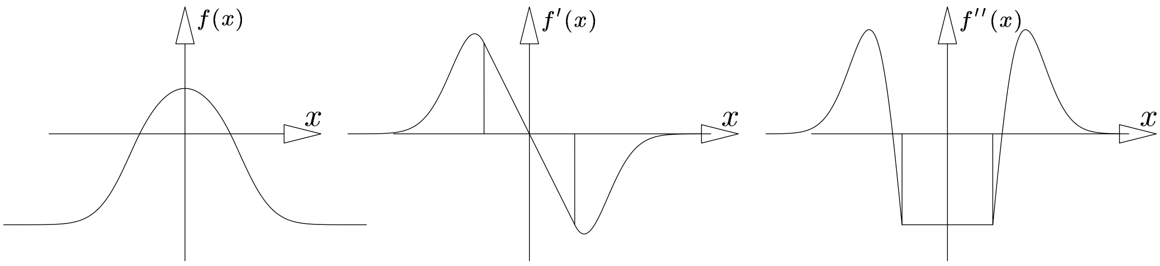
$$f(x) = \begin{cases} \tilde{f}(x) & x \geq 0 \\ \tilde{f}(-x) & x \leq 0 \end{cases}$$

La funzione data nell'articolo richiamato è $f(x) = \begin{cases} \pm\, n^{-1} & x = n^{-1} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

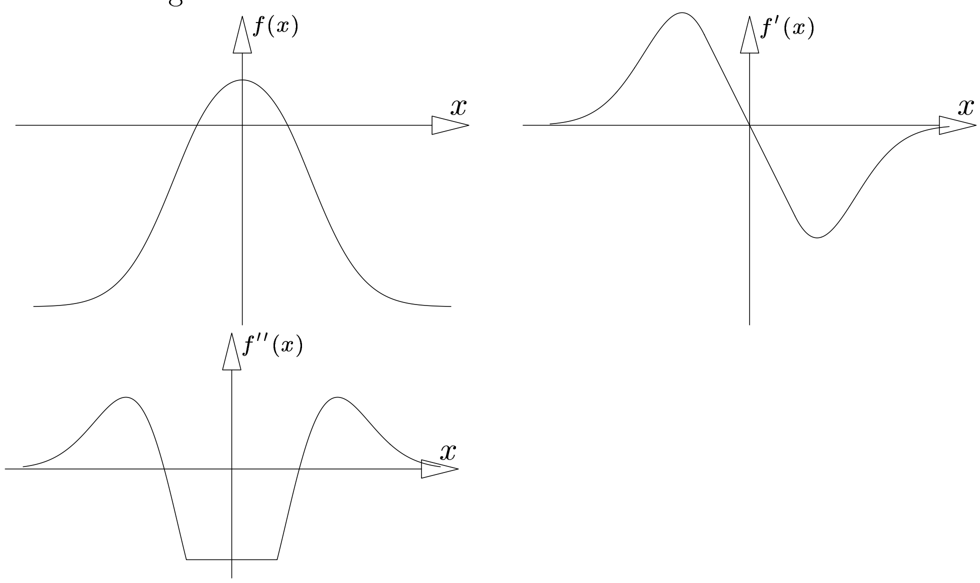
24.5.1 Le condizioni di derivabilità sono $a = \frac{2}{d^2} - \frac{1}{d}$, $b = -\frac{4}{d^2}$, $c = -de^{a+b}$. Se $|d| \leq 1$ si ha $\frac{(M_1)^2}{2M_0M_2} = \frac{d}{4} e^{\frac{1}{2}\frac{4-d}{2-d}}$. Se $1 < |d| < d_o$ si ha $\frac{(M_1)^2}{2M_0M_2} = \frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}\frac{4-d}{2-d}}$. Se $|d| > d_o$ si ha $\frac{(M_1)^2}{2M_0M_2} = \frac{2+|d|}{|d|} e^{\frac{-|d|}{2+|d|}}$. $-d_o$ è quel valore di d per cui $M_2 > 2$. Con $d = -1$ i grafici sono i seguenti.



Con $d = 2$ i grafici sono

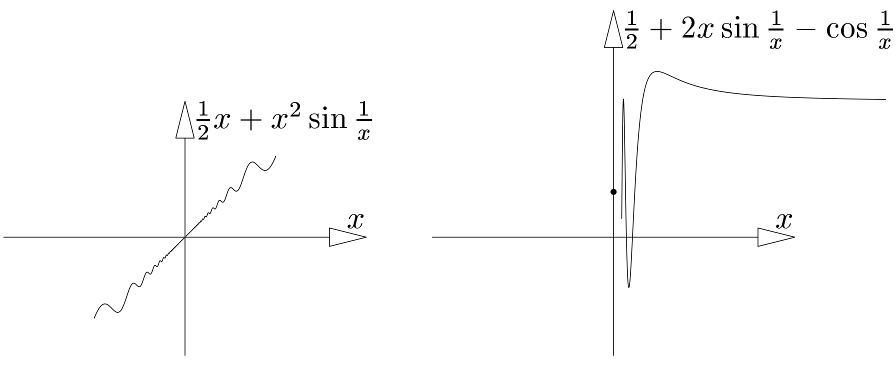


con $d = 4$ i grafici sono



30.5* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x + x^2 \sin \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

il cui grafico, insieme con quello della derivata prima è:



32.5** La funzione è definita e continua su tutto il suo dominio costituito da $[0,1]$ tranne i punti che ammettono uno sviluppo decimale periodico con periodo 9

34.5 Esiste una sola soluzione e $\frac{1}{2} < x < 1$

35.5 La risposta non è certo unica. Si può prendere ad esempio

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{d-c}{b-a}(x-a)+c & a < x < \dfrac{a+b}{2} \\ \dfrac{d-c}{2(b-a)}(x-b)+d & \dfrac{a+b}{2} \le x \le b \end{cases}$$

37.5 Il limite è zero.

39.5 $0 \le e < 1$

40.5 - Primo del gruppo - No Ad esempio si prenda la funzione che vale -1 per $x<0$, 1 per $x>0$ e $\frac{1}{2}$ per $x=0$. Sia $x_o = 0$; per ogni $\delta > 0$ prendiamo $\varepsilon = 1$ ed abbiamo che se $|x| < \delta$ ne segue che $|f(x) - \frac{1}{2}| < 1$ chiaramente ma la funzione non è continua in $x=0$.

- Secondo del gruppo - No; Si prenda la funzione $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & x \in [-1,1]\backslash\{0\}, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Qualunque sia ε prendo $\delta = 1$ ed è verificata la relazione del problema ma la funzione non è continua in $x=0$.

42.5** No; $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & x \ne 0 \\ c \in [-1,1] & x = 0 \end{cases}$

44.5* Prendendo come A e B due sottoinsiemi di $\mathbf{R}$ va bene $A = \{k\}$, $k \in \mathbf{Z}$, $B = \{k + \frac{1}{2k+1}\}$, $k \in \mathbf{Z}$. In $\mathbf{R}^2$ si può prendere $A = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \mid xy = 1\}$, $B = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \mid y = 0\}$

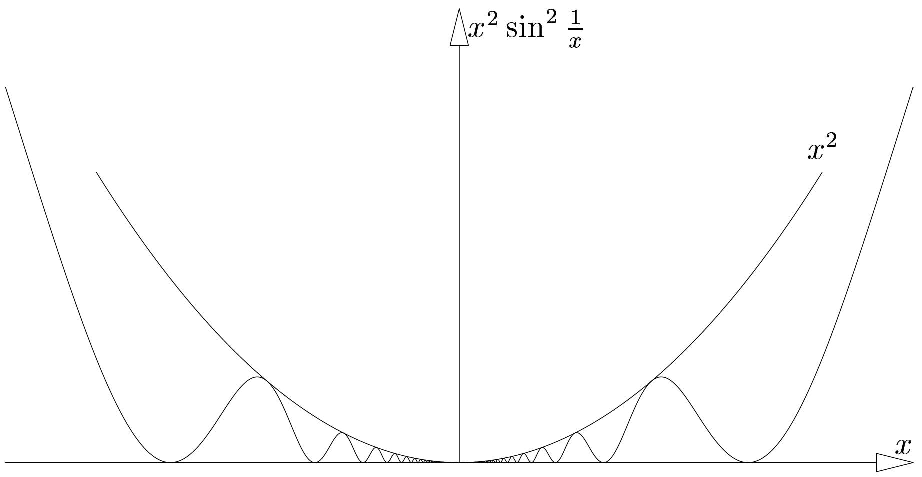
46.5 $y^2 = \frac{1}{2}px$, $y = \log_b e$, $y^2 = \frac{x^4}{a^2-x^2}$, $y = \sqrt{a^2 - x^2}$

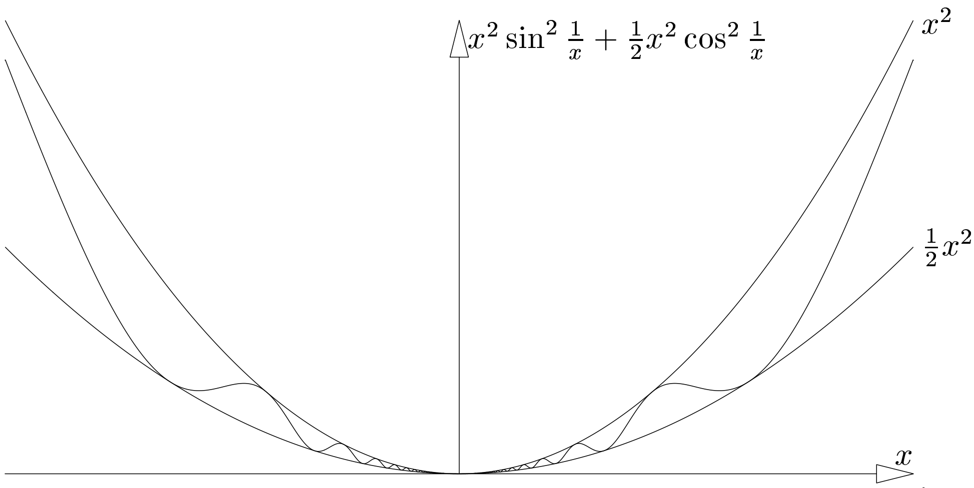
48.5*** Sia $f\colon [a,b] \to (a,b)$ siffatta: siano date le successioni $x_n \nearrow b$ e $x_n \in (\frac{b+a}{2}, b)$, $x_n' \searrow a$ e $x_n' \in (a, \frac{a+b}{2})$.

$$f(x) = \begin{cases} x_{n+1} & \text{se } x = x_n & n > 1 \\ x_o & \text{se } x = b \\ x'_{n+1} & \text{se } x = x'_n & n > 1 \\ x'_o & \text{se } x = a \\ x & \text{altrimenti} \end{cases}$$

51.5** L'affermazione è falsa. Si consideri la funzione $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\dfrac{1}{x} & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ e si prenda $a = 0$. $f(0) = f'(0) = 0$ (verificare). La funzione è rappresentabile come dice il testo dell'esercizio con $B = 0$; infatti $f(0+h) = f(0) + f'(0)h + \frac{1}{2}Bh^2 + o(h^2)$ si riduce a $o(h^2) = h^3 \sin\frac{1}{h}$. Nonostante ciò la derivata seconda della funzione calcolata in zero non esiste.

52.5** La funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin^2 \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ha in 0 un minimo locale non forte in quanto la successione di punti $x_k = \frac{1}{k\pi}$ è costituita da punti di minimo locale forte che si accumulano in 0. Inoltre la funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin^2 \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2} x^2 \cos^2 \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ha in 0 un minimo locale forte ma la derivata prima non è positiva (per ogni valore di x) in nessun intorno destro di 0 e negativa (per ogni valore di x) in nessun intorno sinistro di 0. Il grafico delle due funzioni è il seguente





• Per quanto riguarda l'ultima domanda la funzione $f(x) = \begin{cases} x^3 + x^4 \sin^2 \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ha $f'(0) = f''(0) = 0$, $x \cdot f(x) > 0$, per ogni $x \neq 0$, ma $f'''(0)$ non esiste.

53.5 `Dal teorema 6.6` è vera $E(f) \subset T(f)$. $T(f)$ puó essere benissimo non–numerabile; si veda a tal proposito l'esercizio **40.8***** che ad ogni modo prevede come requisito la conoscenza delle proprietà principali *dell'insieme di Cantor*; nell'esercizio in questione vengono elencate al fine di poterlo risolvere senza necessariamente conoscere l'insieme.
Per quanto concerne la funzione f_2 dell'esercizio **5.5** si ha $E(f_2) = \emptyset$. $E(f) = \{\frac{1}{q} \mid q \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}\} \cup \{0\}$. 0 è un minimo mentre tutti gli altri punti sono massimi. È opportuno osservare che $E(f)$

è numerabile (come deve essere) e che i valori delle ascisse nei quali è assunto il valore minimo 0 è non–numerabile. Da ultimo abbiamo $E(f)=\{0,1\}$ per la *funzione di Dirichlet*.

60.5**...** Nell'**Appendice 2** (vedi anche la **1**) si dimostra che se una funzione definita su $\mathbf{R}$ è derivabile allora $Disc(f')$ è un F_σ di prima categoria e viceversa un insieme F_σ e di prima categoria è l'insieme dei punti di discontinuità della derivata di una funzione. Ne segue ad esempio che un intervallo chiuso $[a,b]$, certamente un F_σ, non può essere $Disc(f')$ non essendo di prima categoria. Viceversa può essere $Disc(f)$ per una qualche funzione come mostrato nell'esercizio **4.5*****

63.5*** si ordinino i numeri razionali (ossia si dia una corrispondenza biunivoca fra $\mathbf{N}$ e $\mathbf{Q}$) ottenendo $\mathbf{Q}=\{r_k\}$. Inoltre si dia una successione di numeri positivi $\{a_k\}$ tale che $\sum_k a_k<\infty$. A questo punto si definisca $f(x)\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{k:r_k<x}a_k$.

64.5** È l'insieme dei punti $\{x\}$ per i quali la successione $\{f_n(x)\}$ è di Cauchy e quindi esiste finito $\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=l$.

• L'insieme dei punti in cui si ha $\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=+\infty$ è dato da $\cap_{k\ge1}\cup_{n\ge k}\cap_{m\ge1}\{x: f_{n+m}(x)>k\}$

• Un modo di descrivere i punti in cui la funzione non è derivabile è $H\stackrel{\text{def}}{=}\cup_{k=1}^\infty\cap_{n=1}^\infty\{x\in E\colon \exists\ y,z\in(x-\frac1n,x+\frac1n)\cap E\backslash\{x\}\colon |\frac{f(y)-f(x)}{y-x}-\frac{f(z)-f(x)}{z-x}|\ge\frac1k\}$. L'insieme dei punti in cui la funzione è derivabile si scrive come $H^c\stackrel{\text{def}}{=}\cap_{k=1}^\infty\cup_{n=k}^\infty\{x\in E\colon \exists\ y,z\in(x-\frac1n,x+\frac1n)\cap E\backslash\{x\}\colon |\frac{f(y)-f(x)}{y-x}-\frac{f(z)-f(x)}{z-x}|\ge\frac1k\}^c=\cap_{k=1}^\infty\cup_{n=k}^\infty\ \{x\in E\colon\ y,z\in(x-\frac1n,x+\frac1n)\cap E\backslash\{x\}\Rightarrow |\frac{f(y)-f(x)}{y-x}-\frac{f(z)-f(x)}{z-x}|<\frac1k\}$.

67.5* $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sin x}{x+\frac{x^3}{4}\sin^2\frac{1}{x^2}}$ il cui limite per $x\to0$ è 1 chiaramente. Tutte le ipotesi del Teorema sono verificate tranne l'esistenza di $\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ in quanto $g'(x)=1+\frac34x^2\sin^2\frac{1}{x^2}-\frac12\sin\frac{2}{x^2}$. Tra l'altro $g'(x)\ge\frac12$ e quindi la frazione è definita.

• Un altro esempio è dato da $f(x)=x\sin\frac{1}{x^4}e^{-1/x^2}$ e $g(x)=e^{-1/x^2}$ (10.5)

• Se $x_o=+\infty$ allora si può prendere $f(x)=\frac{x+\sin x}{x+\cos x}$

• Un esempio diverso dai precedenti è dato da $f(x)=x+\sin x\cos x$, $g(x)=e^{\sin x}(x+\sin x\cos x)$. Chiaramente $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ non esiste ma $\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{2(\cos x)^2}{e^{\sin x}\cos x(2\cos x+x+\sin x\cos x)}$ e se superficialmente si semplifica $\cos x$ si ottiene $\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{2(\cos x)}{e^{\sin x}(2\cos x+x+\sin x\cos x)}$ che tende a 0 per $x\to+\infty$. La contraddizione nasce dal fatto che l'ipotesi $g'(x)\ne0$ definitivamente è falsa ma gli zeri di $f'(x)$ cancellano esattamente gli zeri di $g'(x)$. (11.5)

• Una discussione approfondita di tale fenomeno si trova in(12.5). In particolare si mette in evidenza che i problemi nascono non dal fatto che la derivata di $\sin x$ si annulla, quanto dal fatto che cambia segno. Il cambio di segno tende ad impedire alla funzione $\lambda(x)$ di crescere e quindi la funzione $e^{\sin x}$ non tende ad alcun limite. Viceversa se $\lambda'(x)\ge0$ può accadere che $e^{-\lambda(x)}\to0$.

Siano infatti: 1) $\lambda(x)=x+\sin x$ e quindi $\lambda'(x)\ge0$, 2) $f(x)=\int_0^x dt(\lambda')^2(t)=\frac32x+2\sin x+\frac14\sin(2x)$ 3) $g(x)=f(x)e^{\lambda(x)}$. In tal caso abbiamo $\frac{f'}{g'}=\frac{\lambda'}{\lambda'e^{\lambda(x)}+fe^\lambda}\to0$ per $x\to+\infty$ ed anche $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}e^{-\lambda(x)}=0$.

(10.5) da *N.W.Rickert* *Americam Mathematical Monthly* Vol.75, No.2 (Feb.,1968), 166

(11.5) da *K.Stromberg* *An Introduction to Classi Real Analysis* Chapman & Hall 1996 pag. 188.

(12.5) da *R.P.Boas* *American Mathematical Monthly* Vol.93, No.8 (Oct.,1986), p.644–645

68.5* $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x\in\mathbf{Q}\backslash\{0\} \\ 0 & x=0 \\ -\,e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}\end{cases}$

69.5*** È chiaro che se indichiamo con E l'insieme infinito di cui si parla, la funzione deve essere continua su E essendo ivi derivabile. Inoltre deve essere $f(x_o)=0$ per ogni $x_o\in E$ in quanto se così non fosse, per la permanenza del segno si avrebbe $f(x)>0$ oppure $f(x)<0$ in un intorno di x_o. Ma allora risulterebbe che $|f|=\pm f$ e quindi $|f|$ derivabile in x_o contrariamente all'ipotesi. Sia $E=\{\frac{1}{n}\}$

$$f(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{se } x=\dfrac{1}{n} \qquad n\geq 2 \\ \rho(x,\dfrac{1}{n}) \quad \text{se } x\in\mathbf{Q}\wedge\ \Big(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{2(n-1)}\Big) \\ -\,\rho(x,\dfrac{1}{n}) \quad \text{se } x\in\mathbf{Q}\wedge\ \Big(\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{2(n+1)},\dfrac{1}{n}\Big) \\ \rho(x,\dfrac{1}{n})+\rho^2(x,\dfrac{1}{n}) \quad \text{se } x\in\mathbf{Q}^c\wedge\ \Big(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{2(n-1)}\Big) \\ -\,\rho(x,\dfrac{1}{n})-\rho^2(x,\dfrac{1}{n}) \quad \text{se } x\in\mathbf{Q}^c\wedge\ \Big(\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{2(n+1)},\dfrac{1}{n}\Big)\end{cases}$$

$\rho(x,y)$ è la distanza fra x e y.

• Sia $W(x)\colon[0,1]\to\mathbf{R}$ una funzione con le seguenti caratterisiche: 1) $0\leq W(x)\leq 1$, 2) continua 3) non derivabile. L'esistenza di tale funzione è dimostrata nella appendice sulle funzioni non derivabili. Definiamo la funzione $W(x;a,b)=W(\frac{x-a}{b-a})\colon[a,b]\to\mathbf{R}$ e poi la funzione $Z(x;a,b)=\frac{(x-a)(b-x)}{b-a}+(x-a)^3(b-x)^3W(x;a,b)$ che ha le caratteristiche: 1) è continua, 2) derivabile in $x=a$, $x=b$ e $Z'(a)=-Z'(b)=1$, 3) non derivabile in (a,b). Per $n\geq 2$ definiamo $a_n=2^{-n}$ e quindi

$$\tilde f(x)=\begin{cases} -\,Z(x;\dfrac{1}{2}(a_{n-1}+a_n),a_{n-1}) & 3a_{n+1}\leq x\leq a_{n-1} \\ Z(x;a_n,\dfrac{1}{2}(a_{n-1}+a_n)) & a_n\leq x\leq 3a_{n+1}\end{cases} \qquad \text{e poi}$$

$$f(x)=\begin{cases}\tilde f(x) & 0\leq x\leq 1 \\ -\,\tilde f(-x) & -1\leq x\leq 0\end{cases}$$

• • La funzione non esiste.

72.5 Un esempio può essere $f(x)=g(x)+x\sin^2 x$, $f(x)=g(x)+x|\sin x|$, $f(x)=g(x)+x|\sin x^2|$, $f(x)=g(x)+\frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}$

73.5 Sia data la funzione $f_0\colon[0,1]\to\mathbf{R}$

$$f_0(x)=\begin{cases}\sqrt{x(\dfrac{1}{2}-x)} & x\in[0,\dfrac{1}{2}] \\ \sqrt{(x-\dfrac{1}{2})(1-x)} & x\in[\dfrac{1}{2},1]\end{cases}$$

$$f_1(x)=\begin{cases} f_0(2x) & x\in[0,\dfrac{1}{2}] \\ f_0(2x-1) & x\in[\dfrac{1}{2},1]\end{cases} \qquad f_0(2x)\doteq f_1^{(1)}(x),\ f_1(2x-1)\doteq f_2^{(1)}(x),$$

$$f_2(x) = \begin{cases} f_1^{(1)}(2x) & x \in [0, \frac{1}{4}] \\ f_1^{(1)}(2x - \frac{1}{2}) & x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ f_1^{(1)}(2x - 1) & x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ f_1^{(1)}(2x - \frac{3}{2}) & x \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

$f_1^{(1)}(2x) \overset{\rm def}{=} f_1^{(2)}(x)$, $f_1^{(1)}(2x - \frac{1}{2}) \overset{\rm def}{=} f_2^{(2)}(x)$, $f_1^{(1)}(2x-1) = f_3^{(2)}(x)$, $f_1^{(1)}(2x - \frac{3}{2}) = f_4^{(2)}(x)$,
La funzione $f_k(x)$ sarà composta da 2^k componenti $f_i^{(k)}(x)$ $i = 1, \ldots, 2^k$ con $f_1^{(k)}(x) = f_1^{(k-1)}(2x)$ e $f_{i+1}^{(k)}(x)$ è la traslazione di una quantità pari a $\frac{1}{2^k}$ della funzione $f_i^{(k)}(x)$. Si noti che la funzione $f^{(k)}(x)$ è periodica di periodo $\frac{1}{2^k}$.
A questo punto definiamo la funzione $F(x) = f_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3^k} f_k(x)$

74.5 Si utilizzino le derivate

75.5*** È ovviamente inutile usare il teorema fondamentale del calcolo non essendo la funzione continua in $x = 0$.

79.5 Sono tutte e tre false. Nel primo caso un controesempio semplice è $f(x) = 2 + \sin x$. Nel secondo caso è $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$ Nel terzo caso prendiamo la seguente funzione ($n \geq 2$)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{17}{2} & 0 < x \leq 2 \\ x(2n^2-1) + \dfrac{1}{n} - n(2n^2-1) & n \leq x \leq n + \dfrac{1}{n} \\ -x\dfrac{2+n}{n^2-1} + \dfrac{2}{n} + \dfrac{(n^2+1)(n+2)}{n(n^2-1)} & n + \dfrac{1}{n} \leq x \leq n+1 \end{cases}$$

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

1.5*** Ci sono almeno due modi per dimostrare il risultato.
Primo modo. È evidente che $\cos n < 1$ (dunque 1 è un maggiorante) ma non è lecito dedurne che sia il più piccolo dei maggioranti. È altrettanto banale osservare che -1 è un minorante dell'insieme.
$\cos x\colon \mathbf{R} \to [-1, 1]$ è una funzione continua e 2π-periodica. Definiamo ora un nuovo insieme detto delle *classi di equivalenza* e denotato con $\mathbf{T}$. Sia $[x] \doteq \{x' \in \mathbf{R} | \ \exists\ k \in \mathbf{Z}\ t.c.\ x' = x + 2k\pi,\ x \in [0, 2\pi]\}$; $[x]$ è detta *classe di equivalenza di x*. $\mathbf{T} \doteq \{[x]\ t.c.\ x \in [0, 2\pi]\}$. Un minimo di ragionamento fa vedere che i punti di $\mathbf{T}$ sono in corrispondenza biunivoca con i punti della circonferenza di raggio r qualsiasi. La corrispondenza (ovvia) è data da: se d identifica un punto della circonferenza misurato a partire da un'origine, si definisce $[x] = \frac{d}{r}$ (altri non è che l'angolo misurato in radianti). Viceversa, dato $[x] \in \mathbf{T}$ si identifica un punto sulla circonferenza attraverso la regola $d = r[x]$.
La sua corrispondenza con $\mathbf{R}$ non è certamente 1-ad-1 nel senso che ad ogni punto di $\mathbf{R}$ certamente corrisponde un solo punto nell'insieme dalle classi di equivalenza ma ad ogni punto del nuovo insieme corrispondono infiniti punti di $\mathbf{R}$.
Data la periodicità della funzione coseno, l'insieme costituito dalla sua immagine ($[-1, 1]$) è lo stesso che si avrebbe se si considerasse il coseno definito su $\mathbf{T}$. Ora consideriamo la funzione coseno definita solo sull'insieme dei numeri naturali $\mathbf{N} \subset \mathbf{R}$. Certamente la sua immagine non è più $[-1, 1]$ ma un suo sottoinsieme numerabile di punti che non comprende -1. Consideriamo ora il sottoinsieme di $\mathbf{T}$ costituito delle classi di equivalenza di $n \in \mathbf{N}$. È chiaro che essendo il coseno una funzione periodica $\cos n = \cos[n]$ e quindi si ha la uguaglianza fra i due insiemi

$\{y \in \mathbf{R}|\ y = \cos n,\ n \in \mathbf{N}\}$ e $\{y \in \mathbf{R}|\ y = \cos[n],\ [n] \in \mathbf{T}\}$ (con il vantaggio che ora $[n] \in [0, 2\pi]$.) Consideriamo ora la successione in $[0, 2\pi]$ data da $a_n = [n]$. Il risultato dell'esercizio **8.3***** ci dice che $[n]$ è densa su $[0, 2\pi]$ ossia $\overline{B} = [0, 2\pi]$ dove $B = \{a_n = [n]\}$ (si noti che mentre $[0, 2\pi]$ è un insieme non numerabile B lo è). Non ci resta che far vedere che l'immagine di B secondo la funzione coseno è un insieme denso in $(-1, 1)$ ossia $\overline{C} = [-1, 1]$ dove $C = \{y = \cos[n]\}$. Ciò è vero essendo il coseno una funzione continua. Supponiamo infatti che C non è denso in $(-1, 1)$. Esisterà allora almeno un punto $p \in (-1, 1)$ ed un intorno aperto V che contiene p e contenuto in $(-1, 1)$ tale che $V \cap C = \emptyset$ (per definizione di insieme non denso). Ma allora la controimmagine di V secondo il coseno, che è anche esso un insieme aperto essendo la funzione continua, U non interseca B e questo è un assurdo essendo B denso in $[0, 2\pi]$. La contraddizione si risolve dicendo che C è denso in $(-1, 1)$ e quindi $\sup C = +1$ e $\inf C = -1$.

Secondo modo. Si utilizza la seguente proposizione sui numeri irrazionali:

Proposizione 1 *Dato $\lambda \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$, per ogni intero positivo k esiste una frazione $\frac{m}{n}$ tali che $n \leq k$ e $|\lambda - \frac{m}{n}| < \frac{1}{nk}$* (la dimostrazione è posposta).

Da tale proposizione segue che esiste una successione $\{\frac{m_k}{n_k}\}$, m_k e n_k interi, tale che la distanza fra $2\pi n_k$ e m_k tende a zero per $k \to \infty$ ossia $\lim_{k\to\infty} |2\pi n_k - m_k| = 0$ ($\lambda = 2\pi$ in questo caso). Facciamo vedere ora come da ciò segue il risultato. Infatti $|1 - \cos m_k| = |1 - \cos(-2\pi + m_k)| = |1 - \cos(-2\pi n_k + m_k)| \leq \frac{1}{2}| - 2\pi n_k + m_k|^2 \to 0$ per $k \to \infty$. Dunque si è dimostrato come 1 sia effettivamente l'estremo superiore della successione $\cos n$. Un discorso del tutto analogo si può fare per l'estremo inferiore.

Rimane ora da dimostrare la proposizione che è stata usata nel corso della dimostrazione. $\lambda \doteq m_1 + \beta_1$ dove m_1 è intero e β_1 è un numero irrazionale compreso fra 0 ed 1; $2\lambda = m_2 + \beta_2 \ldots, k\lambda = m_k + \beta_k$ e $0 < \beta_j < 1$, $0 \leq j \leq k$. Suddividiamo l'intervallo aperto $(0, 1)$ in k intervalli $I_1, \ldots, I_k$ di lunghezza $\frac{1}{k}$; Se nel primo intervallo cadono uno o più β_j allora vuol dire che $|j\lambda - m_j| < \frac{1}{k}$ ossia $|\lambda - \frac{m_j}{j}| < \frac{1}{kj}$. Se in I_1 non cade alcun β_j allora vuol dire che in un intervallo I_r cadono almeno due valori β_i e β_j. Ciò implica che $|\beta_i - \beta_j| = |\lambda(i - j) + m_i - m_j| < \frac{1}{k}$ e quindi $|\lambda + \frac{m_i - m_j}{(i-j)}| < \frac{1}{k(i-j)}$. Dunque la proposizione è dimostrata. Va sottolineato che usare al posto della proposizione or ora dimostrata una affermazione del tipo $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \frac{p_k}{q_k}$ *t.c.* $|\lambda - \frac{p_k}{q_k}| < \varepsilon$ (affermazione equivalente alla densità dei razionali nei reali) non sarebbe bastato (lo studente verifichi ciò ripercorrendo la dimostrazione per trovare sup ed inf precedenti ed individuando il punto in cui la dimostrazione non può andare avanti). Ci vuole una "stima di ε" in termini degli approssimanti razionali $\frac{m_k}{n_k}$. Va aggiunto che si possono trovare approssimazioni dei numeri irrazionali "migliori" di parecchio rispetto al risultato della proposizione dimostrata ($\frac{1}{nk}$). Ad esempio raffinando il ragionamento precedente si può dimostrare

Proposizione 2 *Dato un numero irrrazionale λ esistono infinite frazioni $\frac{m}{n}$ tale che $|\lambda - \frac{m}{n}| < \frac{1}{n^2}$*

Dimostrazione Almeno una frazione esiste. Infatti dalla proposizione 1 sappiamo che $|\lambda - \frac{m}{n}| < \frac{1}{kn}$ con $k \geq n$ e quindi $|\lambda - \frac{m}{n}| < \frac{1}{n^2}$. Supponiamo ora che le frazioni siano in numero finito $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots, \frac{m_l}{n_l}$. Prendiamo ora un valore di k tale che $\frac{1}{k} < \min_{1\leq i\leq l}\{|\lambda - \frac{m_i}{n_i}|\}$ e quindi sono false le l disuguaglianze $-\frac{1}{k} < \lambda - \frac{m_i}{n_i} < \frac{1}{k}$. Tenendo fisso k applichiamo la proposizione 1 avendone $-\frac{1}{kn} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{kn}$ ossia $-\frac{1}{k} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{k}$. Ma allora la frazione $\frac{m}{n}$ non può far parte del gruppo $\frac{m_i}{n_i}$ in quanto le maggiorazioni $-\frac{1}{k} < \lambda - \frac{m_i}{n_i} < \frac{1}{k}$ sono false. Ne segue una contraddizione in quanto le frazioni erano in numero di l ed ora ne abbiamo una in più . La contraddizione si risolve dicendo che le frazioni sono in numero infinito (dove entra tale fatto nella dimostrazione?)

2.5 Prendiamo come ipotesi la definizione data nel testo dell'esercizio. Prendiamo $V = (f(x_o) - \varepsilon, f(x_o) + \varepsilon)$. La controimmagine di V è un aperto U che contiene x_o. Tale aperto non è detto sia un *intervallo*. Essendo però aperto, U è dato dall'unione di tutti gli intervalli aperti contenuti in esso (si veda l'esercizio **2.1.5**) e fra di essi ve ne è almeno uno che contiene x_o. Se tale intervallo è simmetrico rispetto a x_o allora è $(x_o-\delta_\varepsilon, x_o+\delta_\varepsilon)$. Se non è simmetrico prendiamo un suo sottointervallo simmetrico pari a $(x_o-\delta_\varepsilon, x_o+\delta_\varepsilon)$.

Viceversa supponiamo ora vera la definizione del libro di testo. Sia V un aperto contenente $f(x_o)$ e sia $\tilde V\subset V$ un intervallo aperto simmetrico contenente $f(x_o)$. La sua controimmagine è per ipotesi un intervallo contenente x_o e da esso possiamo ricavare un intervallo simmetrico contenente x_o quindi la tesi

ii) Si prenda l'aperto in ordinate dato da $V=(-\frac12,\frac12)\cup(\frac32,\frac72)$. La sua controimmagine è $(-\frac12,\frac12)\cup(\frac32,\frac52)\cup\{1\}$ che non è un insieme apero ma che contiene una sfera aperta con $x=0$ al suo interno (ad esempio).

vii)** Facciamo vedere che se $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ è tale che $\lim_{|x|\to+\infty}|f(x)|=+\infty$ allora l'immagine di un insieme chiuso è chiusa. Sia $C=\overline{C}\subset\mathbf{R}$; se C è limitato, essendo chiuso è compatto ed essendo f continua, $f(C)$ è compatto dunque chiuso. Sia C illimitato e sia $I_k=[-(k+1),-k]\cup[k,k+1]$. Chiaramente si ha $C=\cup_{k=0}^\infty(C\cap I_k)\doteq\cup_{k=0}^\infty C_k$; sia $Q_k=f(C_k)$ e $f(C)=\cup_{k=0}^\infty Q_k$. Se $p\in(f(C))'$. Mostriamo che $p\in f(C)$. Sia $\{y_k\}$ una successione di punti con $y_k\in f(C)$ tale che $y_k\to p$ ed inoltre $y_k\in B(p,r_o)$. Vogliamo far vedere che $p\in f(C)$.
Essendo $\lim_{|x|\to+\infty}|f(x)|=+\infty$ ne segue che la successione è contenuta all'interno di un numero finito di elementi Q_i. In altre parole esiste un intero N, che dipende dalla successione $\{y_k\}$, tale che $\{y_k\}\subset\cup_{i=1}^N Q_i$. Rimandiamo a dopo la dimostrazione. Ma $\cup_{i=1}^N Q_i$ è unione finita di chiusi e quindi è chiuso anch'esso e quindi $(\cup_{i=1}^N Q_i)'\subset\cup_{i=1}^N Q_i$ e quindi $p\in\cup_{i=1}^N Q_i\subset f(C)$.

Rimane ora da far vedere che, essendo $\lim_{|x|\to+\infty}|f(x)|=+\infty$, ne segue che la successione $\{y_k\}$ è contenuta all'interno di un numero finito di elementi Q_k. Infatti se così non fosse vorrebbe dire che per ogni intero N esiste un intero $k_{_N}$ tale che $y_{k_{_N}}\notin\cup_{i=1}^N Q_i$. Ora, per ipotesi, abbiamo che $\forall\ M>0\ \exists\ x_{_M}\ t.c.|x|>x_{_M}\Rightarrow|f(x)|>M$. Ne segue che l'ordinata di ogni punto la cui ascissa è contenuta in $C_k\cap\{x\in\mathbf{R}:\ |x|>x_{_M}\}$ è maggiore di M. Se quindi $k+1>x_{_M}$ e $C_k\neq\emptyset$, ne segue che $x\in C_k\Rightarrow|f(x)|>M$ ossia $y=f(x)\in Q_k\Rightarrow|y|>M$ se $C_k\neq\emptyset$.
Sia ora N un intero tale che $N>|p|+r_o+1$. Per ipotesi deve esistere un elemento $y_{_N}\in\{y_k\}$ tale che $y_{_N}\notin\cup_{k=1}^N Q_k$; ciò vorrebbe dire che $|y_{_N}|>|p|+r_o$ ossia $y_{_N}\notin B(p;r_o)$ che è assurdo per ipotesi di convergenza di y_k a p. La conclusione è che la successione è interamente contenuta all'interno di un numerto finito di elementi Q_k.
L'estensione della dimostrazione al caso di una funzione $f\colon\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ si ricava immediatamente dal fatto che nella precedente dimostrazione non si è fatto uso della proprietà di ordine dei numeri reali. In tutte le occasioni è stato il modulo di un numero ad essere interessato; modulo che può essere definito tranquillamente anche per vettori a più componenti.

3.5 È evidente che $\{x\in Dom(f):\ \sin x=0\}=\{x\in\mathbf{R}\mid x=\pi k\quad k\in\mathbf{N}\}$ e non essendo un insieme limitato non può essere compatto.

4.5*** Data f consideriamo l'insieme dei suoi punti di continuità (detto G) ossia
$G=\cap_{k=1}^\infty\cup_{x\in Dom(f)}\overset{o}{B}_x(\frac1k)$ dove $B_x(\frac1k)=\{y\in Dom(f)\colon\ |f(x)-f(y)|<\frac1k\}$.
Chiaramente $G^c=\cup_{k=1}^\infty\cap_{x\in Dom(f)}(\overset{o}{B}_x(\frac1k))^c=\cup_{k=1}^\infty\cap_{x\in Dom(f)}(B_x(\frac1k))^c\cup\partial B_x(\frac1k)$ è l'insieme dei punti di discontinuità e non è detto sia un insieme chiuso. Bisogna far vedere che G è l'insieme dei punti di continuità ossia che se $z\in G$ allora f è continua in z e che al contempo se f è continua in z allora $z\in G$. Cominciamo dalla seconda. Sia f continua in z. Per definizione di continuità la controimmagine dell'aperto $(f(z)-\varepsilon,f(z)+\varepsilon)$ è un insieme aperto, diciamo $U_\varepsilon(z)$, che contiene z. Chiaramente $U_\varepsilon(z)\subset\overset{o}{B}_z(\frac1k)=B_z(\frac1k)$ essendo f continua con $\varepsilon<\frac1k$. Essendo $U_\varepsilon(z)$ aperto e z un punto interno si può prendere una sfera $S(z,\delta_{\overline{\varepsilon}})$ di centro z e raggio $\delta_{\overline{\varepsilon}}$

tutta contenuta in U_ε. L'insieme $\cap_{\overline{\varepsilon}>0}S(z,\delta_{\overline{\varepsilon}})=z$ ma al contempo $\cap_{\overline{\varepsilon}>0}S(z,\delta_{\overline{\varepsilon}})\subset\cap_{k=1}^{\infty}\overset{o}{B}_z(\frac{1}{k})$ e dunque $z\in G$.

Supponiamo viceversa che $z\in G$ e quindi per ogni $k>0$ esiste almeno un $\bar{x}$ tale che $z\in\overset{o}{B}_{\bar{x}}(\frac{1}{k})$. Ciò implica che $|f(z)-f(x)|<\frac{1}{k}$ per ogni $x\in\overset{o}{B}_{\bar{x}}(\frac{1}{k})$ e quindi all'insieme aperto $(f(z)-\frac{1}{k},f(z)+\frac{1}{k})$ corrisponde l'insieme aperto $\overset{o}{B}_{\bar{x}}(\frac{1}{k})$ tale che se $x\in\overset{o}{B}_{\bar{x}}(\frac{1}{k})$ allora $|f(z)-f(x)|<\frac{1}{k}$ che è esattamente la continuità di f in z. Si noti come nella formula $G=\cap_{k=1}^{\infty}\cup_{x\in Dom(f)}\overset{o}{B}_x(\frac{1}{k})$ vi sia l'interno di $B_x(\frac{1}{k})$. Qualora si scriva solamente $B_x(\frac{1}{k})$ si incorre in errore come mostra l'esempio della *funzione di Dirichlet* $f(x)=1$ se $x\in\mathbf{Q}$ e $f(x)=0$ se $x\in\mathbf{Q}^c$. Infatti se $x\in\mathbf{Q}$ $B_x(\frac{1}{k})=\mathbf{Q}$ per ogni k; se $x\in\mathbf{Q}^c$ $B_x(\frac{1}{k})=\mathbf{Q}^c$ per ogni k e quindi $\cup_{x\in\mathbf{R}}B_x(\frac{1}{k})=\mathbf{R}$ per ogni k da cui segue che $G=\mathbf{R}$ per la funzione di Dirichlet. Ma ciò costituisce palesemente un assurdo in quanto l'insieme dei punti di continuità di tale funzione è l'insieme vuoto. Rifacendo il conto usando $\overset{o}{B}$ viene fuori il risultato giusto.

$Disc(f)$ si può descrivere anche in un altro modo.
Sia $E_{kn}=\{p\in Dom(f)\colon\ \exists\ y\in(p-\frac{1}{n},p+\frac{1}{n})\wedge\ |f(p)-f(y)|\geq\frac{1}{k}\}$. Ebbene $Disc(f)=\cup_{k=1}^{\infty}\cap_{n=1}^{\infty}E_{kn}=\cup_{k=1}^{\infty}\big(\cup_{j=k}^{\infty}\cap_{n=1}^{\infty}E_{jn}\big)$. Vogliamo ora far vedere che tale insieme è un F_σ e quindi dobbiamo far vedere che $\cup_{j=k}^{\infty}\cap_{n=1}^{\infty}E_{jn}$ è chiuso per ogni k. Consideriamo quindi una successione $\{p_r\}\subset\cup_{j=k_o}^{\infty}\cap_{n=1}^{\infty}E_{jn}$ che converge ad un punto p. Dobbiamo far vedere che anche $p\in\cup_{j=k_o}^{\infty}\cap_{n=1}^{\infty}E_{jn}$. Supponiamo che $p\notin\cup_{j=k_o}^{\infty}\cap_{n=1}^{\infty}E_{jn}$ e quindi $p\in\cap_{j=k_o}^{\infty}\cup_{n=1}^{\infty}E_{jn}^c$. Dunque $\forall\ j\geq k_o\ \exists\ n_o(j)\colon\ p\in E^c_{jn_o(j)}$ e quindi $x\in(p-\frac{1}{n_o(j)},p+\frac{1}{n_o(j)})\ \Rightarrow\ |f(x)-f(p)|<\frac{1}{j}$. Poiché $p_r\to p$, per ogni n esiste $r(n)$ ed un intero m tale che $(p_{r(n)}-\frac{1}{m},p_{r(n)}+\frac{1}{m})\subset(p-\frac{1}{n},p+\frac{1}{n})$. Ora dato j abbiamo $n_o(j)$ secondo la corrispondenza di prima; poi scegliamo $r(n_o)$ e m tale che $(p_{r(n_o)}-\frac{1}{m},p_{r(n_o)}+\frac{1}{m})\subset(p-\frac{1}{n_o},p+\frac{1}{n_o})$ e quindi $|f(p)-f(p_{r(n_o)})|<\frac{1}{j}$ e $|f(p)-f(x)|<\frac{1}{j}$ per ogni $x\in(p_{r(n_o)}-\frac{1}{m},p_{r(n_o)}+\frac{1}{m})$. Ora, per definizione di $p_{r(n_o)}$, nell'intervallo $(p_{r(n_o)}-\frac{1}{m},p_{r(n_o)}+\frac{1}{m})$ vi è almeno un punto, diciamo y, per cui $|f(y)-f(p_{r(n_o)})|\geq\frac{1}{k_o}$ con un certo k_o (senza pensare di dover ripetere il ragionamento per ogni $k_o\geq1$). Questo chiaramente è impossibile non appena $\frac{j}{2}>k_o$ il che è sempre possibile in quanto i valori di j sono illimitati superiormente. Infatti $|f(y)-f(p_{r(n_o)})|=|(f(y)-f(p))+(f(p)-f(p_{r(n_o)})|\leq|(f(y)-f(p))|+|(f(p)-f(p_{r(n_o)})|\leq\frac{2}{j}$. Dal ragionamento appare evidente come essenziale sia prendere j illimitato ed infatti se si provasse a ripetere il ragionamento lavorando su $\cap_{n=1}^{\infty}E_{kn}$ e quindi dimostrare che E_{kn} è chiuso, ad un certo punto non si riuscirebbe ad andare avanti. In altre parole non è detto che $\cap_{n=1}^{\infty}E_{kn}$ sia chiuso. Viceversa $\cup_{j=k}^{\infty}\cap_{n=1}^{\infty}E_{jn}$ è chiuso come abbiamo dimostrato.

Un terzo modo di descrivere i punti di continuità consiste nel ricorrere alla *oscillazione della funzione f in un punto x*, concetto questo descritto per esteso nel capitolo sugli integrali di una variabile. Dunque definiamo $\omega[f;c]\overset{\text{def}}{=}\inf_{[\alpha,\beta]:\alpha<c<\beta}\omega[f;\alpha,\beta]\overset{\text{def}}{=}\inf_{[\alpha,\beta]:\alpha<c<\beta}|\sup_{[\alpha,\beta]}f(x)-\inf_{[\alpha,\beta]}f(x)|$. Se $[\alpha',\beta']\subset[\alpha,\beta]$ allora $\omega[f;\alpha',\beta']\leq\omega[f;\alpha,\beta]$ ossia $\omega[f;a,b]$ è non crescente (e positiva) quando ci si restringe con l'intervallo. La funzione è continua se e solo se $\omega[f;c]=0$ (lo si dimostri). Inoltre $\{x\in Dom(f)\colon\ \omega[f;x]<a\}\overset{\text{def}}{=}D_a$ è aperto (basta applicare la definizione di estremo inferiore ed essere conseguenti). Ora $Cont(f)=\cap_{k=1}^{\infty}D_{\frac{1}{k}}$ e quindi $Disc(f)=\cup_{k=1}^{\infty}D^c_{\frac{1}{k}}=\cup_{k=1}^{\infty}\{x\in Dom(f)\colon\ \omega[f;x]\geq\frac{1}{k}\}$ da cui il fatto che $Disc(f)$ è un F_σ.

Dimostriamo ora che $\{x\in Dom(f)\colon\ \omega[f;x]<a\}\overset{\text{def}}{=}D_a$ è aperto. Per definizione di insieme aperto tutti i suoi punti sono interni. Sia $x'\in D_a$; dobbiamo far vedere che esiste un intorno U di x' tale che $U\subset D_a$. Dalla definizione di oscillazione e dalla definizione di estremo inferiore segue che esiste un intervallo contenente x', detto $[\alpha,\beta]\neq\emptyset$, tale che, per definizione di estremo inferiore, si ha $\omega[f;x]\leq\omega[f;\alpha,\beta]<a$. Certamente se $[\alpha',\beta']\subset[\alpha,\beta]$ allora $\omega[f;\alpha',\beta']<a$ e

quindi per ogni punto $\xi \in (\alpha, \beta)$ si ha $\omega[f;\xi] < a$ ossia il risultato. Che una funzione è continua in c se e solo se $\omega[f;c] = 0$ segue pure dalla definizione di oscillazione e dalla definizione di estremo inferiore.

Sempre dalla definizione di oscillazione di una funzione in un punto segue che un ulteriore modo di intendere un punto di discontinuità (diciamo c) è quello di dire che l'immagine di intorni di c il cui diametro tende a zero non tende a zero ma si mantiene maggiore di un certo numero reale r.

Passiamo ora agli esercizi sulle funzioni da trovare. Nel primo caso si devono esaminare diverse eventualità . La prima è che $x \in C^c = \overset{\circ}{C^c}$ ossia è aperto. Ne segue che esiste una sfera aperta di raggio r e centro in x $(S_r(x))$ tutta contenuta in C^c. Ma allora la funzione è continua poiché $f(x) \equiv$ per $x \in S_r(x)$. La seconda eventualità è che $x \in \partial C = \partial(C^c)$. Ne segue che esiste una successione $\{x_n\}$ di punti *tutti appartenenti a* C^c tale che $x_n \to x$. Ora $f(x_n) \equiv 0$ ma $f(x) = 1$ e per il teorema ponte la funzione non è continua. La terza eventualità è che $x \in \overset{\circ}{C}$ ammesso che sia non vuoto. Ora $\overset{\circ}{C} = (\overset{\circ}{C} \cap \mathbf{Q}) \cup (\overset{\circ}{C} \cap \mathbf{Q}^c)$ e quindi ne segue la non continuità .

Secondo esercizio; $\quad F = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$

Si devono considerare diverse eventualità . Cominciamo con $x \in F_1 = \overset{\circ}{F_1} \cup \partial F_1$.
Se $x \in \overset{\circ}{F_1} \overset{\text{def}}{=} \overset{\circ}{A_1}$ allora qualsiasi aperto U contenente x interseca sia $\mathbf{Q}$ sia $\mathbf{Q}^c$ per cui non può essere continua per il teorema ponte. Se $x \in \partial F_1$ allora $f(x) = \frac{1}{2}$ ed inoltre esiste una successione $\{x_n\} \subset A_1^c$ che converge a x. $A_1^c = (\cup_{k=2}^{\infty} A_k) \cup F^c$. Ne segue che $f(x_n)$ può valere 0 se $x \in F^c$ oppure 2^{-k} con $k \neq 1$ se $x \in A_k$ $k \geq 2$ e quindi non può accadere che $f(x_n) \to \frac{1}{2}$. Lo stesso identico discorso può farsi per $x \in A_k$. L'ultimo caso da studiare è quello in cui $x \in F^c \subset \overset{\circ}{F^c} \cup \partial F^c$. Se $x \in \overset{\circ}{F^c}$ allora $f(x) \equiv 0$ in un intorno di x e quindi è continua in x. Se $x \in \partial F^c$ allora $x \in \partial(\cup_{k=1}^{\infty} A_k)$ e possono accadere due cose. La prima è che $x \in \cup_{k=1}^{\infty} A_k = F$. In tal caso la funzione è discontinua per quanto detto prima. Il secondo caso è che $x \in F^c$ (sempre $x \in \partial F^c$). In tal caso x può essere punto di accumulazione tanto per F che per il suo complementare oppure può essere punto di accumulazione per F e punto isolato per F^c. Facciamo vedere che in ambedue i casi si ha $f(x_o) = 0$.
Cominciamo da F. Essendo $x \in F'$ esiste una successione $\{x_n\} \subset F$ per cui $\lim_{n \to +\infty} y_n = x$. *Non può accadere che* $x \in \partial(\cup_{k=1}^{n} A_k)$ *per qualsiasi* n in quanto vorrebbe dire che $x \in \overline{\cup_{k=1}^{n} A_k} = \overline{F}_n = F_n$ e quindi si cadrebbe in contraddizione con il fatto che $x \in F^c$. Dunque $x \in (\cup_{k=1}^{n} A_k)^c = \overset{\circ}{(\cup_{k=1}^{n} A_k)^c}$ e questo vuol dire che $\forall\ k\ \exists\ U_k = \overset{\circ}{U_k} \subset (\cup_{k=1}^{n} A_k)\ \wedge\ n_k : n > n_k\ \Rightarrow\ x_n \in U_k$. Ne segue che $f(x_n) < 2^{-k-1}$ per $n > n_k$ e per ogni k e quindi $f(x_n) \to 0$ per $n \to +\infty$
Se $x \in (F^c)'$ allora esiste una successione $\{x_n\} \subset F^c$ tale che $\lim_{n \to +\infty} x_n = x$. Essendo $f(x) \equiv 0$ se $x \in F^c$ segue che $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = 0$.
Se x è punto isolato di F^c si ricade nel caso di prima.

Perché non si può definire la funzione $f(x) = \begin{cases} 2^{-k} & x \in \overset{\circ}{F_k} \cap \mathbf{Q}\ \vee\ x \in \partial F_k \\ 0 & x \in \overset{\circ}{F_k} \cap \mathbf{Q}^c\ \vee\ x \in \mathbf{R} \backslash F \end{cases}$

Risposta: Perché se $F_i \cap F_j \neq \emptyset$ quella data non è neppure una funzione

• Dimostriamo che $Disc(f) = \bigcup_{A \subset E} \overline{A} \backslash f^{-1}(\overline{f(A)})$. Dato $A \subset E$, $\overline{A} \backslash f^{-1}(\overline{f(A)})$ è l'insieme dei punti del dominio di f che stanno in $\overline{A}$ ma non stanno nell'insieme di quei punti la cui immagine sta in $\overline{f(A)}$ che è come dire $f(\overline{A}) \supset \overline{f(A)}$. Ciò implica che vi è almeno un punto $p \in \partial A$ (non $p \in \overset{\circ}{A}$) tale che $f(p) \notin \overline{f(A)}$ che è però un insieme chiuso e quindi $f(p)$ è esterno a $f(A)$. Se $p \in A'$ ciò vuol dire che le ordinate di $f(A)$ non riescono ad avvicinarsi tanto quanto vorremmo al valore $f(p)$ e siccome $p \in A'$, questo vuol dire che in p la funzione non è continua. La possibilità che $p \in \partial A \backslash A'$ non esiste in quanto per avere $f(\overline{A}) \supset \overline{f(A)}$ vuol dire che $\overline{A}$ aggiunge punti rispetto ad A e questo è impossibile se p fosse un punto isolato. Infatti se una funzione è definita in un punto isolato è per definizione ivi continua.

5.5 - primo del gruppo - Essendo $f_1(x) = f_1(-x)$ ci si può limitare a considerare solo il punto dell'asse reale $x = c$ che supponiamo di ascissa positiva. Per la continuità bisogna imporre che il limite da destra sia uguale al limite da sinistra e che sia uguale al valore della funzione in c. Essendo $a + bx^2$ una funzione continua, $\lim_{x\to c^-} a + bx^2 = a + bc^2$. Da destra si ha $\lim_{h\to 0^+}(f(c+h) - f(c)) = \lim_{h\to 0^+}(\frac{1}{c+h} - a + bc^2) = 0$ solo se $\frac{1}{c} = a + bc^2$. Per la derivata si ha $f'_-(c) = 2bc$ mentre $f'_+(c) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}(\frac{1}{c+h} - a - bc^2)$. Usando la continuità l'ultima uguaglianza diventa $f'_+(c) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}(\frac{1}{c+h} - \frac{1}{c}) = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{c(c+h)} = -\frac{1}{c^2}$ e quindi la derivabilità della funzione in c impone $-\frac{1}{c^2} = 2bc$. Le due equazioni per a e b danno come soluzione $a = \frac{3}{2}c$ e $b = \frac{1}{2|c|^3}$. Tenendo conto che c può essere sia positivo che negativo si ottiene la soluzione scritta.

5.5 - secondo del gruppo - La verifica che 0 è l'unico punto di continuità è immediata in conseguenza della densità tanto dei razionali quanto degli irrazionali nei reali. Sia infatti $p \in \mathbf{Q}$ per cui $f(p) = p$. Consideriamo una successione di razionali che tende a p. Ad esempio si può prendere $a_k = p + \frac{1}{k}$; si ha chiaramente $f(a_k) = p + \frac{1}{k} \to p$ per $k \to +\infty$. Al contempo si può prendere la succesione di irrazionali $b_k = p + \frac{\sqrt{2}}{k}$ e $f(b_k) = -p - \frac{\sqrt{2}}{k} \to -p$ per $k \to +\infty$ e quindi per il teorema ponte la funzione non può essere continua a meno che $p = -p$ ossia $p = 0$. Si può anche verificare che la funzione or ora scritta è iniettiva *e quindi è invertibile* ma *non è monotona in nessun intervallo di nessun punto.* Tale esempio costituisce un valido controesempio che dimostra la falsità della affermazione: *se una funzione è invertibile è monotona.* È inoltre chiaro che per $x \neq 0$ non può essere derivabile non essendo continua. Per la derivabilità in $x = 0$, essendo un normale limite, usiamo il teorema ponte e consideriamo due successioni $\{x_k\}$ e $\{x'_k\}$ dove $x_k \in \mathbf{Q}$ mentre $x'_k \in \mathbf{Q}^c$. Il rapporto incrementale nei due casi è dato rispettivamente da $+1$ e -1 per cui il limite non può esistere.

6.5 Cominciamo con la discontinuità sui razionali. Sia $x = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$ e sia $a_k = x + \frac{\sqrt{2}}{k}$ una successione che converge a x; $f(a_k) = 0$ $\forall k$ e quindi non può convergere a $f(x) = \frac{1}{q} \neq 0$. Viceversa sia $x \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ e consideriamo una qualsiasi successione di numeri $\{a_k\}$, sia razionali che non, che converge ad x. Per quei valori di k tale che $a_k = \frac{p_k}{q_k}$ si ha $q_k \to \infty$ per $k \to \infty$ e quindi $f(a_k) \to 0$ per $k \to \infty$.

Per quanto riguarda la derivabilità bisogna studiare $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ con $x \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ e quindi si ottiene $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)}{h}$. Consideriamo ora una qualsiasi successione $\{h_n\}$ tale che $h_n \to 0$. Se $h_n \in \mathbf{Q}$ allora $x + h_n \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ e quindi $f(x + h_n) = 0$. Se $h_n \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ allora possono accadere due cose. La prima è che $x + h_n \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ e quindi $f(x + h_n) = 0$. La seconda è che $x + h_n \in \mathbf{Q}$ e quindi $h_n = -x + \frac{p_n}{q_n}$. In tal caso abbiamo $\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} = \frac{1}{q_n(\frac{p_n}{q_n}-x)}$. Le considerazioni svolte nel risolvere l'esercizio **1.5***** ci consentono di dire che la successione $\{\frac{p_n}{q_n}\}$ può essere scelta in modo che $|x - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{kq_n}$ con un qualsiasi intero positivo k. Da ciò segue che $|\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}| = |\frac{1}{q_n(\frac{p_n}{q_n}-x)}| > k$ e quindi non può esistere il limite per la successione $\{\frac{p_n}{q_n}\}$ scelta conformemente a quanto scritto nella soluzione dell'esercizio citato. Per il teorema ponte la funzione non è derivabile.

7.5* - f_1 f_2 - Le prime due sono funzioni periodiche e quindi uniformemente continue. Per dimostrare tale fatto suddividiamo la retta reale in sottoinsiemi di lunghezza $[-T, T]$ dove $2T$ è il periodo della funzione ossia $\mathbf{R} = \cup_{k=-\infty}^{+\infty}[T(-1+2k), T(1+2k)] \doteq \cup_{k=-\infty}^{+\infty} I_k$ consideriamo la

funzione $\tilde{f}\colon [-T,T] \to \mathbf{R}$ dove $\tilde{f}(x) = f(x)$ per $x \in [-T,T]$. Essa è continua su un compatto e dunque $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon$ *t.c.* $|x-y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y)| < \varepsilon$. Naturalmente potevamo suddividere $\mathbf{R}$ in altri modi ossia $\mathbf{R} = \cup_{k=-\infty}^{+\infty}[T(-1+2k)+z, T(1+2k)+z]$ dove $z \in [-T,T]$ e per periodicità il δ_ε che compare nella definizione precedente *non dipende da z* ossia dall'intervallo prescelto.
Consideriamo ora due punti qualsiasi x' e y' della funzione originaria f tale che $|x'-y'| < \delta_\varepsilon$. Possono accadere due differenti situazioni. La prima è che $x' \in I_k$ e $y' \in I_k$ ed indichiamo con $x'_k \in [-T,T]$ $y'_k \in [-T,T]$ i due punti che si ottengono da x' e y' traslandoli di una lunghezza multiplo intero negativo o positivo di $2T$ fino a portarli dentro l'intervallo $[-T,T]$. Per periodicità si ha $|f(x') - f(y')| = |\tilde{f}(x'_k) - \tilde{f}(y'_k)|$ e quindi essendo quest'ultima quantità minore di ε si ha che anche la precedente verifica la stessa maggiorazione.
La seconda possibilità è che pur essendo $|x'-y'| < \delta_\varepsilon \le 2T$ si ha $x' \in I_k$ e $y' \in I_{k'}$ con $k \neq k'$. In tal caso i due punti vanno traslati di due multipli differenti per una unità (positiva o negativa) in modo da "portarli" entrambe dentro l'intervallo $[-T,T]$.
La conclusione dei due precedenti casi è che f è uniformemente continua su tutto $\mathbf{R}$.
Come si è visto, la precedente dimostrazione non fa uso della forma esplicita delle funzioni f_1 e f_2 ma solo del fatto che sono periodiche. Quindi tale dimostrazione vale per qualsiasi funzione periodica. Del resto essendo $|\sin x - \sin x'| \le |x-x'|$ l'uso della forma esplicita delle funzioni consentirebbe una dimostrazione molto più rapida e darebbe anche una stima di δ_ε.

7.5* - f_3 - $Dom(f_3) = \mathbf{R}$; f_3 non è periodica e la dimostrazione precedente non vale. Non si può applicare il teorema di Heine-Cantor non essendo $\mathbf{R}$ un insieme compatto. Bisogna maggiorare $|f_3(x) - f_3(x')| \le |x-x'| + |\sin x - \sin x'| \le |x-x'| + |x-x'| = 2|x-x'|$. Dunque quando si applica la definizione $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon$ *t.c.* $|x-x'| \le \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x')| \le \varepsilon$ si può prendere $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$. Alternativamente si può notare come $\sup_{x\in\mathbf{R}}|f'| \le 2$ da cui, per il teorema di Lagrange, $|f(x) - f(y)| \le 2|x-y|$. Naturalmente non è detto che se la derivata non è limitata la funzione non è uniformemente continua. Si prenda ad esempio la funzione $f(x) = \begin{cases} x^{-1}\sin x^3 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ Avendo un asintoto orizzontale a $-\infty$ e $+\infty$ è uniformemente continua pur avendo $\sup_{x\in\mathbf{R}}|f'| = +\infty$

7.5* - f_4 - $Dom f_4 = \mathbf{R}$ e non è periodica; $\sup_{x\in\mathbf{R}}|f'| = +\infty$. Dimostriamo che non è uniformemente continua. Dobbiamo far vedere che $\exists\ \varepsilon > 0$ *t.c.* $\forall\ \delta > 0\ \exists\ (x_\delta, y_\delta)$ *t.c.* $|x_\delta - y_\delta| < \delta\ \wedge\ |f_5(x_\delta) - f_5(y_\delta)| \ge \varepsilon$.

Dimostriamo precisamente che esiste una successione $\{x_k\}$ di punti tali che $x_k \sin x_k \equiv 1\ \wedge\ \lim_{k\to+\infty} x_k - 2k\pi = 0$. Ne segue immediatamente che per le due successioni $\{y_k\} = \{2\pi k\}$ e $\{x_k\}$ si verifica $\lim_{k\to+\infty}|x_k - y_k| = 0$ mentre $f(x_k) - f(y_k) \equiv 1$ da cui la non uniforme continuità prendendo $\varepsilon \le 1$ (si noti davanti a ε nella definizione vi è $\exists$ e non $\forall$)

Sia $I_k = [2\pi(k-1), 2\pi k] = [a_k, b_k]$; $f_4(2\pi(k-1) + \frac{\pi}{2}) = 2\pi(k-1) + \frac{\pi}{2} > 1$, $f_4(2\pi(k-1) + \frac{3}{2}\pi) = -(2\pi(k-1) + \frac{3}{2}\pi) < -1$ e quindi essendo f_4 continua esiste un $x_k \in [a_k, b_k]$ (sconosciuto) tale che $f_4(x_k) = 1$. Dobbiamo ora mostrare che $x_k - a_k \to 0$ oppure $x_k - b_k \to 0$. Sia $z_k \doteq x_k - 2\pi(k-1)$. $z_k \in [0, 2\pi]$, $f_4(x_k) = f_4(z_k + 2\pi(k-1)) = (z_k + 2\pi(k-1))\sin z_k = 1$. Ne segue che per $k \to +\infty$ si ha $\sin z_k \to 0$ oppure $\sin z_k \to 2\pi$ che è esattamente come dire che $x_k - a_k \to 0$ oppure $x_k - b_k \to 0$.
Notare che la f_4 verifica la relazione $|f_5| \le |x|$ ossia la conclusione del `Teorema 5.16 pag.208` ma non è uniformemente continua.

7.5* - f_5 - $Dom(f_5) = \mathbf{R}$ Prendendo esattamente le due succesioni precedenti e $\varepsilon \le \sin 1$ si ha la non uniforme continuità.

7.5* - f_6 - $Dom(f_6) = \mathbf{R}\backslash\{0\}$. In 0 la funzione non è continua e non vi è modo di estenderla in modo continuo in quanto 0 trattasi di discontinuità ineliminabile. Consideriamo ordunque l'intervallo $[a,+\infty)$ con $a>0$. Dal teorema di Lagrange si ha che per ogni x e y nell'intervallo indicato $|f_6(x)-f_6(y)|\le\sup_{z\in[a,+\infty)}|f_6'(z)||x-y|$. $f_6'(z)=\cos(\ln|z|+\sin\frac{1}{z})(\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}\cos\frac{1}{z})$ il cui modulo è maggiorabile con $\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}$. Dalle precedenti maggiorazioni segue che la funzione è uniformemente continua in $[a,+\infty)$ in quanto dato ε si può prendere $\delta_\varepsilon=\frac{a^2\varepsilon}{1+a}$ ed ottenere $|f_6(x)-f_6(y)|<\varepsilon$. Un discorso del tutto analogo può farsi per un intervallo del tipo $(-\infty,a]$ con $a<0$ e si capisce pure perché non funziona per un l'intervallo $(0,+\infty)$ (*si noti che in* $(0,+\infty)$ *la funzione è continua).* La risposta all'esercizio è dunque da un certo punto di vista non univoca: ogni intervallo del tipo $(-\infty,a]\cup[b,+\infty)$ con $a<0$ e $b>0$ è di uniforme continuità.

7.5* - f_7 - $Dom(f_7)=\mathbf{R}\Rightarrow$ NoHeine − Cantor; la funzione è continua su tutto il dominio. Non è periodica. Poiché $\lim_{x\to+\infty}x\sin\frac{1}{x}=1$ la funzione ha un asintoto orizzontale e quindi è uniformemente continua su tutto $\mathbf{R}$.
Alternativamente, pur essendo $\sup_{x\in\mathbf{R}}|f'|=+\infty$, si può usare il teorema di Lagrange per dimostrare la uniforme continuità su tutto $\mathbf{R}$ (perché?)

7.5* - f_8 - $Dom(f_8)=\mathbf{R}\backslash\{\pm1\}$. In ±1 la funzione non ammette limite e dunque non è continua senza possibilità di estenderla in modo continuo. Negli altri punti la funzione è continua. Per il Teorema di Heine-Cantor f_7 è uniformemente continua in ogni intervallo del tipo $[a,b]$ con a>-1 e $b<1$. In ciascuno degli intervalli che rimangono $(-\infty,a]$ e $[b,+\infty)$ con $a<-1$ e $b>1$ si applica il ragionamento precedente potendo ivi stimare uniformemente la derivata (la stima superire in $[b,+\infty)$ è data da $1+\frac{1}{\ln b}+\frac{1}{\ln^2 b}$)

7.5* - f_9 - $Dom(f_9)=\mathbf{R}$. La stima uniforme della derivata usata nei due precedenti esercizi non vale più (ciò non vuol dire automaticamente che la funzione non è uniformemente continua come l'esercizio **16.5**** mostra). In questo caso però la funzione è effettivamente non uniformemente continua su qualsiasi intervallo della forma $[a,+\infty)$. Si dimostra che esiste una successione $\{x_k\}$ ed una successione $\{y_k\}$ tale che $\lim_{k\to+\infty}x_k=+\infty$, $\lim_{k\to+\infty}y_k=+\infty$, $\lim_{k\to+\infty}|x_k-y_k|=0$ ed inoltre $x_k\ln x_k=2\pi k+\frac{\pi}{2}$ $y_k\ln y_k=2\pi k$ da cui la mancanza di uniforme continuità su qualsiasi intervallo infinito. La equazione $x\ln x=2\pi k$ ha soluzione per ogni $k>0$ essendo $x\ln x$ una funzione continua e crescente in $[1,+\infty)$ (e quindi verifica la proprietà dei valori intermedi ossia il `corollario 5.2 pag.194`). Stessa cosa accade per la equazione $x\ln x=2\pi k+\frac{\pi}{2}$. Facciamo vedere ora che $\lim_{k\to+\infty}|x_k-y_k|=0$. Infatti $x_k\ln x_k-y_k\ln y_k=(x_k-y_k)\ln x_k+y_k(\ln x_k-\ln y_k)$ ed i due addendi sono entrambe positivi. Ciò vuol dire che, essendo $\lim_{k\to+\infty}\ln x_k=+\infty$ e $\lim_{k\to+\infty}y_k=+\infty$, deve per forza aversi $\lim_{k\to+\infty}(x_k-y_k)=0$. È opportuno notare che l'esercizio si risolve senza sapere chi sono x_k e y_k ma solo attraverso alcune loro proprietà particolari.

7.5* - f_{10} - $Dom(f_{10})=\mathbf{R}$. Essendo $\sup_{x\in\mathbf{R}}|f_{10}'|\le3$ la funzione è uniformemente continua. Se f è uniformemente continua e pure g lo è allora $f+g$ lo è. Sia infatti $\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta_\varepsilon$ *t.c.* $|x-x'|<\delta_\varepsilon\Rightarrow|f(x)-f(x')|<\varepsilon$ e $\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta_\varepsilon'$ *t.c.* $|x-x'|<\delta_\varepsilon\Rightarrow|g(x)-g(x')|<\varepsilon$. È evidente che per $|x-x'|<\min\{\delta_\varepsilon,\delta_\varepsilon'\}$ si ha $|(f+g)(x)-(f+g)(x')|<2\varepsilon$ e quindi è uniformemente continua in virtù della disuguaglianza $|a+b|<|a|+|b|$

Se f è uniformemente continua e g pure non è detto che fg lo sia. Si prenda $f(x)=x$ e $g(x)=\sin x$.

Se f è uniformemente continua e $\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$ la somma è uniformemente continua. Infatti g è uniformemente continua avendo un asintoto orizzontale e quindi si ha la somma di due funzioni uniformemente continue.

In tutti gli esempi considerati si possono trovare dei numeri a e b tali che ciascuna funzione verifica la relazione $|f(x)| \le a|x| + b$. Questo dimostra che il `Teorema 5.16` dà realmente una condizione necessaria ma non sufficiente per la uniforme continuità su di un intervallo illimitato.

9.5 La funzione è definita per ogni x reale. La sua derivata è data da $f'(x) = 6|x| + 1 - \gamma + \gamma\sqrt{x^2+4} = f'(-x)$. Consideriamo solo le x positive o nulle. La derivata seconda è $f''(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}(6\sqrt{x^2+4} + \gamma x)$. Bisogna considerare vari casi di relativi al valore di γ.
Sia $\gamma \ge 0$. $f''(x) > 0$ $\forall x$ e $f'(0) = 1 + \gamma > 0$ ossia la funzione derivata prima è sempre positiva per ogni $x \ge 0$ e quindi per ogni x essendo f' pari. Ne segue che f è crescente per ogni x quindi monotona quindi invertibile.
Sia $\gamma < 0$. La soluzione di $f'' > 0$ prevede due sottocasi. Il primo è $36 - \gamma^2 \ge 0$ ossia $-6 \le \gamma \le 6$ e solo $-6 \le \gamma < 0 = -6 \le \gamma < -1 \vee -1 \le \gamma < 0$. Se $\gamma \in [-1, 0)$ allora $f'(0) \ge 0$ e $f'' > 0$ per ogni x e dunque f è crescente dunque invertibile. Se invece $\gamma \in [-6, -1)$ allora $f'' > 0$ ma $f'(0) = 1 + \gamma < 0$ e quindi la derivata prima passa da valori negativi a positivi che implica l'esistenza di un minimo nella f e quindi automaticamente la non invertibilità mancando la iniettività.
$\gamma < 0$ e $36 - \gamma^2 < 0$ ossia $\gamma \le -6$. La disequazione $f'' \ge 0$ (con $x > 0$) è verificata per $0 \le x \le \frac{12}{\sqrt{\gamma^2 - 36}} = x_+(\gamma)$ e quindi $f'' \ge 0$ per $0 \le x \le x_+(\gamma)$ e negativa per $x > x_+(\gamma)$ e quindi f' cresce per $0 \le x \le x_+(\gamma)$ e decresce per $x > x_+(\gamma)$. Essendo $f'(0) = 1 + \gamma \le -5$ è importante sapere quanto vale $f'(x_+(\gamma))$ e cercare quei valori di γ per cui $f'(x_+(\gamma)) \le 0$. Si verifica che ciò è vero per $\gamma \le \gamma_- = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{109} < -6$. Per $\gamma_- < \gamma \le -6$ $f'(x_*(\gamma))$ è positiva e quindi f' assume valori sia positivi che negativi che rende impossile l'invertibilità di f.

10.5 - Primo del gruppo - $Dom(f) = (-1, +\infty)$. $f'(x) = (x+1)^{3/2} - 1 - \frac{3}{2}x \ge 0$ è la disequazione che studiamo ossia $(x+1)^{3/2} \ge 1 + \frac{3}{2}x$. Se $1 + \frac{3}{2}x < 0$ ossia $x < -\frac{2}{3}$ allora la disequzione è verificata. Se $x \ge -\frac{2}{3}$ eleviamo al quadrato ottenendo $x^3 + 1 + 3x^2 + 3x \ge 1 + \frac{9}{4}x^2 + 3x$ ossia $x^3 + \frac{3}{4}x^2 \ge 0$ ossia $x \ge -\frac{3}{4}$ ed essendo $-\frac{3}{4} < -\frac{2}{3}$ se ne deduce che la disequazione è verificata per ogni x. Quindi la derivata prima è positiva ed è nulla solo per $x = 0$ e ne consegue che la funzione è invertibile su tutto il dominio.
Che la derivata prima ha le caratteristiche suindicate lo si evince anche dallo studio della derivata seconda. Infatti $f''(x) = \frac{3}{2}(x+1)^{1/2} - \frac{3}{2} \ge 0$ per $x \ge 0$ da cui f' decrescente per $-1 \le x < 0$ e f' crescente per $x \ge 0$. In $x = 0$ vi è un minimo la cui ordinata è 0 e quindi la derivata prima verifica le caratteristiche evidenziate prima con metodi puramente algebrici.

10.5 - f_2 - $Dom(f_2) = (0, +\infty)$, $f_2(x) = \frac{(x^2+1)\log x}{2x}$, $\lim_{x\to 0} f_2(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} = +\infty$, $f_2'(x) = \frac{1}{2}((1 - \frac{1}{x^2})\ln x + (x + \frac{1}{x})\frac{1}{x})$, $\lim_{x\to 0} f_2'(x) = \lim_{x\to+\infty} f_2'(x) = +\infty$ e quindi, essendo f_2' una funzione continua, ha certamente almeno un minimo nel dominio. Verifichiamo ora se tale minimo è unico e se la sua ascissa è positiva. Per questo eseguiamo la derivata seconda $f_2''(x) = \frac{x^2 + 2\ln x - 3}{2x^3}$ e consideriamo il numeratore $h(x) = x^2 - 2\ln x - 3 \ge 0$. $\lim_{x\to 0} h(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$, $h'(x) = 2x + \frac{2}{x} > 0$ per cui esiste unico un punto la cui ascissa chiameremo α tale $h(\alpha) = 0$. Non sappiamo quanto vale α ma certamente sappiamo che $1 < \alpha < \sqrt{3}$. A questo punto calcoliamo $f_2'(\alpha) = \frac{6\alpha^2 - \alpha^4 - 1}{4\alpha^2}$ ed è facile verificare che $6\alpha^2 - \alpha^4 - 1 > 0$ per $-\sqrt{3} < \alpha < \sqrt{3}$ per cui $f_2'(\alpha) > 0$. Da ciò segue immediatamente che la funzione è invertibile su tutto il dominio. La risposta è due. Infatti se $x > 0$ la equazione $(x^2+1)\ln\sqrt{|x|} = \alpha x$ è equivalente a $f_2(x) = \alpha$ che ha un'unica soluzione essendo $f_2(x)$ monotona crescente. Se $x < 0$ la equazione è equivalente a $f_2(t) = -\alpha$ con $t = -x$ e si ha un'altra soluzione.

10.5 - f_3 - $f_3'(x) = x^2 + x + 1 - \frac{2x}{3(x^2+1)^{2/3}} - \arctan x$ e per $x \le 0$ essa è positiva per cui la funzione è invertibile. Essendo la funzione monotona crescente e continua il dominio della funzione inversa è dato dall'immagine della funzione nel suo dominio di esistenza ossia $(-\infty, -1]$.

11.5 $\lim_{x\to\pm\infty} = \pm\infty$ $f'(x) = 6x^2 - 8x + 2 \ge 0$ per $x \le \frac{1}{3} \vee$ $x \ge 1$ per cui la funzione non è invertibile su tutto il suo dominio. Se però si chiede, come viene chiesto, che la funzione sia invertibile separatamente in tre sottoinsiemi allora ciò è possibile a patto che $a = \frac{1}{3}$ e $b = 1$. Se consideriamo f solo nel dominio $(-\infty, \frac{1}{3}]$ la sua immagine è $(-\infty, \frac{116}{27}]$ che costituisce pure il dominio della inversa; funzione quest'ultima derivabile in tutti i punti di $(-\infty, \frac{116}{27})$. Il punto $x = \frac{116}{27}$ non è un punto di derivabilità dell'inversa in quanto ivi il rapporto incrementale è illimitato. $g'(4) = \frac{1}{f'(f^{-1}(4))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$

• Poniamo $\frac{1}{2} + 4e^x = 1$ da cui $e^x = \frac{1}{8}$. $f'(x) = \frac{1}{e^x + \frac{4e^x}{\frac{1}{2}+4e^x}}$ da cui $f'(-3\ln 2) = \frac{5}{8}$ e quindi il risultato

• Poniamo $\frac{e}{2} + 3e^x = e$ ossia $x = \ln\frac{e}{6}$. $f'(x) = 3e^{x-1} + \frac{3e^x}{\frac{e}{2}+3e^x}$ e quindi $f'(\ln\frac{e}{6}) = 1$ da cui il risultato.

12.5 Si usa il Teorema di Lagrange. Sia $0 < h < \frac{1}{2}$ e $f(h) = f'(\xi_1(h))h$ con $0 < \xi_1 < h$ ed usando l'ipotesi $|f(h)| \leq |f(\xi_1(h))|h$.

Ripetiamo il ragionamento ottenendo $f(\xi_1(h)) = f'(\xi_2(\xi_1(h)))\xi_1(h)$ con $0 < \xi_2(\xi_1(h) < \xi_1(h) < h$ e quindi $|f(\xi_2(h))| \leq |f(\xi_2(\xi_1(h)))|\xi_1(h) \leq |f(\xi_2(\xi_1(h)))|h$ e quindi $|f(h)| \leq |f(\xi_2(\xi_1(h)))|h^2$.

Ripetendo il ragionamento si ottiene

$|f(h)| \leq |f(\xi_n(\xi_{n-1}(\xi_{n-2}(\ldots))))|h^n$. Essendo f continua su tutto il dominio

$|f(\xi_n(\xi_{n-1}(\xi_{n-2}(\ldots))))| \leq M$ e quindi $|f(h)| \leq Mh^n$ e per n grande abbastanza tale quantità può essere resa piccola a piacere che equivale a dire che è nulla. Dunque $f(h) \equiv 0$ per ogni $0 \leq h < 1$. Sia ora $p = \frac{3}{4}$ e rifacciamo lo stesso discorso di prima solo che ora il ruolo svolto dallo zero è svolto da $\frac{3}{4}$.

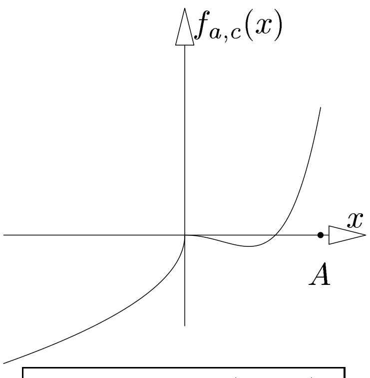
13.5 - Primo del gruppo - Per $x < 0$ e per $x > 2$ la funzione è monotona crescente. Se $a \geq 0$ la funzione è monotona crescente anche in $[0, 2]$ e quindi sarà sufficiente che $f_{a,c}(2^-) \leq f_{a,c}(2^+)$ ossia $16 + 4a \leq c + \ln 2$ e quindi $c \geq 16 - \ln 2 + 4a$ con $a \geq 0$. Il dominio della inversa è $(-\infty, 16 + 4a] \cup (c + \ln 2, +\infty)$. La derivata in $\frac{1}{16}(1 + 4a)$ è data da $\frac{2}{1+2a}$.

ii) $a \geq 0$ e $c = 16 + 4a - \ln 2$

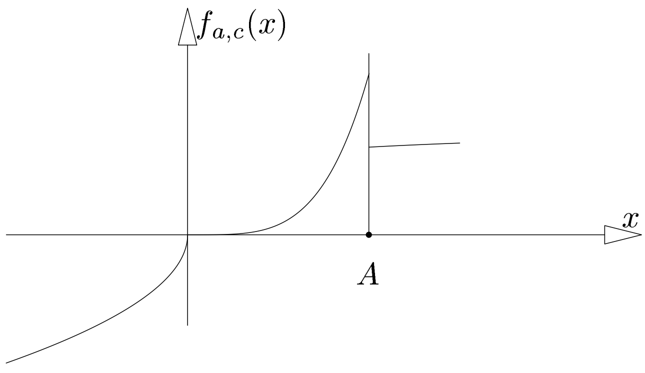
iii) $a \in \mathbf{R}$ e $c = 16 + 4a - \ln 2$

13.5 - Secondo Terzo Quarto e Quinto del gruppo - Ripetere i ragionamenti precedenti

Nel caso del primo esempio un grafico esemplificherà la situazione.

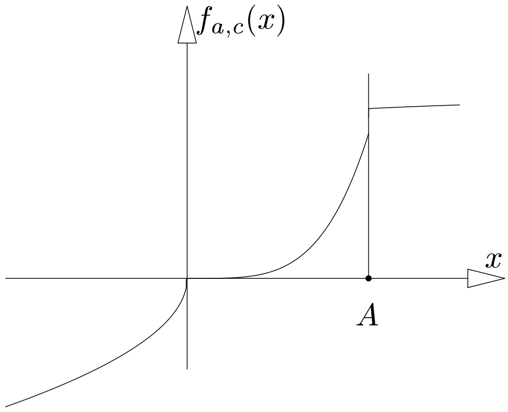


$a = -1, A \equiv (1.5, 0)$
c qualsiasi



$a = 0, c = 8,\ A \equiv (2, 0)$

e come si può vedere in nessuno dei due casi la funzione è iniettiva.



$\boxed{a = 0, c = 18,\ A \equiv (2, 0)}$

ed in questo caso la funzione è iniettiva.

14.5 Per $x \leq 0$ la funzione è monotona decrescente. Affinché sia invertibile è sufficiente che sia monotona crescente per $x > 2$ ed il grafico sia contenuto nel sottoinsieme $\{(x, y) \mid x > 2,\ y < -1\}$ e ciò è possibile per $a \leq -1$.

15.5* Sia $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = l > 0$ ossia $l - \varepsilon < f'(x) < l + \varepsilon$ per ogni $x > M_\varepsilon$. Consideriamo $x > M_\varepsilon$ e $h > 0$. Dal teorema di Lagrange $f(x + h) = f(x) + f'(\xi(x))h$ e quindi $f(x + h) > f(x) + (l - \varepsilon)h$. Ripetendo il ragionamento n volte si ha $f(x + nh) > f(x) + (l - \varepsilon)nh$ (osservare che il punto $x + nh$ appartiene all'intervallo $(M_\varepsilon, +\infty)$ perché altrimenti non si potrebbe usare $l - \varepsilon < f'(x)$). Ora n è arbitrario e ciò equivale a dire che la funzione f è non limitata contrariamente all'ipotesi.

16.5** $f(x) = \frac{\sin x^3}{x}$ e la funzione tende a zero in modo non monotono. La sua derivata prima è data da $f'(x) = \frac{3x^2 \cos x^3}{x} - \frac{\sin x^3}{x^2}$ che è continua ovunque ma non è una funzione limitata per $x \to +\infty$.

Come detto la seguente funzione

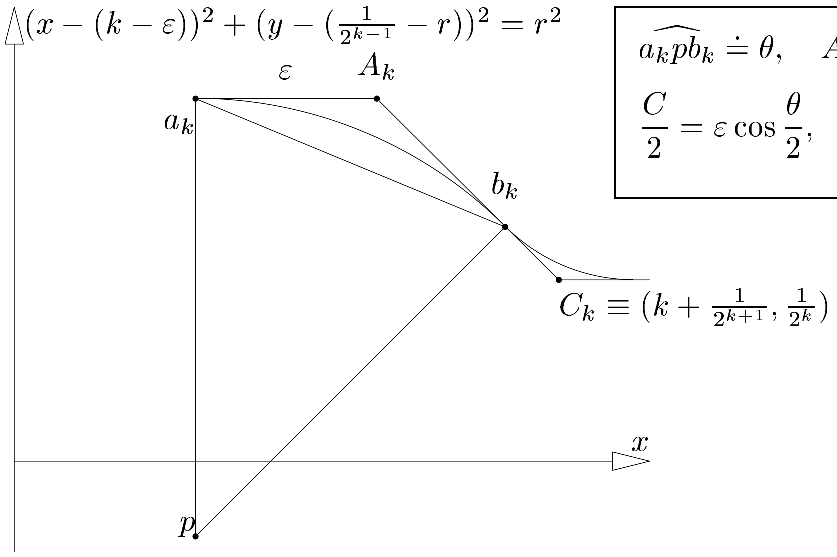
$$f\colon [1, +\infty) \to (0, 1],\ f(x) = \begin{cases} -2x + 2k + 2^{-k+1} & k \leq x < k + 2^{-k-1} \quad k \geq 1 \\ 2^{-k} & k + 2^{-k-1} \leq x < k + 1 \end{cases}$$

tende a zero in modo monotono ed è derivabile in tutti i punti che non abbiano coordinate $(k, \frac{1}{2^{k-1}})$ oppure $(k + \frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k})$.

Per ottenere una funzione che abbia le caratteristiche richieste ed in più sia derivabile ovunque, si consideri un punto della funzione di coordinate $a_k \doteq (k - \varepsilon, \frac{1}{2^{k-1}})$ (per $0 < \varepsilon < 1 - \frac{1}{2^k}$ appartiene alla retta $y = \frac{1}{2^{k-1}}$). La sua distanza dal punto di coordinate $(k, \frac{1}{2^{k-1}})$ è chiaramente ε. Sul segmento che collega i punti $(k, \frac{1}{2^{k-1}})$ e $(k + \frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k})$ (e che appartiene alla retta di coefficiente angolare -2) si prenda un punto b_k che dista da $(k, \frac{1}{2^{k-1}})$ esattamente ε. La sua ascissa è maggiore di k e minore di $k + \frac{1}{2^{k+1}}$ ed è data da $k + \frac{\varepsilon}{\sqrt{5}} \equiv q(\varepsilon)$. Il punto b_k avrà quindi coordinate $(k + q(\varepsilon), -2(k + q) + 2k + \frac{1}{2^{k-1}})$. La distanza fra a_k e b_k è $\sqrt{(q + \varepsilon)^2 + 4q^2} = \varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 \frac{4}{5} + \varepsilon^2(1 + \frac{1}{\sqrt{5}})} = \varepsilon\sqrt{2 + \frac{2}{\sqrt{5}}} \equiv C$. Ora determiniamo la equazione della circonferenza che passa per a_k, per b_k ed è tangente alle rette di equazione $y = \frac{1}{2^{k-1}}$ e $y = -2x + 2k + \frac{1}{2^{k-1}}$. Con un pizzico di geometria (vedi il grafico) si riconosce che il raggio di tale circonferenza è dato da $r = \frac{C}{2}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{C^2}{4\varepsilon^2}}} = \varepsilon\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{5}}}$. Il centro p di tale circonferenza ha quindi coordinate $(k - \varepsilon, \frac{1}{2^{k-1}} - r)$ e la equazione è $(x - (k - \varepsilon))^2 + (y - (\frac{1}{2^{k-1}} - r))^2 = r^2$. Verifichiamo ora che effettivamente la derivata di tale circonferenza nei punti a_k e b_k vale rispettivamente 0 e -2. Per far questo trasliamo la circonferenza in modo tale che le coordinate del centro siano poste nell'origine. In tal modo le coordinate di a_k diventano $(0, r)$ mentre quelle di b_k diventano $(\varepsilon + \frac{\varepsilon}{\sqrt{5}}, -2q + r)$.

La derivata prima della circonferenza nel semipiano superiore è $y' = \frac{-x}{\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4}(6+2\sqrt{5})-x^2}}$ e calcolata in 0 dà 0 mentre calcolata in $x=\varepsilon+\frac{\varepsilon}{\sqrt{5}}$ dà $-\frac{1+\frac{1}{\sqrt{5}}}{\sqrt{\frac{5}{4}(1+\frac{1}{\sqrt{5}})^2-(1+\frac{1}{\sqrt{5}})^2}} = -2$ come deve essere.

Identico discorso si fa per raccordare in modo che la derivata prima esista nell'intervallo $(b_k, k+\frac{1}{2^{k+1}}+\varepsilon)$ con $0<\varepsilon<1-\frac{1}{2^{k+1}}$.



$$\boxed{\begin{array}{l} \widehat{a_k p b_k} \doteq \theta, \quad \widehat{A_k a_k b_k} \doteq \frac{\theta}{2}, \quad A_k \equiv (k, \frac{1}{2^{k-1}}) \\ \frac{C}{2} = \varepsilon\cos\frac{\theta}{2}, \quad r = \frac{C}{2}\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{C}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{C^2}{4\varepsilon^2}}} \end{array}}$$

18.5 1) Usiamo il teorema di Lagrange nell'intervallo $[a,c]$ e quindi esiste $\xi\in(a,b)$ tale che $\frac{f(a)-f(c)}{a-c}=f'(\xi)$. Usiamo poi lo stesso teorema nell'intervallo $[c,b]$ ottenendo che esiste $\eta\in(c,d)$ tale che $\frac{f(c)-f(b)}{c-b}=f'(\eta)$. $\frac{f(a)-f(c)}{a-c}=\frac{f(c)-f(b)}{c-b}$ in quanto ambedue le espressioni esprimono il coefficiente angolare della retta congiungente i punti del piano $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$. Ne segue che esistono due punti ξ e η in cui la derivata prima ha lo stesso valore e quindi per il teorema di Rolle esiste $d\in(\xi,\eta)$ tale che $f''(d)=0$.

2) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & x\neq a \\ f'(a) & x=a\,. \end{cases}$ Abbiamo $f(x)=f(a)+g(x)(x-a)$ e derivando si ottiene $f'(a)=g(a)$, $f'(b)=g'(b)(b-a)+g(b)$. Uguagliando arriviamo a $g'(b)=\frac{g(a)-g(b)}{b-a}$. Se $g(b)>g(a)$ abbiamo che $g'(b)<0$ e quindi tra a e b deve esserci un massimo di ascissa ξ in cui la funzione g ha derivata nulla (vedi esercizio **55.5**. Dire che $g'(\xi)=0$ equivale alla relazione da dimostrare. Se $g(b)<g(a)$ il discorso è lo stesso. Se $g(a)=g(b)$ allora applichiamo il Teorema di Rolle ed abbiamo un punto interno ad (a,b) in cui la derivata di $g(x)$ è nulla.

19.5 - Primo del gruppo - La funzione è iniettiva se e solo se $\alpha\le -8$ (basta fare i grafici nei due sottoinsiemi).

19.5 - Secondo del gruppo - Per $x<-1$ il grafico è monotono crescente ed ha $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ mentre $\lim_{x\to -1^-} f(x)=+\infty$. Se $f(-1)>1$ di sicuro non vi è iniettività. Dunque deve essere $\alpha\le 3$. Per $\alpha\neq 0$ la funzione, in $(-1,+\infty)$, è monotona decrescente se $0<\alpha<3$ mentre è monotona crescente per $\alpha<0$. In ambedue i casi si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-2$.

19.5 - Terzo del gruppo - Conviene definire la variabile $\frac{x}{4\alpha}=t$ dimodoché il sistema diventa

$$f(x) = \begin{cases} \arcsin t & |t|\le 1 \\ 6-4\alpha t & |t|>1 \end{cases}$$

Il grafico della funzione per $|t| \le 1$ è immediato. Essendo la funzione monotona decrescente per $|t| > 1$ se si vuole l'iniettività su tutto il dominio della funzione bisogna che $\lim_{t\to 1^+} f(t) = \sup_{t\in(1,+\infty)} f(t) \le \min_{t\in[-1,+1]} f(t) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ e $\lim_{t\to -1^-} f(t) = \inf_{t\in(-\infty,1)} f(t) \ge \sup_{t\in[-1,+1]} f(t) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ da cui si ottiene $6 - 4\alpha < -\frac{\pi}{2}$ e $6 + 4\alpha > \frac{\pi}{2}$. La seconda è sempre verificata mentre la prima è verificata per $\alpha \ge \frac{3}{2} + \frac{\pi}{8}$.

19.5 - Quarto del gruppo - Il grafico della funzione è costituito per $x < 0$ da una parabola con la concavità rivolta verso il basso mentre per $x \ge 0$ da una parabola con la concavità rivolta verso l'alto. Il massimo della prima parabola si trova ad $x = \frac{1}{2}$ e quindi nell'intervallo $-\infty, 0)$ la funzione è invertibile. Per la seconda parabola il minimo si trova a $x = \frac{\alpha-1}{2}$ ed è necessario che $\alpha - 1 \le 0$ ossia $\alpha \le 1$. Inoltre bisogna che $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 \le -\alpha$ che con la precedente dà come condizione $\alpha \le -1$.

19.5 - Quinto del gruppo - $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 4$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 8$,
$\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\frac{16}{\pi} \arctan\sqrt{\frac{3}{2}}$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -4$;
$f'(x) = \frac{16}{\pi}\frac{x^2}{2x^2+2}\frac{2}{x^2\sqrt{x^2+2}}$ e dunque è positiva per ogni valore di x tale che $x < 0 \vee x > 2$ ed inoltre $\lim_{x\to 4^-} f'(x) = 0$. Esaminiamo ora la funzione all'interno dell'intervallo $[0, 2]$. Certamente escludiamo il valore $\alpha = 0$ in quanto si avrebbe una funzione ivi costante. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 4$, $-4 < \lim_{x\to 2^-} f(x) = 4\cos^3(2\alpha) < 4$, ed inoltre $f'(x) = -12\alpha \sin(\alpha x)\cos^2(\alpha x)$. L'unico modo di avere la funzione invertibile consiste nel chiedere che sia invertibile nell'intervallo e quindi $2\alpha < \pi$ se α è positivo oppure $-2\alpha > -\pi$ se α è negativo. Combinando le due relazioni si ottiene $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$.

19.5 - Sesto del gruppo - Per $|x| > 1$ il grafico è evidente trattandosi di due segmenti della stessa retta. Per $\alpha = 0$ non vi è iniettività. Per $\alpha \ne 0$ bisogna che: il modulo del semiperiodo della funzione $\sin \alpha x$ sia maggiore di 2, $|\sin\alpha| \le \frac{1}{2}$. La prima condizione è verificata per $\frac{\pi}{|\alpha|} > 2$ ossia $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$. La seconda condizione è verificata per $0 < \alpha \le \frac{\pi}{6}$ oppure $-\frac{\pi}{6} < \alpha < 0$.

19.5 - Settimo del gruppo - Per $x \le 1$ il grafico è dato da una retta. Per $x > 1$ è una parabola con la concavità rivolta verso l'alto. È necessario quindi che il minimo relativo della parabola abbia ascissa minore od uguale ad 1 e che $\lim_{x\to 1^+} f(x) \ge f(1) = -3$ e ciò si verifica per $\alpha \le -3$.

20.5 La prima parte della dimostrazione è $x - \log(1 + x) \ge 0$. $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $f'(x) = \frac{x}{1+x}$ e quindi $f' \ge 0$ per $x \ge 0$ $f(0) = 0$ da cui si deduce che $x - \log(1 + x) > 0$ per $x \ne 0$ ed è zero per $x = 0$ da cui l'asserto.
La seconda parte della dimostrazione prevede di mostrare che $x - \log(1 + x) - \frac{x^2}{2} \doteq g(x) < 0$. $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, $g'(x) = -\frac{x^2}{1+x^2} < 0$ per ogni x da cui l'asserto.

21.5* La funzione $f_1(x)$ è dispari ed inoltre $f_1'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = \lambda$ mentre per $x \ne 0$ si ha $|f_1'(x)| = |\lambda + 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}| \ge |\lambda| - |2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}| \ge |\lambda| - 2|x| - 1 \ge 0$ per $|x| \le \frac{|\lambda|-1}{2}$ se $|\lambda| > 1$. Dunque per $|\lambda| > 1$ esiste un intervallo $[\frac{1-|\lambda|}{2}, \frac{|\lambda|-1}{2}]$ in cui $f_1'(x)$ è positiva se λ è positivo oppure negativa se λ è negativo. Vediamo ora cosa succede per $\lambda = 1$. $f_1'(x) = 1 + 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ e per $x_k = \frac{2}{\pi+2\pi k}$ $f_1'(x_k) = 0$. $f_1''(x) = 2\sin\frac{1}{x} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ e quindi $f_1''(x_k) = \pi + 2k\pi$ da cui $f_1''(x_k) \ge 0$ per $k \ge 0$ mentre $f_1''(x_k) < 0$ per $k < 0$. Inoltre è evidente che $f_1(x_k) = \lambda x_k \to 0$ per $k \to +\infty$. Da ciò se ne conclude che i punti x_k sono dei minimi per $k > 0$ e massimi per $k < 0$; inoltre punto di accumulazione della successione $\{x_k\}$ è zero e quindi $f_1(x)$ non può essere invertibile in alcun intorno dell'origine (fondamentale a tal proposito è che $x_k \to 0$). Da ultimo è rimasto il caso $|\lambda| < 1$ che lasciamo al lettore interessato. La risposta è che anche in questo caso non esiste alcun intorno dell'origine in cui la funzione è invertibile.
Nel caso di $f_2(x)$ è un po' diverso. Gli stessi ragionamenti ci inducono a scrivere $|f_2'(x)| = |\lambda +$

$3x^2 \sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}| \geq |\lambda| - 3|x|^2 - |x| \geq 0$ per $3|x|^2 + |x| - |\lambda| \leq 0$ ossia $0 \leq |x| \leq \frac{-1+\sqrt{1+9|\lambda|^2}}{6} \doteq x_+$ e va osservato che il radicando è sempre positivo per ogni valore di λ mentre $x_+ > 0$ solo per $\lambda \neq 0$. Infatti per $\lambda = 0$ la funzione diventa non invertibile in ogni intorno dell'origine. Si capisce tale fatto osservando che per $x \to 0$ $f_2(x) \to 0$ in modo non monotono ma assumendo definitivamente valori sia negativi che positivi (si hanno infiniti massimi e minimi la cui ordinata tende a zero).

22.5** È vero che $\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{\xi(x)} = 0$ poiché la variabile della funzione è x ma attraverso la funzione $\xi(x)$. Ciò spiega perché, pur essendo $0 < \xi < x$, non segue che $\lim_{\xi\to 0} \cos\frac{1}{\xi} = 0$.

23.5 Forse il modo più rapido consiste nello scrivere $\frac{x^2+1}{x(x^2-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$ e svolgendo i calcoli si ottiene $A = -1$, $B = 1$, $C = 1$. La derivata centesima diventa $(-\frac{1}{x^{101}} + \frac{1}{(x+1)^{101}} + \frac{1}{(x-1)^{101}})(100)!$.

24.5 Per definizione di derivabilità si ha $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$ ed essendo $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{2h} + \lim_{h\to 0} \frac{-f(x-h)+f(x)}{2h}$ si ha il risultato. $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(-x-h)-f(-x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-(f(-x+h)+f(-x))}{h} = -f'(-x)$ ossia la disparità della derivata.

24.5.0.5** La funzione $f(x)$ è chiaramente continua nell'origine. Inoltre abbiamo $f^*(x) = \begin{cases} 0 & x \in \{y_n\} \\ \alpha_n & x \in (x_{n+1}, y_n) \\ -\alpha_n & x \in (y_n, x_n) \\ \dfrac{\alpha_n + \alpha_{n-1}}{2} & x \in \{x_n\} \end{cases}$ da cui segue che $\lim_{x\to 0} f^*(x) = 0$ e $f^*(0) = 0$ per cui $f^*(x)$ è continua nell'origine. D'altro canto f non è derivabile nell'origine. Infatti $\frac{1}{x_n}(f(x_n) - f(0)) = 0$ per ogni n e $\frac{1}{y_n}(f(y_n) - f(0)) = \frac{f(y_n)}{y_n} = \frac{\alpha_n(x_n - x_{n+1}) + y_n}{2y_n}$ il cui limite per $n \to +\infty$ è 2. Dunque $f(x)$ non è derivabile in $x = 0$

24.5.1 Per la derivabilità bisogna risolvere il sistema $\begin{cases} d + ce^{-a-b} = 0 \\ -c(2a+b)e^{-a-b} = -2 \\ c(4a^2 + 4ab + b^2 - 2a)e^{-a-b} = -2 \end{cases}$

•

25.5** Essendo f derivabile due volte per ogni $x \in \mathbf{R}$ con derivata seconda continua, si può scrivere $f(c) = f(x) + f'(x)(c-x) + \frac{1}{2}f''(\xi)(c-x)^2$ con $x < \xi < c$ e $f(-c) = f(x) + f'(x)(-c-x) + \frac{1}{2}f''(\eta)(c-x)^2$ con $-c < \eta < x$. Facendo la differenza si ha $f(c) - f(-c) = 2cf'(x) + \frac{1}{2}(f''(\xi)(c-x)^2 - f''(\eta)(c+x)^2)$ e ne segue che $2M_o \geq |f'(x)|2c - \frac{1}{2}2M_2(c^2+x^2)$ da cui il risultato $|f'| \leq \frac{M_o}{c} + \frac{M_2(c^2+x^2)}{2c} \leq \frac{M_o}{a} + \frac{M_2(c^2+a^2)}{2a}$

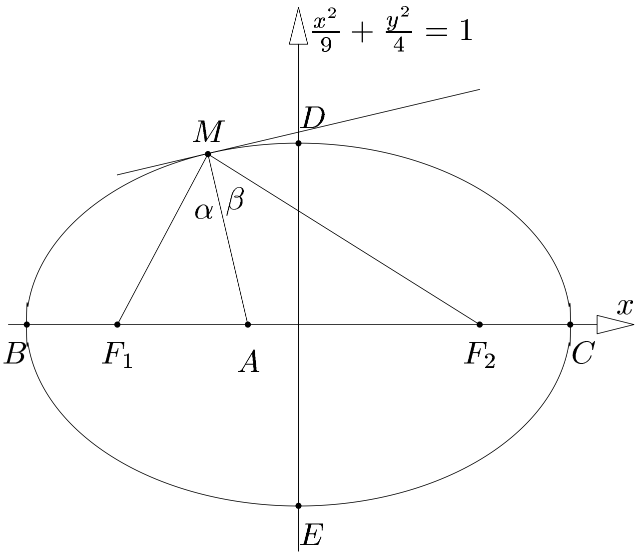
Riguardo alla seconda domanda si ha $f(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x-x_o) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_o)^2$, $x_o + \frac{x-x_o-|x-x_o|}{2} < \xi < x_o + \frac{x-x_o+|x-x_o|}{2}$. Come x_o prendiamo un punto (che esiste per definizione di estremo superiore) tale che $|f'(x_o)| > M_1 - \varepsilon$ con ε dato. Ora $|f(x)| \geq |f'(x_o)(x-x_o)| - |f(x_o) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_o)^2|$ (si è usata la proprietà del modulo per cui $|a-b| \geq |a| - |b|$) per cui si può ulteriormente minorare $M_o > (M_1 - \varepsilon)|x-x_o| - M_o - \frac{1}{2}M_2(x-x_o)^2$ ossia $M_2(x-x_o)^2 - 2(M_1-\varepsilon)|x-x_o| + 4M_o > 0$ da cui $M_1 - \varepsilon < \frac{2M_o}{a} + \frac{M_2 a}{2}$ con $a = |x-x_o|$. La funzione di a, $\frac{2M_o}{a} + \frac{M_2 a}{2}$ ha un minimo a $2\sqrt{\frac{M_o}{M_2}}$ con ordinata $2\sqrt{M_o M_2}$ e se a è più grande di tale quantità si deve avere $M_1 - \varepsilon < 2\sqrt{M_o M_2}$.

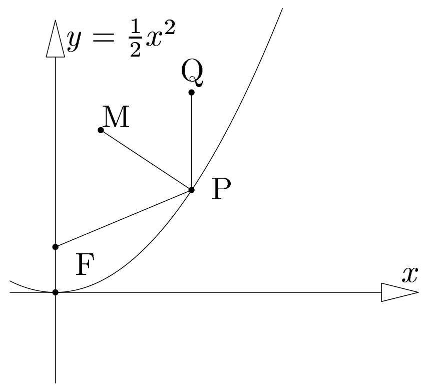
Per quanto concerne la terza domanda scriviamo $f(x+x_o) = f(x_o) + f'(x_o)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2$ e $f(x_o - x) = f(x_o) + f'(x_o)(-x) + \frac{1}{2}f''(\eta)x^2$. La differenza dà $f(x+x_o) - f(x_o - x) = f'(x_o)2x + (\frac{1}{2}f''(\xi) - \frac{1}{2}f''(\eta))x^2$ e prendiamo x_o come al precedente punto. Otteniamo $2M_o > (M_1 - \varepsilon)2|x| - \frac{1}{2}2M_2x^2$ da cui il risultato dovendo essere vera per ogni x e per ogni ε.

26.5* Per evidenti ragioni escludiamo il caso in cui $f \equiv 0$. Di conseguenza
$\exists\ \varepsilon_o > 0\ \exists\ x_{\varepsilon_o}$ *t.c.* $|f(x_{\varepsilon_o})| \geq \varepsilon_o$. In caso contrario infatti si avrebbe, negando la precedente affermazione, che
$\forall\ \varepsilon > 0\ \forall\ x\ |f(x)| < \varepsilon$; ma ciò equivale a dire che $f \equiv 0$, eventualità questa che abbiamo scartato. Essendo f continua si può dire che $\{y \in \mathbf{R} \mid y = f(x)\ x \in [0, x_{\varepsilon_o}]\} \supset [\frac{1}{2}\varepsilon_o(f(x_{\varepsilon_o}) - |f(x_{\varepsilon_o})|), \frac{1}{2}\varepsilon_o(f(x_{\varepsilon_o}) + |f(x_{\varepsilon_o})|)]$ e quindi *per ogni* $y_o \in [\frac{1}{2}\varepsilon_o(f(x_{\varepsilon_o}) - |f(x_{\varepsilon_o})|), \frac{1}{2}\varepsilon_o(f(x_{\varepsilon_o}) + |f(x_{\varepsilon_o})|)]$ *esiste* x_o tale che $y_o = f(x_o)$. Del resto per ipotesi abbiamo che $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ M_\varepsilon$ *t.c.* $x > M_\varepsilon \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$. Prendiamo dunque $\varepsilon = \varepsilon_o$ e prendiamo un valore di x' che sia più grande sia di M_{ε_o} che di x_{ε_o}. Si ha $|f(x')| < \varepsilon_o$ e d'altro canto esiste un punto $x'' \in [0, x_{\varepsilon_o}]$ per cui $f(x'') = f(x')$. Per il Teorema di Rolle esiste $c \in (x'', x')$ tale che $f'(c) = 0$.

27.5 Sia A il punto in cui la retta ortogonale in M all'ellisse incontra l'asse delle x. Dimostriamo che $\frac{\overrightarrow{MF_1}}{|\overrightarrow{MF_1}|} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{\overrightarrow{MF_2}}{|\overrightarrow{MF_2}|} \cdot \overrightarrow{MA}$. Infatti $\frac{\overrightarrow{MF_1}}{|\overrightarrow{MF_1}|} \cdot \overrightarrow{MA} = |\overrightarrow{MA}||\cos F_1\widehat{M}A|$ e quindi l'uguaglianza implica che $|\cos F_1\widehat{M}A| = |\cos F_2\widehat{M}A|$.
Questo modo di procedere fa uso della geometria ma è un pò più breve di una procedura puramente analitica per la quale bisognerebbe intersecare la retta $\overline{MA}$ con la retta passante per F_1 ed ortogonale ad essa (sia P il punto di intersezione). Poi bisogna intersecare la retta $\overline{F_1P}$ con la retta $\overline{MF_2}$ e sia P_1 il punto di intersezione. A questo punto bisogna mostrare che la distanza $|\overrightarrow{FP}|$ è uguale alla distanza $|\overrightarrow{PP_1}|$. In questo secondo caso i calcoli sono un pò più pesanti.
Come prima cosa deriviamo l'equazione dell'ellisse. Essa è il luogo geometrico dei punti del piano tale che è uguale ad una costante la somma delle distanze da due punti fissati detti *fuochi*. Consideriamo gli assi cartesiani e per semplicità poniamo i due fuochi nei punti $F_1 = (F, 0)$, $F_2 = (-F, 0)$. Sia $P = (x, y)$ un generico punto del piano e sia $\sqrt{(x-F)^2 + y^2} + \sqrt{(x+F)^2 + y^2} = c$ la relazione che identifica l'ellisse. Come prima cosa bisogna osservare che $c > 2F$ in quanto nel triangolo i cui vertici sono dati dai punti F_1, F_2, P, la somma dei cateti, c appunto, è maggiore dell'ipotenusa ossia $2F$. Sviluppando la relazione si perviene a $\frac{4}{c^2}x^2 + \frac{4}{c^2 - 4F^2}y^2 = 1$ che viene comunemente riscritta come $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ una volta che si è posto $a = \frac{c}{2}$, $b = \frac{1}{2}\sqrt{c^2 - 4F^2}$ e quindi $F^2 = a^2 - b^2$
Torniamo al primo modo. Sia M un punto del'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ di coordinate (x_o, y_o). La retta tangente ad M è data da $\frac{yy_o}{b^2} + \frac{xx_o}{a^2} = 1$ mentre la retta ortogonale ad M è $y = y_o + \frac{a^2 y_o}{b^2 x_o}(x - x_o)$. Da ciò segue che A ha coordinate $(x_o(1 - \frac{b^2}{a^2}), 0)$. $\frac{\overrightarrow{MF_1}}{|\overrightarrow{MF_1}|} = \frac{(x_o - F, y_o)}{\sqrt{(x_o - F)^2 + y_o^2}}$, $\frac{\overrightarrow{MF_2}}{|\overrightarrow{MF_2}|} = \frac{(x_o + F, y_o)}{\sqrt{(x_o + F)^2 + y_o^2}}$, $\overrightarrow{MA} = \frac{(x_o \frac{b^2}{a^2}, y_o)}{\sqrt{x_o^2 \frac{b^4}{a^4} + y_o^2}}$; da tali relazioni segue che devono verificarsi le uguaglianze $\frac{x_o \frac{b^2}{a^2}(x_o - F) + y_o^2}{\sqrt{(x_o - F)^2 + y_o^2}} = \frac{x_o \frac{b^2}{a^2}(x_o + F) + y_o^2}{\sqrt{(x_o + F)^2 + y_o^2}}$ ossia $\frac{a^2 - x_o F}{\sqrt{(x_o - F)^2 + y_o^2}} = \frac{a^2 + x_o F}{\sqrt{(x_o + F)^2 + y_o^2}}$ essendo $\frac{x_o^2}{a^2} + \frac{y_o^2}{b^2} = 1$. Ora essendo $F = \sqrt{a^2 - b^2}$ per definizione di ellisse, si ha $(x_o - F)^2 + y_o^2 = x_o^2 - 2x_o\sqrt{a^2 - b^2} + a^2 - b^2 + b^2 - \frac{x_o^2 b^2}{a^2} = \frac{x_o^2(a^2 - b^2) + a^4 - 2x_o a^2 F}{a^2} = \frac{(a_2 - x_o F)^2}{a^2}$. A questo punto si capisce come la relazione sia vera.
Quanto dimostrato fa si che se la superficie interna dell'ellisse riflettesse la luce (fosse costituita da specchi) ed una sorgente luminosa fosse posta in uno dei fuochi, ebbene tutti i raggi luminosi verrebbero raccolti nell'altro fuoco. Tale caratteristica dà origine al fatto che i punti F_1 e F_2 sono detti appunto fuochi.

Per quanto riguarda l'esercizio sulla parabola consideriamo il grafico della funzione $y = a'x^2 + bx + c$. Con una traslazione di assi esso può scriversi come $y = ax^2$ *e non vengono alterati gli angoli fra due vettori qualsiasi.* Il fuoco è dato dal punto di coordinate $(0, \frac{1}{4a})$. Un punto della parabola ha coordinate $P \equiv (x_o, ax_o^2)$. Sia $Q \equiv (x_o, 1 + ax_o^2)$; il vettore $\overrightarrow{PQ}$ ha coordinate $(0, 1)$. Un vettore $\overrightarrow{N}$ normale alla parabola in un punto di ascissa x è dato da $(-2ax, 1)$ e quindi il coseno dell'angolo fra $\overrightarrow{PQ}$ ed $\overrightarrow{N}$ è dato da $\frac{\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{N}}{|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{N}|} = \frac{1}{\sqrt{1+4a^2x_o^2}}$. Il vettore $\overrightarrow{PF}$ ha coordinate $(-x_o, \frac{1}{4a} - ax_o^2)$ per cui il coseno dell'angolo fra $\overrightarrow{PF}$ e $\overrightarrow{N}$ è dato da $\frac{\overrightarrow{PF}.\overrightarrow{N}}{|\overrightarrow{PF}||\overrightarrow{N}|} = \frac{ax_o^2 + \frac{1}{4a}}{\sqrt{1+4a^2x_o^2}\sqrt{x_o^2 + (\frac{1}{4a} - ax_o^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+4a^2x_o^2}}$.



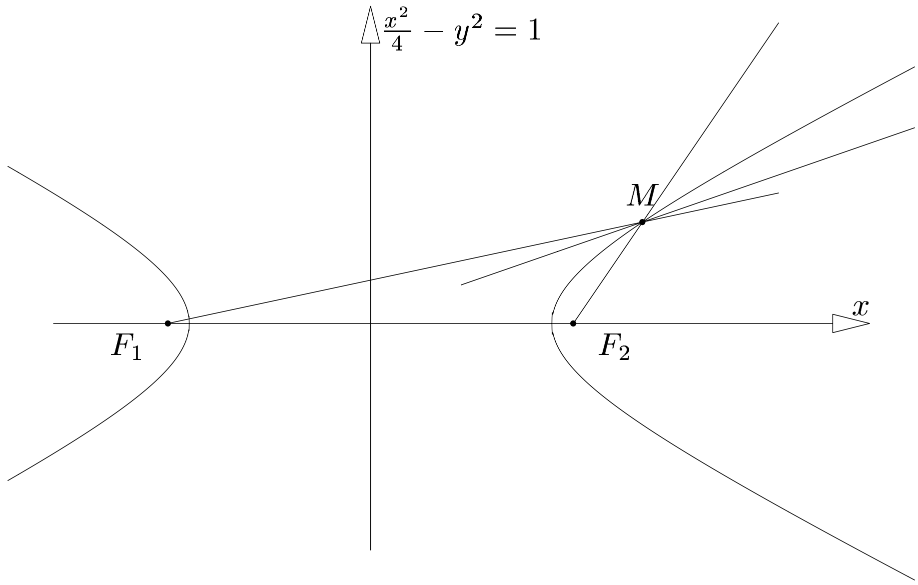


$M \equiv (-1, \frac{4\sqrt{2}}{3})$, $A \equiv (-\frac{5}{9}, 0)$
$F_{1,2} \equiv (\mp\sqrt{5}, 0)$, $B \equiv (-3, 0)$, $C \equiv (3, 0)$
$D \equiv (0, 2)$, $E \equiv (0, -2)$

$F \equiv (0, \frac{1}{2}), P \equiv (\frac{3}{2}, \frac{9}{8}), Q \equiv (\frac{3}{2}, \frac{11}{5}),$
$M \equiv (\frac{1}{2}, \frac{17}{8}), \quad \overrightarrow{PM} \equiv \overrightarrow{N}$

Un'uso accurato della geometria analitica consente di dimostrare la stessa proprietà con meno calcoli ancora. Si indichi con $\underline{F}_1$ il vettore $\overrightarrow{0F_1}$, con $\underline{X}$ il vettore $\overrightarrow{F_1M}$, e con $\underline{F}_2$ il vettore $\overrightarrow{0F_2}$. Il primo ed il terzo sono vettori costanti mentre il secondo varia con il variare del punto sull'ellisse. La variazione del vettore $\underline{X}$ *dipende però da una sola variabile* in quanto una curva piana ha bisogno di un solo parametro per essere identificata. Per definizione di ellisse sappiamo che $|\underline{F}_1 + \underline{x}| + |\underline{F}_1 - \underline{F}_2 + \underline{x}| = c$ e c è una costante. Per un qualsiasi vettore v si ha $|v| = \sqrt{(\underline{v}, \underline{v})} \doteq \sqrt{\underline{v} \cdot \underline{v}} \doteq \sqrt{\underline{v}^2}$. Derivando la relazione rispetto al parametro che non abbiamo nemmeno bisogno di identificare si ottiene $\frac{(\underline{F}_1 + \underline{X}) \cdot \underline{X}'}{\sqrt{(\underline{F}_1 + \underline{X})^2}} + \frac{(\underline{F}_1 - \underline{F}_2 + \underline{X}) \cdot \underline{X}'}{\sqrt{(\underline{F}_1 - \underline{F}_2 + \underline{X})^2}} = 0$. Raccogliendo (data la linearità del prodotto scalare) $\underline{X}'$ si ottiene $\underline{X}'(\frac{(\underline{F}_1 + \underline{X})}{\sqrt{(\underline{F}_1 + \underline{X})^2}} + \frac{(\underline{F}_1 - \underline{F}_2 + \underline{X})}{\sqrt{(\underline{F}_1 - \underline{F}_2 + \underline{X})^2}}) = 0$. Ora bisogna osservare che dentro la parentesi vi è la somma di due vettori aventi entrambe modulo uguale ad 1 e che della loro somma si effettua il prodotto scalare con un vettore, $\underline{X}'$, *che è tangente all'ellisse.* Bisogna far vedere quindi che la somma di cui si parla, anche essa un vettore, sia diretta lungo la retta $\overline{MA}$ della figura ossia divida in due parti uguali l'angolo $F_1\widehat{M}F_2$. Se indichiamo per brevità $\underline{u} = \frac{\underline{F}_1 + \underline{X}}{|\underline{F}_1 + \underline{X}|}$ e $\underline{v} = \frac{\underline{F}_1 - \underline{F}_2 + \underline{X}}{|\underline{F}_1 - \underline{F}_2 + \underline{X}|}$ allora deve verificarsi che $\frac{\underline{u} \cdot (\underline{u} + \underline{v})}{|\underline{u}||\underline{u} + \underline{v}|} + \frac{\underline{v} \cdot (\underline{u} + \underline{v})}{|\underline{v}||\underline{u} + \underline{v}|} = 0$. Sviluppando i calcoli ed usando il fatto che $|\underline{u}| = |\underline{v}| = 1$ si ha l'uguaglianza.

Per quanto riguarda l'iperbole essa è il luogo dei punti del piano tale che è costante la differenza fra le distanze da due punti del piano. Detti $F_1 \equiv (-F, 0)$ e $F_2 \equiv (F, 0)$ e (x, y) il punto del piano si ha $\sqrt{(x+F)^2+y^2} - \sqrt{(x-F)^2+y^2} = C$ e sviluppando come nel caso dell'ellisse si ha $\frac{x^2}{(\frac{C}{2})^2} - \frac{y^2}{(F^2-\frac{C}{2})^2} = 1$ ed in questo caso $C < 2F$.



Si possono rifare ora gli stessi calcoli eseguiti per l'ellisse ed ottenere, detti $\underline{u}$ e $\underline{v}$ i versori diretti lungo le rette rispettivamente $\overline{F_1M}$ e $\overline{F_2M}$, la relazione $\underline{X}' \cdot (\underline{u} - \underline{v}) = 0$ dove come prima $\underline{X}$ è la parametrizzazione scelta per descrivere l'iperbole. Ma $\underline{X}'$ è diretto lungo la tangente all'iperbole e quindi i due versori formano angoli uguali con la tangente che è esattamente quanto dovevamo dimostrare.

Per quanto riguarda l'ultima domanda si possono impostare dei conti usando la geometria analitica ma è più facile ragionare geometricamente. Si consideri l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ e si operi il seguente cambiamento di variabili $\xi = \frac{x}{a}$ e $\eta = \frac{y}{b}$. Nelle nuove variabili l'ellisse diventa la circonferenza $\xi^2 + \eta^2 = 1$. La proprietà citata per le corde è immediatamente vera per la circonferenza. Per dimostrare la proprietà nel caso dell'ellisse basta osservare che la trasformazione di coordinate conserva l'allineamento di tre o più punti. Infatti se tali punti sono allineati (stanno sulla stessa retta) ed indichiamo con (ξ_k, η_k) le coordinate del punto k–esimo si avrà , per definizione di allineamento che $\frac{\eta_k}{\xi_k} = C$ *per ogni* k (se $\xi_k \neq 0$). Il ritorno alle coordinate (x, y) provoca che la costante C diventa $C\frac{a}{b}$ per ogni k e quindi l'allineamnto resta solo che la retta ha una diversa inclinazione rispetto all'asse delle ascisse.

Il lettore/trice attento dovrebbe osservare che non tutte le proprietà della circonferenza si trasportano nell'ellisse. Ad esempio nel caso della circonferenza si ha che la retta normale in un qulasiasi punto passa per il centro della cirfonferenza; cosa questa che non capita per l'ellisse. Infatti la proprietà della circonferena appena citata si può identificare dicendo che l'angolo fra la tangente in un punto e la retta passante per il centro ed il punto è di 90 gradi. Non essendo gli angoli quantità che vengono conservate quando si usa la trasformazione di coordinate ne segue che la proprietà non è vera per l'ellisse.

28.5 - Primo del gruppo - Dopo aver scritto $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$, usare il Teorema di Lagrange ed usare in modo essenziale che $b > 0$.

28.5 - Secondo del gruppo - Stessa procedure del precedente esercizio. Stavolta bisogna usare che $a < \frac{\pi}{2}$ e che $\cos x$ è una funzione decrescente per $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

29.5 Dopo aver dimostrato che $\ln x < x+1$ si arrivi alla disequazione $6x^4 - 17x^3 + 18x^2 - 9x + 2 > 0$ e si faccia vedere che è sempre verificata per $x > 0$ e $x \neq 1$.

30.5* Se $|x|$ è sufficientemente piccolo abbiamo che $f(x) \geq \frac{1}{4}x$ per x positivo e $f(x) \leq \frac{3}{4}x$ per x negativo da cui la crescenza. Del resto per avere la crescenza in un intervallo contenente l'origine bisogna che $f'(x)$ sia positiva od al più nulla nell'intervallo e questo non avviene come è evidente dalla espressione della derivata prima.

31.5 $\Rightarrow$: Supponiamo che F esista ossia esiste $F\colon K \to \mathbf{R}$ tale che $F|_{_M} = f$ e F è continua. Essendo K compatto per il Teorema 5.11 F è uniformemente continua su K e quindi è uniformemente continua su M.
$\Leftarrow$: Supponiamo che f è uniformemente continua su M ossia $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta_\varepsilon > 0\, t.c.\, |x-x'| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(x')| < \varepsilon$. Usiamo ora tale nozione per definire la F. Infatti se $y \in K \backslash M$, essendo $\overline{M} = K$, esiste una successione $\{x_k\}$ che tende ad y e $x_k \in M$. Essendo x_k convergente $\forall\, \varepsilon'\, \exists\, N_{\varepsilon'}\, t.c.\, \forall\, k \geq 0\; |x_{k+N_{\varepsilon'}} - x_k| < \varepsilon'$ e quindi $|f(x_{k+N_{\varepsilon'}}) - f(x_k)| < \varepsilon$ non appena $\varepsilon' < \delta_\varepsilon$. Se ne deduce che $\{f(x_k)\}$ è una successione di Cauchy in $\mathbf{R}$ e quindi converge per cui esiste il $\lim_{k\to+\infty} f(x_k)$ e si definisce proprio $f(y) \doteq \lim_{k\to+\infty} f(x_k)$. La definizione è consistente se il limite non cambia cambiando successione $\{x_k\}$ e questo è vero (verificare) essendo f continua. Per costruzione F è continua su K per cui è uniformemente continua su K e quindi f è uniformemente continua su M.
Bisogna notare come essenziale sia l'ipotesi di uniforme continuità di f su M. Ad esempio se prendiamo la funzione $f\colon(1,2) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ si può applicare il risultato dell'esercizio dove $M = (1,2)$ $K = [1,2]$ $F(x) = \frac{1}{x}$ per $x \in K$. Se però prendiamo la stessa funzione ma definita in $(0,1)$ allora in questo caso non è possibile estendere il risultato dell'esercizio.

32.5** Per risolvere l'esercizio bisogna saper cosa è una serie numerica convergente. Ad ogni modo per quanto concerne la continuità bisogna che $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta_\varepsilon\, t.c.\, |t-t'| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(t)-f(t')| < \varepsilon$ e quindi dobbiamo risolvere la disequazione $|f(t) - f(t')| = |\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t_{n_k} - t'_{n_k}}{10^k}| < \varepsilon$. Essendo $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = 1$ ed essendo $|t_i - t_j| < 9$ per ogni coppia di interi i, j, se $\varepsilon \geq 1$, δ può essere qualsiasi numero reale positivo. Se invece $\varepsilon < 1$ allora essendo $|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t_{n_k} - t'_{n_k}}{10^k}| \leq |\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t_k - t'_k}{10^k}|$ basta prendere $\delta_\varepsilon = \varepsilon$ per avere il risultato. Dunque la funzione f è continua laddove è definita e non è ben definita nei punti il cui sviluppo decimale è 9-periodico ossia nei punti del tipo $t = 0, t_1 t_2 \ldots t_p \overline{9}$ e $t_p \neq 9$. Infatti sia dato il punto $t = 0, t_1 t_2 \ldots t_p \overline{9} \doteq 0, t_1 t_2 \ldots t_p + 1$. Ora se $p \notin \{n_k\}$ succede che $f(0, t_1 t_2 \ldots t_p \overline{9}) = 0, t_{n_1} t_{n_2} t_{n_3} \ldots t_{n_p} \overline{9}$ dove $n_p < p$. Invece $f(0, t_1 t_2 \ldots t_p + 1) = 0, t_{n_1} t_{n_2} t_{n_3} \ldots t_{n_p}$ ed i due numeri sono chiaramente diversi. Se fosse $p \in \{n_k\}$ allora si avrebbe $f(0, t_1 t_2 \ldots t_p \overline{9}) = 0, t_{n_1} t_{n_2} t_{n_3} \ldots t_p \overline{9}$ ed inoltre $f(0, t_1 t_2 \ldots t_p + 1) = 0, t_{n_1} t_{n_2} t_{n_3} \ldots t_p + 1$ ed i due numeri sono chiaramente uguali.

33.5*** Supponiamo che esista una funzione f discontinua su $\mathbf{Q}^c$ e continua sui razionali. Dall'esercizio **4.5***** sappiamo che per essere possibile ciò bisogna scrivere $\mathbf{Q}^c$ come unione al più numerabile di insiemi chiusi ossia deve esistere una collezione numerabile di insiemi chiusi $\{F_n\}$ tale che $\mathbf{Q}^c = \cup_n F_n$. Del resto se indichiamo con $\{r_i\}$ l'insieme dei razionali si può scrivere $\mathbf{R} = (\cup_{r_i} r_i) \cup (\cup_n F_n)$. Essendo $\mathbf{Q}$ privo di punti isolati, ciascun elemento r_i è non denso in alcun punto e quindi, data l'assunzione da prendere per buona, se ne conclude che almeno uno degli F_n deve essere denso in almeno un punto di $\mathbf{R}$. Dato l'esercizio **21.1.5**, essendo F_n chiuso, si avrebbe che F_n ha interno non vuoto. Ma questo fatto è impossibile poiché ci sono i razionali densi. La contraddizione si risolve ammettendo che è impossibile la ipotesi ossia che esista una funzione con le caratteristiche date. Per una dimostrazione diversa si veda la **Appendice 1**

34.5 La derivata della funzione è strettamente positiva essendo $\cos 2\pi x + 3x^2 + 2 + e^{-x}$ e quindi la funzione è monotona crescente strettamente. Ciò automaticamente implica che esiste una sola soluzione della equazione data. Essendo poi $f(\frac{1}{2})=\frac{3\sqrt{e}-8}{8\sqrt{e}}<0$ e $f(1)=3-\frac{1}{e}>0$ ne consegue che la soluzione verifica la relazione $\frac{1}{2}<x<1$ e quindi la conosco con un errore più piccolo di $0,5$.

36.5 Per il Teorema del confronto fra limiti si ha $0\leq\lim_{x_1\to x_2}\frac{|f(x_1)-f(x_2)|}{|x_1-x_2|}\leq\lim_{x_1\to x_2}C|x_1-x_2|^{\alpha}=0$ essendo α positiva e quindi f è costante.

37.5 Per il Teorema di Lagrange si ha $f(x+h)-f(x)=f'(\xi)h$ con $x+\frac{h-|h|}{2}<\xi<x+\frac{h+|h|}{2}$. Facendo il limite di $x\to+\infty$ si ottiene che $\xi(x)$ tende pure esso a $+\infty$ e quindi si ha zero come risultato per ipotesi.

38.5* Bisogna usare il Teorema di Lagrange ed il fatto che una funzione continua su un compatto è uniformemente continua. Precisamente si ha $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=f'(c)$ con $x_1+\frac{x-x_1-|x-x_1|}{2}<c<x_1+\frac{x-x_1+|x-x_1|}{2}$ per il Teorema di Lagrange e dunque $|f'(x_1)-\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}|=|f'(x_1)-f'(c)|$. Ora, essendo f' continua in $[a,b]$ per ipotesi, si può dire che $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon\ t.c.\ |x-y|<\delta_\varepsilon\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. Se prendiamo x_1 al posto di y abbiamo il risultato.

39.5 Il dominio della funzione è tutta la retta. Essendo $|x_1+e\sin x_1-x_2-e\sin x_2|\geq|x_1-x_2|-e|\sin x_1-\sin x_2|\geq|x_1-x_2|(1-e)$ si ha che per $0<e<1$ la funzione è certamente iniettiva e dunque invertibile. Si può ugualmente osservare che la derivata della funzione è data da $1+e\cos x>0$ se $0<e<1$. Se $e=1$ la funzione è monotona crescente ed ugualmente invertibile. Se $e>1$, essendo la derivata sia positiva che negativa, la funzione non è invertibile *su tutto* $\mathbf{R}$. Naturalmente nulla vieta di invertire la funzione su sottoinsiemi di $\mathbf{R}$ dove la funzione è monotona (crescente o decrescente).

40.5 - Primo del gruppo - Si prenda ad esempio $f(x)=x$ se $x\leq0$ mentre $f(x)=x+1$ se $x>0$

40.5 - Secondo del gruppo - Si prenda $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ se $x\neq0$ e $f(0)=0$.

41.5 Sia $\xi=\min_{1\leq i\leq n}f(x_i)$ e $\eta=\max_{1\leq i\leq n}f(x_i)$. È evidente che $\xi\leq\frac{1}{n}[f(x_1)+\dots f(x_n)]\leq\eta$. Essendo f continua la sua immagine è costituita da un intervallo che contiene l'intervallo $[\xi,\eta]$ e quindi esiste x_o che verifica la tesi del problema.

42.5 $f(x)=\sin\frac{1}{x}\ f(0)=$ qualsiasi valore

43.5 Il polinomio ha chiaramente 0 come radice. Avendo anche x_o per ipotesi, ne segue che, essendo la funzione derivabile, vi è un punto x_1 tale $0<x_1<x_o$ in cui la derivata prima del polinomio è nulla. Il secondo polinomio è esattamente la derivata del primo....

44.5* Useremo la notazione $\underline{x}\in\mathbf{R}^n$ per indicare un punto in $\mathbf{R}^n$. Bisogna mostrare che $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon\ t.c.\ \rho(\underline{x},\underline{x}')<\delta_\varepsilon\Rightarrow|\rho(\underline{x},\underline{x}_o)-\rho(\underline{x}',\underline{x}_o)|<\varepsilon$
Dalla disuguaglianza $\rho(\underline{x},\underline{y})\leq\rho(\underline{x},\underline{z})+\rho(\underline{z},\underline{y})$ segue che $\rho(\underline{x},\underline{y})\leq\rho(\underline{x},\underline{z})+\rho(\underline{z},\underline{v})+\rho(\underline{v},\underline{y})$ e $\rho(\underline{x},\underline{y})\leq\rho(\underline{x},\underline{z})+\rho(\underline{x},\underline{y})+\rho(\underline{y},\underline{v})$ e quindi $\rho(\underline{x},\underline{y})-\rho(\underline{z},\underline{v})\leq\rho(\underline{x},\underline{z})+\rho(\underline{v},\underline{y})$, $\quad -\rho(\underline{x},\underline{y})+\rho(\underline{z},\underline{v})\leq\rho(\underline{x},\underline{z})+\rho(\underline{v},\underline{y})$
e quindi $|\rho(\underline{x},\underline{y})-\rho(\underline{z},\underline{v})|\leq\rho(\underline{x},\underline{z})+\rho(\underline{v},\underline{y})$. Prendendo ora $\underline{v}=\underline{y}$ si ottiene $|\rho(\underline{x},\underline{y})-\rho(\underline{z},\underline{y})|\leq\rho(\underline{x},\underline{z})$ ossia il risultato della continuità della distanza.

Per quanto riguarda la seconda domanda si vuole dimostrare che $\rho(\underline{x},A)$ (la definizione è contenuta nell'esercizio **13.1.5***) è una funzione continua di $\underline{x}$. Quindi si vuole far vedere che $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon\ t.c.\ \rho(\underline{x},\underline{x}')<\delta_\varepsilon\Rightarrow|\rho(\underline{x},A)-\rho(\underline{x}',A)|<\varepsilon$. Sappiamo per definizione di inf che: 1) $\forall\ \varepsilon'>0\ \exists\ \underline{x}_{\varepsilon'}\in A\ t.c.\ \rho(\underline{x},A)\leq\rho(\underline{x},\underline{x}_{\varepsilon'})<\rho(\underline{x},A)+\varepsilon'$ ossia $\rho(\underline{x},A)>\rho(\underline{x},\underline{x}_{\varepsilon'})-\varepsilon'$

2) $\forall\, \varepsilon' > 0\ \exists\ \underline{x}'_{\varepsilon'} \in A$ *t.c.* $\rho(\underline{x}', A) \leq \rho(\underline{x}', \underline{x}'_{\varepsilon'}) < \rho(\underline{x}', A) + \varepsilon'$ ossia $\rho(\underline{x}', A) > \rho(\underline{x}', \underline{x}'_{\varepsilon'}) - \varepsilon'$.
Ne consegue che $\rho(\underline{x}, \underline{x}_{\varepsilon'}) - \varepsilon' - \rho(\underline{x}', \underline{\tilde{y}}) \leq \rho(\underline{x}, A) - \rho(\underline{x}', A) \leq \rho(\underline{x}, \underline{y}) - \rho(\underline{x}', \underline{x}'_{\varepsilon'}) + \varepsilon'$. per ogni $\underline{y} \in A$ e $\underline{\tilde{y}} \in A$. Se ora scegliamo $\underline{y} = \underline{x}'_{\varepsilon'}$ e $\underline{\tilde{y}} = \underline{x}_{\varepsilon'}$ si ottiene $\forall\, \varepsilon > 0$ si ha $|\rho(\underline{x}, A) - \rho(\underline{x}', A)| \leq \min\{|\rho(\underline{x}, \underline{x}_{\varepsilon'}) - \varepsilon' - \rho(\underline{x}', \underline{\tilde{y}})|, |\rho(\underline{x}, \underline{y}) - \rho(\underline{x}', \underline{x}'_{\varepsilon'}) + \varepsilon'|\}$ e quindi $|\rho(\underline{x}, A) - \rho(\underline{x}', A)| \leq \rho(\underline{x}, \underline{x}') + \varepsilon'$ da cui $|\rho(\underline{x}, A) - \rho(\underline{x}', A)| \leq \rho(\underline{x}, \underline{x}')$ ossia la continuità.
Sia ora A compatto e B chiuso. Da quanto appena dimostrato si ha $\rho(x, B) > 0$ in quanto B è chiuso. Supponiamo ora che $\inf_{x\in A} \rho(x, B) = 0$. Poiché A è compatto e la distanza da un insieme è una funzione continua del punto tale estremo inferiore è un minimo e quindi è assunto in un punto che chiamiamo $\xi \in A$. Lo stesso punto deve però appartenere a B da cui la contraddizione

45.5* Prima di tutto verifichiamo che se manca una delle ipotesi allora l'affermazione non vale.
1) $f\colon \mathbf{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x^2$ è limitata e continua ma non è uniformemente continua non essendo monotona. Se invece si fosse preso $g\colon (a, b) \to [-1, 1]$, $g(x) = \sin x^2$ $(-\infty < a$ e/o $b < +\infty)$ allora sarebbe stata uniformemente continua pur continuando a non essere monotona. Infatti l'affermazione dell'esercizio non va letta in senso inverso ossia che *se la funzione è uniformemente continua su (a, b) allora è monotona, continua e limitata*
2) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $f(x) = x^3$ è monotona e continua ma non uniformemente continua non essendo limitata.
3) $f(x) = 0$ per $x \leq 0$ e $f(x) = 1$ per $x > 0$ è monotona e limitata ma non uniformemente continua sul suo dominio $\mathbf{R}$ non essendo continua in $x = 0$

Supponiamo che la funzione sia monotona non decrescente. Supponiamo inoltre che $-\infty < a$ e $b < +\infty$. Dimostriamo che esiste $\lim_{x\to b_-} f(x) \doteq l^+$ e $\lim_{x\to a_+} f(x) \doteq l^-$. Usiamo ora l'esercizio **31.5**. La corrispondenza è data da $K = [a, b]$, $M = (a, b)$. Definiamo
$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (a, b) \\ l^+ & x = b \\ l^- & x = a \end{cases}$$
F è continua in $[a, b]$ per costruzione e $F(x)|_{x\in(a,b)} = f(x)$ (F è il prolungamento della funzione f a tutto $[a, b]$). Dall'esercizio **31.5** segue che f è uniformemente continua su $a, b)$.
Dobbiamo dimostrare che esiste $\lim_{x\to b_-} f(x) \doteq l^+$. La dimostrazione si può trovare al `Teorema 4.7` del libro di testo.

Supponiamo ora che $b = +\infty$ (a come prima). Dal `teorema 4.7` segue che la funzione ha un asintoto orizzontale di equazione $y = l^+$. Grazie a ciò la funzione è uniformemente continua sull'insieme $(a, +\infty)$.

46.5 Sia $y = f(x)$ la curva. La retta tangente in un punto $M = (x_o, f(x_o))$ è $y = y_o + f'(x_o)(x - x_o)$ e la retta richiesta è $y = f'(x_o)(x - x_o)$. La retta parallela all'asse y e passante per M è $x = x_o$ per cui il luogo dei punti richiesto è dato dai punti del piano le cui coordinate sono date da $(x_o, x_o f'(x_o))$ ossia sono descritti dal grafico della funzione $y = xf'(x)$ dove però la x che compare deve far parte del dominio della $f(x)$ e della $f'(x)$ ed in generale quindi non potrà assumere qualsiasi valore.

47.5* Cominciamo a supporre che $I = [a, b]$. Si dimostra per assurdo. Supponiamo che l'insieme in questione sia non numerabile. Innanzitutto si dimostra che in ogni punto di I esiste il limite destro e sinistro e quindi la discontinuità può essere solo di salto o eliminabile. Per questo si fa uso della monotonia e tralasciamo la dimostrazione. Dunque assumiamo che vi sia una infinità non numerabile di salti nell'intervallo I. Ordiniamo i salti nel seguente modo: S_1 è l'insieme dei salti maggiori od uguali ad 1, S_2 è l'insieme dei salti minori di 1 e maggiori od oguali ad $\frac{1}{2}$, S_3 è l'insieme dei salti minori di $\frac{1}{2}$ e maggiori od oguali ad $\frac{1}{3}$, e via dicendo.

Chiaramente almeno un S_k conterrà una infinità non numerabile di salti ed essendo la funzione monotona la somma dei salti è $+\infty$ che costituisce un assurdo in quanto $Im(f) \subset [f(a), f(b)]$.
Supponiamo ora che $I = (a,b)$. I può scriversi come unione *numerabile* di intervalli chiusi e quindi se le discontinuità sono in quantità non numerabile vuol dire che almeno uno degli intervalli chiusi contiene una infinità non numerabile di discontinuità. In tal caso si ripete il ragionamento precedente.

49.5** Sia $K_i = \{x \in E \colon dist(x, \partial E) \geq \frac{1}{i}\} \cap \{x \colon |x| \leq i\}$. È chiaro che: $1) K_i \subseteq K_{i+1}$ $2) K_i$ è compatto in quanto insieme chiuso e limitato. È limitato poiché è sottoinsieme dell'insieme $\{x \, ||x| \leq i\}$ che è limitato. È chiuso essendo intersezione di due chiusi. Il secondo è chiuso essendo la sfera chiusa standard. Il primo è chiuso essendo la controimmagine dell'intervallo $[\frac{1}{i}, +\infty)$ attraverso la funzione continua costituita dalla distanza (di un punto da un insieme; vedi esercizio **44.5***). Che l'intervallo $[\frac{1}{i}, +\infty)$ sia chiuso lo si evince prendendo il complementare $(-\infty, \frac{1}{i})$ che è chiaramente aperto.

50.5* Se $f'(a) > f'(b)$ (la disuguaglianza opposta si studia analogamente) consideriamo un punto $z \in (f'(b), f'(a))$ e la funzione $g(x) = zx - f(x)$. g è derivabile così come la f ed inoltre $g'(a) = z - f'(a) < 0$ e $g'(b) = z - f'(b) > 0$. Questo implica che la $g(x)$ deve avere un minimo in un punto interno $x_o \in (a,b)$. Per il `Teorema 6.6` $g'(x_o) = 0$ e quindi $f'(x_o) = z$ come dovevasi dimostrare.
Supponiamo ora che $c = f'(a) = f'(b) \equiv f'(x)$. In tal caso c'è poco da dire.
Se invece $f'(a) = f'(b) \not\equiv f'(x)$ vuol dire che c'è un punto $\xi \in (a,b)$ tale che $f'(\xi) \neq f'(a)$. Si possono allora applicare le considerazioni precedenti agli intervalli (a, ξ) e (ξ, b) da cui il risultato.

La proprietà di verificare tale tesi è tipica delle funzioni continue, si veda il `Corollario 5.2` del libro di testo. Il viceversa non è vero ossia una funzione discontinua può verificare o meno il teorema. Si prenda ad esempio la funzione che vale 0 per $x \leq 0$ e 1 per $x > 0$ (discontinuità di salto). In tal caso la funzione non verifica la proprietà. D'altro canto la funzione $f(x) = \begin{cases} x-1 & 0 \leq x \leq 2 \\ x+1 & -2 \leq x < 0 \end{cases}$ (sempre discontinuità di salto) verifica la proprietà . Anche la funzione dell'esercizio **42.5**** è discontinua nell'origine come la precedente ma verifica la tesi del libro di testo. In tal caso si ha una discontinuità di seconda specie.

51.5** Per la funzione $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ si prenda $a = 0$. $f(0) = f'(0) = 0$ (verificare). La funzione è rappresentabile come dice il testo dell'esercizio con $B = 0$; infatti $f(0+h) = f(0) + f'(0)h + \frac{1}{2}Bh^2 + o(h^2) = o(h^2) = h^3 \sin \frac{1}{h}$. Nonostante ciò la derivata seconda della funzione non esiste. Tale esercizio dimostra che ipotesi e tesi del `Teorema 6.16` non possono essere invertite. Per quanti fossero interessati è vero il seguente teorema: "*Se una funzione ammette nell'insieme $V \equiv \{|x-a| < r\}$ $(a > 0)$ la rappresentazione $f(x+h) = f(x) + a_1(x)h + a_2(x)h^2 + R_2(x;h)$ dove $a_1(x)$ e $a_2(x)$ sono funzioni continue e limitate in V ed inoltre R_2 verifica la proprietà: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|R_2(x;h)| < \varepsilon |h|^2$ per ogni $x \in V$ e $|h| < \delta$. Allora $f(x)$ è derivabile due volte e $f'(x) = a_1(x)$, $f''(x) = \frac{1}{2}a_2(x)$.* Tale teorema può trovarsi in G.E.Šilov "Analisi Matematica Funzioni di più Variabili" Edizioni Mir. Naturalmente tale teorema non si applica alla funzione f con $a = 0$. Perché?
Risposta. Quello che manca è la limitatezza (e la continuità) di $a_2(x)$. Infatti se $x \neq 0$ allora $a_2(x)$ è la derivata seconda. La derivata prima è $f'(x) = a_1(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin \dfrac{1}{x} - x \cos \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

per cui $a_2(x) = \begin{cases} 2(6x\sin\frac{1}{x} - 4\cos\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.È del tutto evidente che $a_2(x)$ è non–limitata e non continua.

52.5** Per la prima funzione la derivata prima è $f'(x) = \begin{cases} 2x\sin^2\frac{1}{x} - \cos\frac{2}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ e per $x \to 0$ assume valori sia positivi che negativi o nulli. Del resto che $x = 0$ sia un minimo è evidente dal fatto che $f(x) \geq 0$ per ogni x. Il minimo è assoluto.
Per la seconda funzione si dimostra che $\frac{1}{2}x^2 \leq f(x) \leq x^2$ per cui $x = 0$ è un minimo locale forte (assoluto in questo caso) e la derivata prima è data da
$f'(x) = \begin{cases} x + x\sin^2\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\sin\frac{2}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ e per $x \to 0$ assume valori sia positivi che negativi.

54.5 Se f è derivabile anche $f \circ f$ lo è in $f(x)$ ed è facile da dimostrare. Viceversa la funzione f_2 dell'esercizio **5.5** non è derivabile in nessun punto ma composta con se stessa diventa derivabile in ogni punto.

55.5 Siano $y_o = f(x_o)$, $y_1 = f(x_1)$ e supponiamo che $y_o < y_1$. Per definizione esiste l'insieme $U_o \stackrel{\text{def}}{=} (x_o - \delta_o, x_o + \delta_o) \backslash \{x_o\} \subset (a,b)$ $\overline{U}_o \not\ni x_1$ tale che $f(x) < y_o$ per $x \in U_o$. Sia $M_o = \min_{x \in [x_o, x_1]} f(x)$; tale minimo certamente esiste dal `Teorema 5.8` del libro di testo in quanto f è continua e $[x_o, x_1]$ è chiuso e limitato. Per il *Teorema dei valori intermedi* `Teorema 5.2` del libro di testo esiste ξ_o tale che $M_o = f(\xi_o)$. Inoltre dal fatto che il massimo y_o è forte segue che $M_o = f(\xi_o) < y_o$. Dunque abbiamo la situazione per cui $f(\xi_o) < f(x_o) = y_o < f(x_1) = y_1$, $x_o < \xi < x_1$ e quindi la funzione ha in $\xi \in [x_o, x_1]$ il minimo cercato. Dal `Teorema 6.6` segue tra l'altro che la derivata in ξ_o vale zero.

57.5*** Sia ξ algebrico di grado n e sia $P(x)$ un polinomio di grado n tale che $P(\xi) = 0$. Se $|\xi - \frac{p}{q}| > 1$ allora certamente vale la relazione $|\xi - \frac{p}{q}| > \frac{1}{Mq^n}$ essendo M un intero opportuno. Sia $\max_{|x-\xi| \leq 1} |P'(x)| \leq M$. Il teorema di Lagrange ci dice che $|P(x)| = |P(x) - P(\xi)| = |P'(\eta)| \cdot |x - \xi| \leq M|x - \xi|$ non appena $|x - \xi| \leq 1$. Sia ora dato il numero razionale $\frac{p}{q}$. Supponiamo quindi che $|\xi - \frac{p}{q}| \leq 1$. Dalla relazione precedentemente scritta si ricava che $|P(\frac{p}{q})| \leq M|\xi - \frac{p}{q}|$ e quindi $|q^n P(\frac{p}{q})| \leq Mq^n|\xi - \frac{p}{q}|$. $P(\frac{p}{q}) \neq 0$ perchè altrimenti si potrebbe scrivere $P(x) = (x - \frac{p}{q})\tilde{P}(x)$ con $\tilde{P}(\xi) = 0$ ed il grado di $\tilde{P}$ è $n - 1$. Ne segue che $|q^n P(\frac{p}{q})|$ è un intero e quindi il risultato.

58.5*** Se $n \leq 2$ si utilizza la proposizione 2 dell'esercizio **1.5*****. Le considerazioni preliminari sono le stesse dell'esercizio **6.5****. Infatti abbiamo una successione di frazioni $\{\frac{m_i}{n_i}\}$ tali che $|\lambda - \frac{m_i}{n_i}| < \frac{1}{n_i^2}$ e quindi ripetendo il discorso si avrebbe $|\frac{f(x+h_i)-f(x)}{h_i}| \geq \frac{1}{(n_i)^n}(n_i)^2 \geq 1$ dove $x \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ e $x + h_i = \frac{m_i}{n_i} \in \mathbf{Q}$. Tale fatto automaticamente implica che la funzione non è derivabile.
Sia ora $n \geq 3$. Sia ξ un irrazionale algebrico di grado k. $|\frac{f(\xi+h_i)-f(\xi)}{h_i}| \leq \frac{1}{(n_i)^n}M(n_i)^k \geq 1$ dove $x \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ e $x + h_i = \frac{m_i}{n_i} \in \mathbf{Q}$. Se $n - k > 0$ (da cui $-1 \geq k \geq 2$ allora il limite è zero).

È chiaro che la funzione non è derivabile sui numeri di *Liouville* qualunque sia n.

62.5*** Per definizione sappiamo che $f(x + 2k\pi) = f(x + 2k\pi\omega) = f(x)$ per ogni k. Ora utilizzando la Proposizione dell'esercizio **31.7***** si ha che $\{(x,y) \in \mathbf{T}^2 : x = \xi + 2k\pi,\ y = \xi + 2k\pi\omega\}$ è denso e quindi su ciascun punto la funzione vale $f(\xi)$. La continuità vuole che $f \equiv f(\xi)$

63.5*** La funzione è monotona strettamente crescente in quanto se $x < y$ allora nell'intervallo (x, y) vi sono infiniti razionali e quindi $f(x) < f(y)$. Nei punti $x = r_j$ la funzione ha dei salti pari a r_j ed è continua a sinistra mentre è discontinua a destra. Dimostriamo che ha dei salti. Consideriamo infatti $f(x)$ per $x \leq r_j$. Abbiamo $f(x) = \sum_{k:r_k<r_j} a_k$. Se $x > r_j$ abbiamo $\sum_{k:r_k<x} a_k$. Mandando ora $x \to r_j$, dalla somma vanno via tutti i termini a_k che corrispondono a $r_k > r_j$. Rimangono quelli per cui $r_k < r_j$ e $k = j$ in quanto se $x > r_j$ allora nella somma a_j vi è sempre. La differenza fra le due somme è esattamente a_j. Tale ragionamento evidenzia come la funzione sia continua a sinistra e discontinua a destra. Dimostriamo ora che nei punti $x_o \notin \{r_k\}$ la funzione è continua. Consideriamo un intervallo $(x_o - \delta, x_o + \delta)$ e sia $x \in (x_o, x_o+\delta)$. $f(x) - f(x_o) = \sum_{k:x_o<r_k<x} a_k$ e $\forall\, n\; \exists\, x_n > x_o$: $x_o < r_k < x < x_n \Rightarrow\; k > n$. In altre parole i valori di k coinvolti sono "grandi quanto si vuole." Ne segue che, essendo la serie $\sum a_k$ convergente, $\forall\, \varepsilon\; \exists\, n_\varepsilon\, :\, k > n_\varepsilon\; \Rightarrow \sum_{k>n_\varepsilon} a_k < \varepsilon$ da cui la continuità . Il limite $x \to x_o^-$ è la stessa cosa.

Se si fosse definita $f(x) \stackrel{\rm def}{=} \sum_{k:r_k\leq x} a_k$ allora sarebbe stata continua a destra e discontinua a sinistra.

Va notata comunque la profonda differenza fra la funzione data e quella dell'esercizio **6.5****. Quest'ultima ha sugli irrazionali dei punti di discontinuità di seconda specie mentre la prima ha dei salti.

64.5** Supponiamo che x sia un punto in cui esiste $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = l \in \mathbf{R}$ e quindi la successione $\{f_n(x)\}$ è di Cauchy: $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, n_{\varepsilon,x} : n > n_{\varepsilon,x}\;, m > n_{\varepsilon,x}\; \Rightarrow\; |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Tale relazione è equivalente a dire che $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, n_{\varepsilon,x}$: $n > n_{\varepsilon,x}\;, m \geq 1 \quad \Rightarrow \quad |f_n(x) - f_{n+m}(x)| < \varepsilon$. A sua volta tale relazione *implica* la seguente $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, n_{\varepsilon,x},\; \exists\, n_o > n_{\varepsilon,x}$: $m \geq 1 \quad \Rightarrow \quad |f_{n_o}(x) - f_{n_o+m}(x)| < \varepsilon$. Se ora consideriamo la successione $\{\varepsilon_k = \frac{1}{k}\}$, abbiamo che $x \in \cap_{k=1}^\infty \cup_{n=1}^\infty \cap_{m=1}^\infty \{x \in E : |f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \frac{1}{k}\}$.

Dobbiamo ora far vedere il viceversa ossia assumere che $x \in \cap_{k=1}^\infty \cup_{n=1}^\infty \cap_{m=1}^\infty \{x \in E : |f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \frac{1}{k}\}$ e far vedere che $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, n_{\varepsilon,x,}$: $n > n_{\varepsilon,x},\; m \geq 1 \quad \Rightarrow \quad |f_n(x) - f_{n+m}(x)| < \varepsilon$. Prendiamo $\frac{1}{k} < \frac{1}{2\varepsilon}$. In corrispondenza a k vi è n_k nella relazione $x \in \cap_{k=1}^\infty \cup_{n=1}^\infty \cap_{m=1}^\infty \{x \in E : |f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \frac{1}{k}\}$ e quindi $|f_{n+m}(x) - f_{n+m'}(x)| < \frac{2}{k} < \varepsilon$ con $m, m' \geq 1$. Ma allora prendiamo $n_\varepsilon = n_k$ e il risultato è ottenuto

Studiamo ora i punti di non derivabilità . Sia $H \stackrel{\rm def}{=} \cup_{k=1}^\infty \cap_{n=1}^\infty \{x \in E :\; \exists\; y, z \in (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \cap E \backslash \{x\}$: $|\frac{f(y)-f(x)}{y-x} - \frac{f(z)-f(x)}{z-x}| \geq \frac{1}{k}\}$ (che riscriviamo come $H \stackrel{\rm def}{=} \cup_{k=1}^\infty \cap_{n=1}^\infty A_{k,n}$). Basta ricordarsi che il simbolo di intersezione si traduce in "per ogni" mentre unione in "esiste" e tenere presente l'esercizio **31.7**. Va notato $\cap_{n=1}^\infty A_{k,n} = \cap_{n=k}^\infty A_{k,n}$. Infatti $\cap_{n=1}^\infty A_{k,n} \subset \cap_{n=k}^\infty A_{k,n}$ avendo la prima intersezione più elementi. D'altra parte se una coppia y, z appartiene a $A_{k,n}$ allora appartiene anche a $A_{k,n'}$ con qualsiasi $n' > n$ in quanto l'intervallo $(x - \frac{1}{n'}, x + \frac{1}{n'})$ è contenuto in $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$

L'insieme dei punti di derivabilità è $H^c \stackrel{\rm def}{=} \cap_{k=1}^\infty \cup_{n=k}^\infty \{x \in E :\; y, z \in (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \cap E \backslash \{x\} : \Rightarrow$ $|\frac{f(y)-f(x)}{y-x} - \frac{f(z)-f(x)}{z-x}| < \frac{1}{k}\}$. Il fatto che n cominci da k è essenziale in quanto, in generale, più piccolo diventa k e più stretto diventa l'intervallo $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ con le caratteristiche date.

65.5** Supponiamo che $D^+ f(x) \geq 0$ tranne al più un insieme numerabile di punti e supponiamo che esistano due punti x_0 e x_1 tale che $x_0 < x_1$ e $f(x_0) > f(x_1)$. Consideriamo allora la funzione $f|_{[x_0,x_1]}(x)$ che indichiamo ancora con f per brevità . Dal **Teorema 5.10.2** sappiamo che su di un sottoinsieme non–numerabile di $[x_0, x_1]$ si ha la relazione $D^+ f(x) \leq C$ per qualsiasi numero C tale che $C > \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$. Ora $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} < 0$ per cui possiamo prendere un valore di C negativo e dire che $D^+ f(x) \leq C < 0$ su di un insieme non–numerabile di punti contenuti all'interno dell'intervallo $[x_0, x_1]$. Questo è in contrasto con l'ipotesi iniziale e la contraddizione si risolve dicendo che la funzione non può essere avere due punti rispetto ai quali la funzione è decrescente. Usare le altre derivare del Dini per avere il risultato è immediato.

Per una funzione non continua si prenda ad esempio la funzione $\mathcal{X}_{\mathbf{Q}}\colon[0,1]\to\{0,1\}$; $f(0)=f(1)=1$. Se $x\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ si ha $\overline{\lim}_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=+\infty$ e quindi è violata la conclusione del teorema. Gli altri limiti non violano le conclusioni del teorema in quanto abbiamo $x\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}\ \Rightarrow\ \overline{\lim}_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=-\infty$ mentre $x\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}\ \Rightarrow\ \underline{\lim}_{h\to 0^\pm}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$

66.5** Definiamo la funzione $g(x)=f(x)-f(a)-(x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Essa è derivabile in (a,b) (agli estremi a e b ha solamente derivate destre e sinistre). $g(a)=0=g(b)$ e quindi esiste $\xi\in(a,b)$ in cui la funzione ha un estremo (supponiamo un massimo) di ascissa positiva ($g(\xi)>0$) da cui $g'(\xi)=0$. Applichiamo ora il Teorema di Lagrange all'intervallo (ξ,b) ottenendo che $\frac{g(b)-g(\xi)}{\xi-b}=\frac{-g(\xi)}{b-\xi}=g'(\eta)<0$ dove $\eta\in(\xi,b)$. Nell'intervallo $[\xi,\eta]$ la funzione $g'(x)$ passa dal valore $g'(\xi)=0$ al valore $g'(\eta)<0$. La derivata di una qualsiasi funzione verifica la proprietà di Darboux (vedi l'esercizio **50.5***) e quindi $g'(x)$ assume tutti i valori (una infinità non–numerabile) compresi fra $g'(\xi)=0$ e $g'(\eta)<0$. Ne segue che esiste una infinità non–numerabile di punti x in cui $0\geq g'(x)\in[g'(\eta),0]$. Ora $g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq 0$ ossia $f'(x)\leq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq C$

69.5*** Dimostriamo che la funzione data è tale che $f'(\frac{1}{n})=1$ ma che $|f|(x)$ non è mai derivabile. $f'(\frac{1}{n})=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(f(\frac{1}{n}+h)-f(\frac{1}{n}))=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}f(\frac{1}{n}+h)$. Ci sono due possibilità . La prima è che $\frac{1}{n}+h\in\mathbf{Q}$ e la seconda è che $\frac{1}{n}+h\in\mathbf{Q}^c$. Nel primo caso, per h positiva e sufficientemente piccola abbiamo $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}f(\frac{1}{n}+h)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\rho(\frac{1}{n}+h,\frac{1}{n})=1$. La stessa cosa accade se h è negativo. Nel secondo caso si ha, per h positivo e piccolo, $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}f(\frac{1}{n}+h)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\rho(\frac{1}{n}+h,\frac{1}{n})+\rho^2(\frac{1}{n}+h,\frac{1}{n}))=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(h+h^2)=1$ ed analogamente se h è negativo e piccolo in modulo.

Dimostrare che $|f|$ non è derivabile è immediato. Nei punti $x\neq\frac{1}{n}$ si ha $|f|=\pm f$ e f non è continua quindi neppure derivabile. Nei punti $x=\frac{1}{n}$ abbiamo $f'(\frac{1}{n})=1$, $f(\frac{1}{n})=0$ e quindi $|f|$ non può essere derivabile.

• Sia $W(x)\colon[0,1]\to\mathbf{R}$ una funzione con le seguenti caratterisiche: 1) $0\leq W(x)\leq 1$, 2) continua 3) non derivabile. L'esistenza di tale funzione è dimostrata nella appendice sulle funzioni non derivabili. Definiamo la funzione $W(x;a,b)=W(\frac{x-a}{b-a})\colon[a,b]\to\mathbf{R}$ e poi la funzione $Z(x;a,b)=\frac{(x-a)(b-x)}{b-a}+(x-a)^3(b-x)^3W(x;a,b)$ che ha le caratteristiche: 1) è continua, 2) derivabile in $x=a$, $x=b$ e $Z'(a)=-Z'(b)=1$, 3) non derivabile in (a,b). Per $n\geq 2$ definiamo $a_n=2^{-n}$ e quindi

$$\tilde f(x)=\begin{cases}-Z(x;\dfrac{1}{2}(a_{n-1}+a_n),a_{n-1}) & 3a_{n+1}\leq x\leq a_{n-1}\\[2ex] Z(x;a_n,\dfrac{1}{2}(a_{n-1}+a_n)) & a_n\leq x\leq 3a_{n+1}\end{cases}\qquad\text{e poi}$$

$$f(x)=\begin{cases}\tilde f(x) & 0\leq x\leq 1\\ -\tilde f(-x) & -1\leq x\leq 0\end{cases}$$

$f(x)$ è continua in quanto $\tilde f(0)=0$ e inoltre $\tilde f$ è continua dappertutto. Abbiamo $f'(a_n)=1$. Inoltre $|f|$ non è derivabile in nessun punto. Infatti se $x\notin\{a_n\}\backslash 0$, allora la funzione $f(x)$ non è derivabile e quindi neanche $|f|$ essendo $f(x)$ positiva o nulla. In $x=0$ $f(x)$ è derivabile. Infatti si ha $\dfrac{1}{h}(f(h)-f(0))=\dfrac{f(h)}{h}$ e supponiamo che $h>0$ $3a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_{n-1}+a_n)\leq h\leq a_{n-1}$.
$\dfrac{f(h)}{h}=-\dfrac{1}{h}Z(h;\dfrac{1}{2}(a_{n-1}+a_n),a_{n-1})=-\dfrac{1}{h}2^{n+1}(h-\dfrac{3}{2^{n+1}})(\dfrac{1}{2^{n-1}}-h)+(h-\dfrac{3}{2^{n+1}})^3(\dfrac{1}{2^{n-1}}-h)^3W(h;\dfrac{1}{2}(a_{n-1}+a_n),a_{n-1})$. Prendiamo $h_{n-1}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{3}{2^{n+1}})=\dfrac{7}{2^{n+2}}$ e otteniamo

$\dfrac{f(h_{n-1})}{h_{n-1}} = -2^{n+1}\dfrac{2^{n+2}}{7}\dfrac{1}{2^{n+2}}\dfrac{1}{2^{n+2}} + R_{n-1} = -\dfrac{1}{14} + R_{n-1}$ con $\lim\limits_{n\to+\infty} R_{n-1} = 0$. Infatti $|R_{n-1}| = |\dfrac{2^{n+2}}{7}(\dfrac{1}{2^{n+2}}\dfrac{1}{2^{n+2}})^3 W(h_{n-1};\dfrac{1}{2}(a_{n-1}+a_n), a_{n-1})|$

Rifacciamo ora lo stesso calcolo nell'intervallo $[\dfrac{1}{2^n}, \dfrac{3}{2^{n+1}}]$. $\dfrac{f(h)}{h} = \dfrac{1}{h}Z(h; a_n, \dfrac{1}{2}(a_{n-1}+a_n)) = \dfrac{1}{h}2^{n+1}(h - \dfrac{1}{2^n})(\dfrac{3}{2^{n+1}} - h) + (h - \dfrac{1}{2^n})^3(\dfrac{3}{2^{n+1}} - h)^3 W(h; a_n, \dfrac{1}{2}(a_{n-1}+a_n))$. Prendendo $h_n = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{3}{2^{n+1}}) = \dfrac{5}{2^{n+2}}$ si ottiene $\dfrac{f(h_n)}{h_n} = 2^{n+1}\dfrac{2^{n+2}}{5}\dfrac{1}{2^n}(\dfrac{5}{4}-1)\dfrac{1}{2^n}(\dfrac{5}{4}-1) + R_n = \dfrac{1}{10} + R_n$ e quindi la funzione non è derivabile in $x=0$ essendo $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$.

• • Supponiamo che la funzione esista. Sia E l'insieme tale che $\overline{E} \supset (0,1)$ (ad esempio $\overline{E} = [0,1]$). Sia $x \notin E$; $f(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x-x_o) + o(x-x_o) = (x-x_o) + o(x-x_o)$ per definizione di derivabilità e $x_o \in E$. Essendo E denso segue che $\forall\, \varepsilon\ \exists\, x_\varepsilon \in E\ t.c.\ |x - x_\varepsilon| < \varepsilon$ per cui $|f(x)| < 2\varepsilon$ ossia $f(x) = 0$. Ma $f \equiv 0$ vuol dire che $|f|$ è derivabile ovunque e quindi una contraddizione.

70.5 Sia $y \in Im(f) \subseteq \mathbf{R}^n$. Dobbiamo far vedere che se $y_n \to y_o$ allora $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y_o)$. $f^{-1}(y_n) \in K$ per definizione e quindi possiamo estrarre una sottosuccessione $f^{-1}(y_{n_k})$ che converge ad un punto detto x_o. Se estraessimo un'altra sottosuccessione convergente $f^{-1}(y'_{n_k})$, essa convergerebbe allo stesso punto. Supponiamo infatti che $f^{-1}(y'_{n_k}) \to x'_o \neq x_o$. Allora si avrebbe, dalla continuità di f, $y_{n_k} \to f(x_o)$ e $y'_{n_k} \to f(x'_o)$ e se $x_o \neq x'_o$, dalla iniettività della f deve essere $f(x_o) \neq f(x'_o)$. Ma questo è impossibile in quanto y_{n_k} e y'_{n_k} sono ambedue sottosuccessioni di una successione convergente per ipotesi e quindi se convergono devono convergere allo stesso punto. Resta da far vedere ora che $f^{-1}(y_o) = x_o$. Se così non è allora $y_o \neq f(x_o)$ e quindi $\lim_{n\to+\infty} y_n \neq f(\lim_{k\to+\infty} f^{-1}(y_{n_k})) =$ (per la continuità di f) $= \lim_{k\to+\infty} f(f^{-1}(y_{n_k})) = \lim_{k\to+\infty} y_{n_k}$ il che è chiaramente falso.

71.5 Supponiamo che $f(E)$ è sconnesso ossia $f(E) = D \cup F$ e $\overline{D} \cap F = \emptyset$. $E = f^{-1}(D \cup F) = f^{-1}(D) \cup f^{-1}(F)$. E è connesso per cui $\overline{f^{-1}(D)} \cap f^{-1}(F) \neq \emptyset$. Ma dalla continuità di f segue $\overline{f^{-1}(D)} = f^{-1}(\overline{D})$ e quindi $\overline{f^{-1}(D)} \cap f^{-1}(F) = f^{-1}(\overline{D}) \cap f^{-1}(F) = f^{-1}(\overline{D} \cap F) \neq \emptyset$ il che è chiaramente falso. Per la dimostrazione che $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ e $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ si veda l'esercizio **7.1.2**).

73.5 La funzione $F(x)$ è definita per ogni valore di x in quanto $|f_k(x)| \leq \frac{1}{2^{k+1}}$ ed è tale che $|F'(\frac{m}{2^n})| = +\infty$. Prendiamo $x_0 = 0$. $\frac{1}{h}(F(h) - F(0)) = \frac{1}{h}(f_0(h) + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{3^k}f_k(h))$ e $\frac{1}{2^{k_0+1}} < h \leq \frac{1}{2^{k_0}}$. Se $k \leq k_0 - 2$ allora $\frac{1}{4}T_k \geq \frac{1}{2^{k_0}}$. Se $k \geq k_0 - 1$ allora accade il contrario. Stimiamo ora dall'alto $|\frac{1}{h}\sum_{k=k_0-1}^{+\infty}\frac{1}{3^k}f_k(h)| \leq 2^{k_0+1}\sum_{k=k_0-1}^{+\infty}\frac{1}{16}\frac{1}{3^k} = \frac{1}{16}2^{k_0+1}\frac{1}{3^{k_0-1}-1}$. L'altro pezzo ossia $\frac{1}{h}f_0(h) + \sum_{k=1}^{k=k_0-2}\frac{1}{3^k}f_k(h)$ viene stimato dal basso nel seguente modo.

$|\frac{1}{h}f_0(h) + \sum_{k=1}^{k=k_0-2}\frac{1}{3^k}f_k(h)| = \frac{1}{h}\sqrt{h(\frac{1}{2}-h)} + \sum_{k=1}^{k=k_0-2}\frac{1}{3^k}\frac{1}{h}\sqrt{2^k h(\frac{1}{2} - 2^k h)} = \frac{1}{\sqrt{h}}\sqrt{\frac{1}{2}-h} + \sum_{k=1}^{k=k_0-2}\frac{1}{3^k}\frac{1}{\sqrt{h}}2^{k/2}\sqrt{\frac{1}{2} - 2^k h} \geq 2^{k_0}\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{k_0}}} + \sum_{k=1}^{k=k_0-2}\frac{1}{3^k}2^{k_0}2^{k/2}\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{2^k}{2^{k_0}}} \geq 2^{k_0}\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{k_0}}} + \sum_{k=1}^{k=k_0-2}\frac{1}{3^k}2^{k_0}2^{k/2}\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{2^{k_0-2}}{2^{k_0}}} = 2^{k_0}\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{k_0}}} + \sum_{k=1}^{k=k_0-2}\frac{1}{3^k}2^{k_0}2^{k/2}\frac{1}{2} =$
$= 2^{k_0}\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{k_0}}} + \sum_{k=1}^{k=k_0-2}(\frac{\sqrt{2}}{3})^k, 2^{k_0-1} = 2^{k_0}\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{k_0}}} + 2^{k_0-1}\frac{(\sqrt{2}/3)^{k_0-1}}{1-(\sqrt{2}/3)}$
e quest'ultima è una quantità che tende a $+\infty$ quando k_0 tende a $+\infty$.

74.5 Se $x = y$ la relazione è evidente. Manipolando algebricamente la disuguaglianza è equivalente a $\ln\frac{2x^{1/3}}{1+x^{1/3}} + \frac{1}{3}\frac{\ln x}{x-1} - \frac{1}{3} \geq 0$ e ponendo $x = t^{1/3}$, si ottiene $f(t) \doteq 3(t^3-1)\ln\frac{2t}{1+t} + 3\ln t + 1 - t^3 \geq 0$. per $\lim_{t\to0^+} f(t) = 0$. Il numeratore di $f'(t)$, a parte un fattore tre è pari a $g(t) = \big(3t\ln\frac{t}{1+t} + 3\ln 2 - t + 2\ln\frac{t}{1+t} + 2\ln 2 + 1\big)3t \doteq 3th(t)$. $\lim_{h\to0^+} h(t) = (3t+2)\ln\frac{2t}{1+t} + 1 - t \geq 0$.

$h'(t)=\frac{4t^2+7t+4}{t(t+1)(3t+2)^2}>0$ per ogni $t>1$ e quindi il risultato.

Più in generale se si vuole dimostrare che $P(a,b)\geq\left(\frac{a^r+b^r}{2}\right)^{1/r}$, ci si riduce a dimostrare che $\frac{1}{e}x^{\frac{x}{x-1}}\geq\left(\frac{1+x^r}{2}\right)^{1/r}$, $x>1$ e quindi a $(t^{1/r}-1)\ln\frac{2t}{1+t}+\ln t-r(t^{1/r}-1)\geq 0$, $t>1$

75.5 Si consideri la funzione $h(x)\doteq x^2g(x)$ dove $g(x)=\begin{cases}\sin x^{-1}, & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$. Abbiamo $h'(x)=\begin{cases}2x\sin x^{-1}-\cos x^{-1}, & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ e quindi $f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-h'(x), & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$. Ciò implica che $f(x)=\left(\int_0^x 2y\sin\frac{1}{y}dy\right)'-h'(x)$ ossia è una derivata.

76.5 Supponiamo che la la funzione non sia continua. Vuol dire che esiste una successione $\{x_k\}$ tale che $x_k\to x$ e $f(x_k)$ converge ad un valore $y\neq f(x)$. Il fatto che la successione $f(x_k)$ converga deriva dal fatto che la funzione è localmente limitata. Infatti se $f(x_k)$ non converge possiamo estrarre una sottosuccessione convergente per il Teorema di Weierstrass. Ma il punto $(x,y)\in A^c$ che è aperto e quindi è impossibile che $(x_k,f(x_k))$ converga a (x,y).

• D'altra parte, se f non è localmente limitata l'affermazione non vale. Si prenda la funzione $f_1(x)=\begin{cases}1/x & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ Il grafico è chiuso ma la funzione non è localmente limitata ed infatti non è continua per $x=0$

• Se la funzione è localmente limitata ma il grafico non è chiuso allora non è detto che sia continua. Si prenda $f_2(x)=\begin{cases}\sin 1/x & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ La chiusura del grafico è $[-1,1]$ che non appartiene al grafico ad eccezione del punto $(0,0)$.

77.5 Supponiamo che f non sia continua e sia A il suo grafico. Allora esiste $\overline{x}$ e una successione $x_n\to\overline{x}$ tale che $|f(x_n)-f(\overline{x})|\geq\varepsilon$. Supponiamo che per un dato n_0 si abbia $f(x_{n_0})\geq f(\overline{x})+\varepsilon$. Per il Teorema dei valori intermedi, $(f(\overline{x}),f(x_{n_0}))\subset Im(f)$. Prendiamo ora il punto $P\equiv(\overline{x},f(\overline{x})+\varepsilon)\notin A$. Essendo A chiuso si può trovare una sferetta intorno al punto P che non interseca A e questo è in contrasto con il fatto che $(f(\overline{x}),f(x_{n_0}))\subset Im(f)$.

• Una funzione che verifica la proprietà dei valori intermedi ma non quella della chiusura del grafico è $f_2(x)=\begin{cases}\sin 1/x & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

• Una funzione che verifica la chiusura del grafico ma non la proprietà dei valori intermedi è : $h(x)=\begin{cases}1/x & x>0\\ 0 & x=0\\ -1+1/x & x<0\end{cases}$ giustamente, in base al teorema, $h(x)$ non deve avere nessuna delle caratteristiche descritte ai punti 1)–4).

78.5 Supponiamo che la funzione non verifica la *proprietà dei valori intermedi* . Vuol dire che esiste η con $\inf_{x\in\mathbf{R}}\{f(x)\}\leq\eta\leq\sup_{x\in\mathbf{R}}\{f(x)\}$ tale che non esiste $\overline{x}$ e $f(\overline{x})=\eta$. Definiamo $A\stackrel{\rm def}{=}\{(x,f(x))\colon x\in\mathbf{R},\ f(x)<\eta\}$ e $B\stackrel{\rm def}{=}\{(x,f(x))\colon x\in\mathbf{R},\ f(x)>\eta\}$. Chiaramente $\{(x,f(x))\}_{x\in\mathbf{R}}=A\cup B$ (il grafico di f coincide con $A\cup B$) ma è altrettanto chiaro che $\overline{A}\cap B=A\cap\overline{B}=\emptyset$ e questo è impossibile se il grafico è connesso.

• Una funzione che non ha il grafico connesso è $f_4(x)=\begin{cases}1 & x\leq 0\\ 0 & x>0\end{cases}$ ed infatti non verifica la proprietà dei valori intermedi.

79.5 Tre possibili controesempi sono: 1) $\frac{f(x+a)}{f(x)} = \frac{2+\sin(x+a)}{2+\sin x}$ e prendiamo la successione $x_k = 2\pi k$. Otteniamo $\frac{f(x+a)}{f(x)} = 1 + \frac{\sin a}{2}$
2) $\frac{f(x+a)}{f(x)} = \frac{|\sin(x+a)|}{|\sin x|}\frac{x}{(x+a)}$ e per $x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ si ha $\frac{f(x+a)}{f(x)} = |\cos a|$
3) Si può verificare che la funzione tende a zero per $x \to +\infty$ e quindi è uniformemente continua. Inoltre $f(n) = \frac{1}{n}$, $f(n+\frac{1}{n}) = \frac{2}{n}$ e quindi $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n+\frac{1}{n})}{f(n)} = 1$. D'altra $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n+1)}{f(q_n)} = \frac{1}{2}$ dove $n < q_n = \frac{n+1+\sqrt{n^2+2n-3}}{2} < n+1$ è tale che $q_n + \frac{1}{q_n} = n+1$. Infatti si può vedere che $f(q_n) = \frac{2}{n} + o(\frac{1}{n})$ e quindi il valore del limite. $f(q_n) = -\frac{n+2}{n^2-1}\frac{n+1+\sqrt{n^2+2n-3}}{2} + \frac{2}{n} + \frac{(n+2)(n^2+1)}{n(n^2-1)} = -\frac{n+2}{n^2}\big(1+\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})\big)\big(n+1-\frac{1}{n+1}+o(\frac{1}{n})\big) + \frac{2}{n} + (1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3})\big(1+\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})\big) = \frac{2}{n} + o(\frac{1}{n})$

80.5 Se fosse $f + f' = 0$ ed ammettessimo che la derivata prima è continua, allora basterebbe risolvere l'equazione per ottenere $f(x) = ce^{-x}$ da cui il limite zero. Siccome abbiamo solo $\lim_{x\to+\infty} f + f' = 0$ allora definiamo la funzione $f(x)e^{-x}$ ed applichiamo ad essa il Teorema di Cauchy nell'intervallo $[a, +\infty)$ con a da scegliere opportunamente. Abbiamo $\frac{f(x)e^x - f(a)e^a}{e^x - e^a} = \frac{e^b(f(b)+f'(b))}{e^b}$ con $a < b$ e quindi $f(x) = e^{a-x}f(a) + (1-e^{a-x})(f(b)+f'(b))$. Sappiamo che $\forall\ \varepsilon\ \exists\ x_\varepsilon : b > x_\varepsilon\ \Rightarrow\ |(1-e^{a-x})(f(b)+f'(b))| \le |(f(b)+f'(b))| < \varepsilon$ e che $\exists\ x'_\varepsilon(a) \ge a : x > x'_\varepsilon(a) \Rightarrow\ |e^{a-x}f(a)| < \varepsilon$. Prendendo allora $a \ge x_\varepsilon$, per ogni $x > x'_\varepsilon(a)$ si ottiene $|f(x)| < 2\varepsilon$

81.5 Dimostriamo il solo se. L'ipotesi è che la derivata sia continua. Allora $|f'(x) - \frac{f(x+h)-f(x)}{h}| = |f'(x) - f'(\xi)|$ con $x + \frac{h-|h|}{2} < \xi < x + \frac{h+|h|}{2}$ per il teorema di Lagrange. La derivata è uniformemente continua essendo $[a, b]$ chiuso e limitato. Dunque se $|x-y| < \delta_\varepsilon$ si ha $|f'(x) - f'(y)| < \varepsilon$ e quindi non appena $|h| < \delta_\varepsilon$ si ha $|x - \xi| < \delta_\varepsilon$ da cui il risultato.

Dimostriamo il se. L'ipotesi è che la funzione sia uniformemente derivabile. Sia $\{h_i\}$ una successione di numeri interi non nulli che tendono a zero. La successione di funzioni continue $f_i(x) \doteq \frac{1}{h_i}(f(x+h_i) - f(x_i))$ converge uniformemente (per ipotesi) alla funzione $f'(x)$ e per un ben noto teorema la funzione limite è continua.