§8 Integrali, integrali impropri e funzioni integrali

Per le definizioni e teoremi si fa riferimento ad uno qualsiasi dei libri M.Bertsch - R.Dal Passo *Lezioni di Analisi Matematica*, I edizione settembre 1996, ARACNE EDITRICE, via Raffaele Garofalo, 133 A/B 00173 Roma tel.0672672233/22, M.Bertsch - R.Dal Passo *Elementi di Analisi Matematica*, I edizione ottobre 2001, ARACNE EDITRICE

Alcuni degli esercizi più significativi sono stati presi dai libri:

E.T. Whittaker & G.N.Watson: "A course of modern analysis" Cambridge University Press, Ristampa del 1992 della quarta edizione del 1927 (prima edizione nel 1902) e indicato successivamente con [WW]

T.J.I'A. Bromwich: "An introduction to the theory of infinite series", MacMillan and Co., Limited 1947, seconda edizione e indicato come [B]

1.8 Si studi la convergenza dei seguenti integrali impropri. Qualora compaiano dei parametri (α,β) ecc. si valuti per quali valori di tali parametri gli integrali sono convergenti o meno

I) $\int_0^1 dx \frac{\log(1+x^{2/3})}{e^x-1}$, $\int_0^1 (\frac{1}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)(e^{1-x}-1)^2})dx$, $\int_0^\infty dx \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}$, $\int_0^\infty dx \frac{1}{x^\alpha|\log x|^\beta}$

II) $\int_{-2}^\infty e^{3x^2+7x}\ln^2(1+e^{-2x^2})dx$, $\int_1^2 \frac{1-\cos\sqrt{x-1}}{(x^3-1)^2}dx$, $\int_2^\infty (\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\cos(\ln^{-5/4}x))^2 dx$

III) $\int_0^{+\infty} (\arctan(\frac{1}{t^\alpha+1}) - \frac{1}{t^\alpha+1})dt$, e si esegua il calcolo per un valore di α per il quale l'integrale converge, $\int_2^\infty \frac{\sqrt{9+5x}\ln^\alpha(e^{x+1}+1)}{x}dx$, $\int_0^{+\infty} dx \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}$ e calcolarlo

IV) $\int_{-\infty}^0 e^{3x\alpha}(\cos x + \sin 2x + 5)^\alpha dx$, $(\alpha \geq 0)$ e si esegua il calcolo per un valore di α per il quale l'integrale converge, $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2}|\ln(1+x^{-1/2}) - \sin^{1-\gamma^2} x^{-1/4}|^\alpha$, $\int_1^\infty \big(\cos\frac{1}{x^{2\alpha}} - \cos\frac{1}{x^{3\gamma}}\big)dx$, $\alpha,\gamma \geq 0$

V) $\int_1^\infty \big(x^2 e^{1/x} - x^2\cos\frac{2}{x} - x - \frac{5}{2} - \sin\frac{1}{6x}\big)dx$, $\int_2^\infty \sin^\alpha\big(x^4(\cos\frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{24x^4})\big)dx$,

VI) $\int_0^\infty x^{-\alpha}\big((1+\sin^2 x)^{1/6} - 1 + e^{-1/(x+x^7)}\big)dx$, $\int_0^1 \frac{1-\cos((1-x)^2)}{\tan(x(1-x))(-\ln x)^\alpha}dx$,

VII) $\int_1^\infty \big(x(\ln x)^\alpha + (x^2-1)^{1/3}\big)^{-1}dx$, $\int_2^\infty \big(\cos(x^{-\gamma/2}) - (1-\frac{1}{x})^\alpha\big)dx$ $\alpha,\ \gamma \geq 0$,

VIII) $\int_0^\infty \big[\frac{\sqrt{x}}{2x^2+3x} + x^{\alpha-1}e^{-2/x} + (x+1)(\cos\frac{2}{x^2} - 1)\big]dx$, $\int_0^1 dx\, x^{\ln x}$, $\int_2^\infty dx\, \frac{\sin x}{\ln x}$

IX) $\int_0^\infty \frac{\arctan\sqrt{t}}{t^\alpha}dt$ $\int_0^\infty dx(27x^\alpha + x^2)^{-1}$, $\int_2^\infty \frac{\arctan(x-2)^\alpha}{\sqrt{x}-1}dx$, $\int_0^\infty \frac{\sin x\ln x}{(x+1)^{3/2}-1}dx$

X) $\int_0^1 dx(x\ln x + \frac{(1-\cos x)^\alpha}{e^x-1})$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha + (x^2-1)^{1/3}}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} (x+1)^{|x|(a-1)}dx$,

XI) $\int_0^1 (\frac{1}{x^\alpha\sin^2 x} - \frac{1}{x^{3\gamma}})dx$, $\int_0^1 \frac{(1-x^4)^{3/2}}{\tan(x-1)^2}dx$, $\int_0^\infty dx\, \frac{\ln x}{(x+1)^{\frac{3}{2}}}$ e calcolarlo,

XII) $\int_0^{+\infty} t^{-a}\arctan^3(\frac{t}{t^2+2})dt$, $\int_{\alpha+\gamma}^\infty t^\alpha\ln(t+2)dt$,

XIII) Calcolare l'integrale d'Eulero $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\ln\sin x$ (suggerimento: la primitiva non esiste). Calcolare inoltre i seguenti integrali $\int_0^\pi dx\ln\sin x$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\ln\cos x$, $\int_1^\infty \frac{dx\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cot x\ dx$, $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x}dx$, $\int_0^\pi dx\ x\ln\sin x$, $\int_0^{2\pi} dx\ \ln\cos^2\frac{x}{2}$, $\int_0^\infty \frac{dx\ln x}{1+x^2}$,

XIV) Calcolare l'integrale di Bertrand $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx$, e poi i seguenti integrali: $\int_0^1 dx\, \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$, $\int_0^{+\infty} dx\, \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$, $\int_0^1 dx \frac{\arctan x}{1+x}$, $\int_0^{\pi/4} \frac{x}{2+\cos(2x)+\sin(2x)}$

XV) Calcolare gli integrali $\int_0^{\pi} dx \frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}$, $\int_0^{\pi} dx \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}$, $\int_{-1}^1 dx \frac{\arccos x}{1+x^2}$

XVI) Si esamini la convergenza degli integrali $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x}(\frac{1}{x} - \frac{1}{2e^x} + \frac{1}{1-e^x})$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n}dx$ ([WW] pag. 81 dove si dice che provengono dai *Mathematical Tripos*, 1914). Mostrare che l'integrale $\int_a^{+\infty} x^{-n}e^{\sin x}\sin(2x)dx$ converge per $a>0$, $n>0$ ([WW] pag. 81 dove si dice che provengono dai *Mathematical Tripos*, 1908)

2.8** Studiare i seguenti integrali impropri
1) $\int_0^{\infty} dx \frac{\sin x}{x}$, 2) $\int_0^{\infty} dx \frac{|\sin x|}{x}$, 3) $\int_0^{\infty} dx \cos x^{\gamma}$, 4) $\int_0^{\infty} dx x^2 \cos x^6$, 5) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4\sin^2 x}$,
6) $\int_0^{\infty} dx \frac{x}{e^{x^6\sin^2 x}}$ 7) $\int_0^{\infty} dx \frac{x}{e^{x^4\sin^2 x}}$, 8) $\int_0^{\infty} dx \frac{x}{e^{x^2\sin^2 x}}$, 9) $\int_0^{\infty} dx \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, 10) $\int_0^{\infty} dx \ln(1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}})$
11) $\int_0^{+\infty} dx \frac{|\sin x|}{\ln x}$, 12) $\int_{2e}^{+\infty} dx \frac{\sin x}{\ln x+\sin x}$,
3) e 4) risalgono a Cauchy, 5) a Hardy, 6)–8) a Du Bois–Reymond
A proposito di alcuni dei precedenti integrali si dimostri il risultato seguente:
Data una funzione $f\colon [0,+\infty) \to \mathbf{R}$ *uniformemente continua e tale che* $\int_0^{+\infty} f dx$ *esista come integrale improprio, dimostrare che* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2.1.8** Al variare di a, b, c si studi la convergenza dell'integrale $\int_0^{+\infty} dx \frac{x^a}{1+x^b|\sin x|^c}$ ([WW] pag. 81 dove si dice proviene da Hardy *Messenger of Mathematics*, XXXI, (1908), p.177).
Al variare di a, b, si studi la convergenza dell'integrale $\int_0^{+\infty} dx \frac{x^a}{1+x^b\sin^2 x}$ ([B] pag. 470).

2.2.8** Studiare al variare di a e b gli integrali $\int_0^{+\infty} dx \frac{\sin x}{x^a+b\sin x}$ $(a>0)$, $\int_0^{+\infty} dx \frac{\sin x}{x^a+b|\sin x|}$, ([WW] pag. 514 dove lo si attribuisce a Hardy).

3.8*** Si studi il seguente integrale improprio $\int_0^{\infty} dx x^{\alpha}|\cos x|^{x^{\beta}}$ per $\alpha,\beta \in \mathbf{R}$ (1.8)

4.8 Stabilire la differenziabilità nel dominio di definizione delle funzioni $F(x,y) = \int_0^{x+y} \frac{e^t-1}{t}dt$ $\int_x^y dz h(z)$ dove $h(z) = -z^2$ se $z \le 0$ mentre $h(z) = 1+z^2$ se $z>0$.

5.8 Tracciare il grafico delle seguenti funzioni analizzando la continuità, derivabilità una o più volte, asintoti

$F_1(x) = \int_0^x dt \log(1-e^{\frac{t-1}{t^2}})$, $F_2(x) = \int_{-1}^x f(x)$ dove f è la funzione dell'esercizio **4.6**,
$F_3(x) = \int_0^x dt \frac{2t-1}{(t^2+1)\log|\frac{t-1}{t}|}$, $F_4(x) = x + \int_0^x dt \frac{e^{-t}}{t+1}$, $F_5(x) = \int_0^x dt(1-\cos\frac{1}{t})$

6.8 Dimostrare che una funzione $f\colon (a,b) \to \mathbf{R}$ continua e limitata è integrabile secondo Riemann. Dare inoltre un esempio di funzione $f\colon (a,b) \to \mathbf{R}$ continua e limitata ma non uniformemente continua.

7.8 Calcolare $\int_0^{\frac{1}{2}} \arctan x^2 dx$ a meno di $\frac{1}{100}$

8.8 Dimostrare che $|\int_0^t \sin(x^2)dx| \le \min\{t, \frac{t^3}{3}\}$ per $t \ge 0$.

9.8 Dimostrare che $\frac{\sin a}{2+\tan^3 a} \le \int_0^a \frac{\cos x}{2+\tan^3 x}dx \le \frac{1}{2}\sin a$ per $0 \le a < \frac{\pi}{2}$.

(1.8) Tale esercizio si trova nel libro G.Pòlya–G.Szegö *Problems and Theorems in Analysis I* Springer–Verlag Ed. pag.78

10.8 Calcolare $\int_0^{\frac{1}{2}} \sin(x-\frac{1}{2})^2 dx$ a meno di un centesimo ed un milionesimo.

11.8 Calcolare l'integrale indefinito delle funzioni: I) $\tan x$, II) $\frac{1}{\sin x}$, III) $(\tan x)^2$, IV) $(x^4-1)^{-1}$, V) $(x^4+1)^{-1}$, VI) $\ln(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})$, VII) $(1+a\cos x)^{-1}$ considerando i casi $0<a<1$ e $a>1$, VIII) $\arctan\sqrt{x}$, IX) $\frac{1}{x}\sqrt{3-x^2}$, X) $(\cos x+\sin x)^{-1}$, XI) $\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}$, XII) $\frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}$, XIII) $(\arcsin x)^2$, XIV) $x(\arctan x)^2$, XV) $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$, XVI) $\frac{1}{1+\sqrt{1+x}}$, XVII) $\frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}$, XVIII) $\frac{1}{x\sqrt{x+1}}$, XIX) $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$, XX) $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$, XXI) $\frac{x+1}{x(1+xe^x)}$, XXII) $\frac{x^2-x+1}{\sqrt{(x^2+3)^2}}$, XXIII) $\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}$, XXIV) $\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$, XXV) $\frac{x^7}{(1-x^2)^5}$, XXVI) $\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}$, XXVII) $\frac{\ln(1+x)-\ln x}{x(x+1)}$, XXVIII) $\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}$, XXIX) $\frac{x^3-1}{4x^3-x}$, XXX) $\frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}$, XXXI) $\frac{\sqrt{2-x+x^2}}{x^2}$, XXXII) $\frac{1}{x^2}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{x-1}})$, XXXIII) $(2-x)\ln(x^2+8x+17)$, XXXIV) $\frac{\arcsin x}{x^2}$, XXXV) $\frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$, XXXVI) $\frac{1+x^4}{1+x^2}$, XXXVII) $\frac{1}{2x\sqrt{x-1}\arccos(1/\sqrt{x})}$ $(x>1)$, XXXVIII) $\frac{1}{a+bx^2}$, XXXIX) $\sqrt{(x-a)(b-x)}$, XL) $\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ XLI) $\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}$, XLII) $\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, XLIII) $(x^5-1)^{-1}$, XLIV) $\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{1+x^2}dx$

12.8 Si consideri la funzione di $\rho>0$ $f(\rho)=\sqrt{E+\frac{k}{\rho}-\frac{p^2}{2m\rho^2}}$ con E,m,k,p delle costanti dove $E<0$, $k>0$, $m>0$, $p\neq 0$ in modo tale che esistano due soluzioni positive ρ_- e ρ_+ della equazione $f(\rho)=0$. Si calcoli $2\sqrt{2m}\int_{\rho_-}^{\rho_+}\sqrt{E+\frac{k}{\rho}-\frac{p^2}{2m\rho^2}}d\rho$.
Il precedente integrale scaturisce nel contesto della *meccanica celeste*. Coloro i quali approfondiranno tale disciplina e quindi studieranno *problema di Keplero* (il moto di due corpi celesti soggetti unicamente all'attrazione gravitazionale), avranno modo di constatare che l'integrale costituisce *il calcolo dell'azione per la variabile radiale.* I calcoli non sono brevi. Facendo uso delle variabili complesse ed in particolare *dell'integrazione con il metodo dei residui*, l'integrale si può calcolare molto più brevemente (vedi H. Goldstein "Meccanica Classica" Editrice Zanichelli pag.294 – vedi anche L.D.Landau, E.M.Lifšits "Meccanica Analitica" Editori Riuniti pag.236).

13.8 Si consideri la funzione $\sin^2\theta$ fra 0 e π e si consideri la equazione $\sin^2\theta=\frac{b^2}{a}$ $(a>0)$. La equazione ha due soluzioni simmetriche rispetto $\theta=\frac{\pi}{2}$ dette θ_o e θ_1 (un grafico aiuterà la comprensione delle varie quantità). Si calcoli l'integrale definito $\int_{\theta_o}^{\theta_1} d\theta\sqrt{a-\frac{b^2}{\sin^2\theta}}$. Prendendo $a=|p|$ e $b\neq 0$ l'integrale costituisce *il calcolo dell'azione per la variabile θ per il problema di Keplero laddove p è la stessa dell'integrale precedente*

14.8 Calcolare $\int_0^a dx e^x$ senza far uso della funzione primitiva ma usando la definizione di integrale di Riemann.

15.8 Dimostrare che una funzione $f\colon(a,b)\to\mathbf{R}$ integrabile secondo Riemann è limitata.

16.8 Sia data una funzione $f(x)$ nulla per $a<x<b$ e che assume valori arbitrari per a e b. Mostrare che f è integrabile e che $\int_a^b f(x)dx=0$.

Una funzione è detta *continua a tratti* su un intervallo $[a,b]$ se esiste una partizione $a=x_o<x_1<x_2<\ldots x_n=b$ tale che f sia continua in ogni intervallo $x_k<x<x_{k+1}$, tenda a limiti finiti $f(x_o^+)$, $f(x_1^-)$, $f(x_1^+)$, $\ldots f(x_n^-)$ ed assuma valori qualsiasi nei punti x_k.

17.8 Mostrare che una funzione continua a tratti su un intervallo $[a,b]$ è integrabile.

18.8 Sia $g(x)\geq 0$ una funzione continua a tratti e $\int_a^b g(x)dx=0$. Allora $g(x)$ può essere diversa da zero solo su di un numero finito di punti. È chiaramente vero che se una funzione è nulla tranne un numero finito di punti allora $\int_a^b dxg(x) = 0$. Dedurne che, data una funzione $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ integrabile secondo Riemann e data $\tilde{f}: [a, b] \to \mathbf{R}$ dove $f(x) = \tilde{f}(x)$ tranne un numero finito di punti, si ha $\int_a^b dxf(x) = \int_a^b dx\tilde{f}(x)$. È vera la stessa affermazione se $f(x) = \tilde{f}(x)$ tranne una quantità numerabile di punti?

19.8 Dimostrare che se $f(x)$ è una funzione periodica su $(-\infty, +\infty)$ allora la funzione $F(x) = \int_a^x dzf(z)$ può essere rappresentata come somma di una funzione periodica e di una funzione lineare.

20.8 Sia data $f: (a, b) \to \mathbf{R}$. Dimostrare che se $f(x)$ è integrabile anche $|f(x)|$ lo è. Alternativamente si trovi un controesempio. Si dimostri, ovvero si trovi un controesempio al fatto che se $|f|$ è integrabile allora anche f lo è . Si risponda alle stesse domande nell'ipotesi che sia $a = -\infty$ e/o $b = +\infty$ oppure nell'ipotesi che l'intervallo sia (a, b) ma f sia illimitata.

21.8*** Dare un esempio di funzione $f: [-1, 1] \to \mathbf{R}$ derivabile in $(-1, 1)$ per cui è vera la seguente affermazione "*non esiste alcuna funzione $g(x)$ integrabile secondo Riemann e nessuna costante a tale che $f(x) = a + \int_{-1}^x dzg(z)$ per ogni $x \in [-1, 1]$*."
Volendo scrivere in forma compatta si può dire che *la funzione costituente la soluzione del problema, pur essendo ovunque derivabile, non è l'integrale della sua derivata ossia non vale la formula ben nota $f(x) = f(a) + \int_a^x dzf'(z)$.*
Si dia, viceversa, un esempio di funzione integrabile che non è *la derivata del suo integrale* ossia non in tutti i punti del dominio vale la formula $\frac{d}{dx}\Big(\int_a^x \ dz \ f(z)\Big) = f(x)$.

22.8 Sia data la funzione $A(x) = \int_a^x dzf(z)$ che esiste per ogni $x \in [a, b]$ e sia c un punto di (a, b). Dire quale affermazione scritta a sinistra ne implica una o più a destra.

i) f continua in c	vi) A continua in c
ii) f discontinua in c	vii) A discontinua in c
iii) f crescente su (a, b)	viii) A convessa su (a, b)
iv) $f'(c)$ esiste	ix) $A'(c)$ esiste
v) f' continua in c	x) A' continua in c

23.8 Dimostrare che
$I_{2n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\, dx = \frac{\pi}{2} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)\cdot 2n} \doteq \frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$
$I_{2n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\, dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

24.8 Integrando la disuguaglianza $\sin^{2n+1} x \le \sin^{2n} x \le \sin^{2n-1} x$ nell'intervallo $0 \le x \le \pi/2$ ed applicando le **23.8** dimostrare la *formula di Wallis (1656)*
$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^2 4^2 \cdots (2n)^2}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{4n^2}}$

25.8 Usare la funzione $F_6(x)$ dell'esercizio **5.8** per dimostrare la esistenza di una funzione che tende a zero in modo monotono ma tale che la sua derivata prima non ammette limite (se la derivata ammettesse limite diverso da zero la funzione non potrebbe tendere a zero).

26.8 Si trovi l'errore nel seguente ragionamento: l'integrale $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt \cos(\cos t)$ è zero in quanto sostituendo $\cos t = y$ esso diventa $\int_0^0 dy \frac{\cos y}{\sqrt{1-y^2}}$. Che l'integrale non sia nullo lo si evince dal fatto che l'integrando è pari e dal fatto che nel dominio di integrazione esso è positivo.

27.8 Sia data $f\colon (0,+\infty) \to \mathbf{R}$ tale che sia derivabile con continuità sul suo dominio e tale che $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$. Si dimostri che la funzione non può essere uniformemente continua sul suo dominio.

28.8** Si valuti l'integrale indefinito delle funzioni $\frac{1}{x^n+1}$ e $\frac{1}{x^n-1}$ per n naturale (suggerimento: si faccia uso dei numeri complessi e si usi la **3.1.2** 6)

29.8** Data $f\colon [0,+\infty] \to \mathbf{R}$ continua nel suo dominio ed inoltre esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty)$. Se $a>0$ e $b>0$ si dimostri che $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = (f(+\infty)-f(0))\ln\frac{a}{b}$ (formula di G.Frullani 1795–1834)
Si applichi tale formula per calcolare i seguenti integrali impropri $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(ax)-\arctan(bx)}{x}dx$, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^n}-e^{-bx^n}}{x}dx$ $(n>0)$.

30.8** Data $f\colon [0,+\infty] \to \mathbf{R}$ tale che f è continua nel suo dominio ed inoltre esiste $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x}dx$ per ogni $A>0$. Se $a>0$, $b>0$, si dimostri che $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = f(0)\ln\frac{b}{a}$ e si applichi tale formula per calcolare i seguenti integrali impropri: $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$, $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}dx$,
$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x}dx$, $\int_0^{+\infty} \frac{b\sin(ax)-a\sin(bx)}{x}dx$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^2}dx$.

31.8 Si applichino i risultati precedenti allo studio della funzione di due variabili data da $\int_0^1 \frac{t^{4x-3y}-t^{3y-4x}}{\ln t}dt$

32.8** Data una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ limitata poniamo $\omega[f;\alpha,\beta] = \sup_{x,y\in[\alpha,\beta]} |f(x)-f(y)|$ con $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ (*Oscillazione della funzione nell'intervallo* $[\alpha,\beta]$). Dimostrare che:
la funzione f è integrabile secondo Riemann se e solo se $\inf_{\mathcal{D}} \sum_{j=1}^n \omega[f;x_{j-1},x_j](x_j-x_{j-1}) = 0$. (2.8)

33.8*** Si chiama *oscillazione di una funzione $f(x)$ in un punto c* l'espressione $\omega[f;c] = \inf_{[\alpha,\beta]} \omega[f;\alpha,\beta]$, $\alpha < c < \beta$. Dimostrare la seguente affermazione *Una funzione limitata $f(x)$ è integrabile su $[a,b]$ se e soltanto se per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $\delta > 0$ l'insieme dei punti c tali che $\omega[f;c] \geq \varepsilon$ appartiene alla unione di un numero finito di intervalli la cui somma delle lunghezze non supera δ (Criterio di Du Bois–Reymond).* Per coloro i quali conoscono la "misura di Peano–Jordan" si può dire: *Una funzione è integrabile secondo Riemann se e solo se $\forall\ \varepsilon > 0$ ha misura di Peano–Jordan nulla l'insieme dei punti nei quali la oscillazione della funzione è maggiore od uguale a ε*

34.8*** Dimostrare che: *una funzione f limitata in $[a,b]$ è integrabile secondo Riemann se e solo se per ogni $\delta > 0$ l'insieme dei punti di discontinuità di f appartiene alla unione finita o numerabile di intervalli la cui somma delle lunghezze non supera δ (Criterio di Lebesgue)*

35.8*** In base ad almeno uno dei criteri appena enunciati stabilire che la funzione dell'esercizio **6.5**** è integrabile secondo Riemann mentre la funzione che vale 1 sui razionali e 0 sugli irrazionali (*funzione di Dirichlet*) non lo è

36.8 Utilizzando il `Teorema 8.10` si calcoli il seguente integrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \ln(t^2-\sin^2 x)$, $t>1$ (non è possibile trovare la primitiva)

I prossimi esercizi riguardano un argomento a volte trascurato per motivi di tempo nei corsi di

(2.8) Per quanto riguarda l'estremo inferiore si fa riferimento alle notazioni del libro di testo. $\mathcal{D}$ è l'insieme delle partizioni dell'intervallo $[a,b]$

Analisi I e II. L'argomento può sommariamente intitolarsi "*passaggio al limite sotto il segno di integrale improprio*", "*derivazione sotto il segno di integrale improprio*", "*scambio dell'ordine di integrazione per integrali doppi*". Per presentarlo facciamo riferimento al capitolo `8.7` ed ai `Teoremi 8.10 - 8.11`. Il problema che vogliamo studiare è esattamente quello affrontato nel capitolo citato con la significativa differenza che stavolta la x di $f(x,y)$ varia in un insieme illimitato (supponiamo $[a,+\infty)$). Ripercorrendo le dimostrazioni dei `teoremi 8.10-8.11`, ci si accorge che le conclusioni (tesi) non sono più a così buon mercato in quanto viene meno la uniforme continuità della funzione nel suo dominio bidimensionale che stavolta è illimitato. Vogliamo illustrare con un esempio che il problema è reale e non immaginario. Si considerino le due funzioni $G(y)=\int_0^1 dx\sin(x^2y)$ e $F(y)=\int_0^{+\infty}dx\sin(x^2y)$; $G(0)=\Psi(0)=0$. Alla prima si applicano le considerazioni del `Teorema 8.10` e quindi $\lim_{y\to 0}G(y)=\int_0^1\lim_{y\to 0}\sin(x^2y)dx=0$ (si è passati al limite sotto il segno di integrale). Si noti che la funzione $G(y)$ è sconosciuta, per lo meno nella pretesa di scriverla in termini di un numero finito di funzioni note ed infatti di essa vogliamo sapere soltanto il limite in questione e nient'altro. Per quanto riguarda la funzione $F(y)$ abbiamo $\int_0^{+\infty}\lim_{y\to 0}\sin(x^2y)dx=0$ essendo l'integrale di una funzione identicamente nulla. Del resto cambiando variabile $x^2|y|=z^2$ si ha $\frac{y}{|y|}\frac{1}{\sqrt{|y|}}\int_0^{+\infty}dz\sin z^2$ ed essendo l'integrale convergente (vedi l'esercizio **2.8****) ne segue che il limite per y che tende a zero vale $+\infty$ oppure $-\infty$ a seconda del segno di $\frac{y}{|y|}\int_0^{+\infty}dx\sin x^2$ a condizione che l'integrale sia non nullo (fatto questo che dimostreremo dopo). La contraddizione nasce esattamente dal fatto che non si era autorizzati a passare al limite dentro l'integrale ed a scrivere quindi $\int_0^{+\infty}\lim_{y\to 0}\sin(x^2y)dx$. È opportuno notare che se avessimo eseguito gli stessi calcoli per la funzione G avremmo ottenuto $\frac{1}{\sqrt{|y|}}\frac{y}{|y|}\int_0^{\sqrt{|y|}}dx\sin x^2$ ed in modulo si può maggiorare $|\frac{1}{\sqrt{|y|}}\frac{y}{|y|}\int_0^{\sqrt{|y|}}dx\sin x^2|\le\frac{1}{\sqrt{|y|}}\int_0^{\sqrt{|y|}}dx\ x^2=\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{|y|}}|y|^{3/2}$ e nel limite $y\to 0$ si ha esattamente zero. Per il `Teorema 4.3` il limite deve essere zero. Dunque con la funzione G non si cade in contraddizione e si può passare al limite sotto il segno di integrale. Come si sarà notato, la differenza dipende dal fatto che in un caso la x varia in un dominio limitato mentre nell'altro caso no.

Mostriamo ora che $\int_0^{+\infty}\sin x^2dx\neq 0$. Spezziamo l'integrale come $\int_0^1 dx\sin x^2+\int_1^{+\infty}dx\sin x^2$. Eseguiamo la sostituzione nel secondo integrale ed otteniamo $\int_1^{+\infty}dx\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}$ ed integrando per parti si ha $\int_0^1 dx\sin x^2+\frac{\cos x}{2\sqrt{x}}\Big|_{+\infty}^1-\frac{1}{4}\frac{\sin x}{x^{3/2}}\Big|_1^{+\infty}+\frac{3}{8}\int_1^{+\infty}dx\frac{\sin x}{x^{5/2}}$. L'ultimo integrale è maggiorabile con $\frac{1}{4}$ avendo maggiorato $|\frac{\sin x}{x^{5/2}}|\le\frac{1}{x^{5/2}}$ A questo punto l'integrale diventa $\frac{\cos 1}{2}+\frac{1}{4}\sin 1+\int_0^1 dx\sin x^2+I$ dove $|I|\le\frac{1}{4}$ e la somma è minorabile con $\frac{\cos 1}{2}+\frac{1}{4}\sin 1+\int_0^1 dx\sin x^2-\frac{1}{4}$ che è positiva essendo: 1) $\int_0^1 dx\sin x^2>0$, 2) $\cos 1+\sin 1\ge\sqrt{\cos^2 1+\sin^2 1}=1$, 3) $\cos 1>0$.

Per quanto concerne la derivazione sotto il segno di integrale si considerino le stesse funzioni di prima e chiediamoci per quali valori di y valgono le uguaglianze (per $F(y)$ va escluso $y=0$ non essendo la funzione ivi continua) $\frac{d}{dy}G(y)=\int_0^1 dx\frac{d}{dy}\sin(x^2y)$ e $\frac{d}{dy}F(y)=\int_0^{+\infty}dx\frac{d}{dy}\sin(x^2y)$ per $y\neq 0$. Consideriamo $y>0$. Per quanto riguarda G cambiamo variabile come prima ed otteniamo $G'(y)=\frac{d}{dy}\frac{1}{2\sqrt{y}}\int_0^y\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ che può essere derivata tranquillamente ottenendo $-\frac{1}{4y^{3/2}}\int_0^y\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx+\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}$. Sempre nel primo integrale, se derivassimo dentro il segno di integrale appunto, avremmo $\int_0^1 dx\cos(x^2y)x^2$ ed eseguendo la sostituzione $x^2y=t$ si avrebbe $\frac{1}{2y^{3/2}}\int_0^t dt\ \sqrt{t}\cos t$ ed integrando per parti si riottiene l'espressione precedente. Dunque in questo caso si può derivare sotto il segno di integrale. Per la funzione $F(y)$, nel primo caso si ottiene $F'(y)=\frac{d}{dy}\frac{1}{2\sqrt{y}}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ che certamente è ben definita essendo l'integrale convergente grazie ai teoremi scritti per la risoluzione dell'esercizio **2.8****. Nel secondo caso, derivando sotto il segno di integrale si ha $\frac{1}{2y^{3/2}}\int_0^{+\infty} dx\,\sqrt{x}\cos x$. L'integrale è però divergente come mostra la seconda parte della proposizione **2.8.1** pag.24 e quindi la derivata non può essere eseguita. Esattamente come prima la contraddizione nasce dal fatto che non si era autorizzati a derivare sotto il segno di integrale.

Una volta capito il problema ci si pone la domanda: *Dato l'integale* $\int_a^{+\infty} dx f(x,y) \equiv G(y)$, *quali condizioni si possono imporre sulla funzione* f *e sul dominio* $[a,+\infty)\times[c,d]$ *affinché sia possibile passare al limite* $\lim_{y\to y_o}$ $y_o\in(c,d)$ *sotto il segno di integrale?*

Identica domanda ci si pone circa la derivazione sotto il segno di integrale.

Per quanto concerne lo scambio degli integrali ci si chiede se è valida la formula $\int_a^{+\infty}\big\{\int_c^d f(x,y)dy\big\}dx = \int_c^d\big\{\int_a^{+\infty} f(x,y)dx\big\}dy$.

Che anche in questo caso non sia vero in generale lo si constata osservando che

$\int_0^1\big\{\int_1^{+\infty}\frac{y-x}{(x+y)^3}dx\big\}dy = -\frac{1}{2}$ mentre $\int_1^{+\infty}\big\{\int_0^1\frac{y-x}{(x+y)^3}dy\big\}dx = -1$.

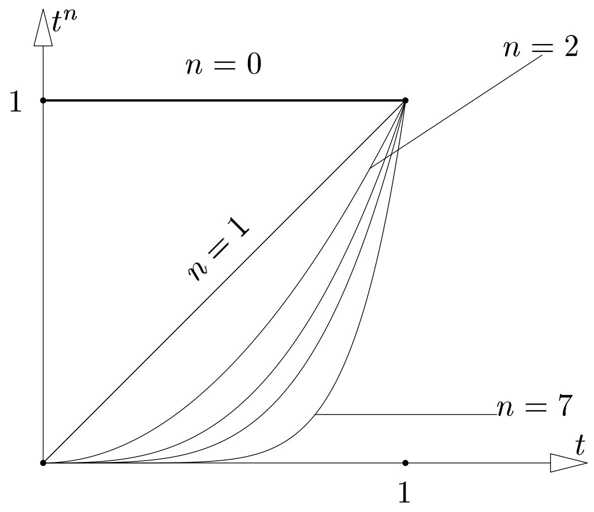
Nelle prossime righe cercheremo di rispondere alle tre domande poste innanzi e ciò verrà fatto attraverso 3 teoremi (**2.8**, **4.8**, **5.8**). Prima però abbiamo bisogno di fare una una breve digressione sulle *successioni di funzioni uniformemente convergenti.*

Cosa è una successione di funzioni è noto a tutti. Ad esempio si prenda la successione $\{f_n(t)\} = \{t^n\}$, $0\le t\le 1$ e n intero positivo o nullo. In altre parole per $n=0$ l'elemento della successione è dato dalla funzione identicamente uguale ad 1 e quindi $f_0(t)\equiv 1$. Se $n=1$ abbiamo $f_1(t)=t$ e via dicendo. La successione è quindi data dalle funzioni $(1,t,t^2,t^3,\ldots,t^n\ldots)$. Per ogni valore di $t=t_o$ abbiamo una successione numerica data da $(1,t_o,t_o^2,t_o^3,\ldots,t_o^n\ldots)$. Chiediamoci ora a cosa tende la successione $\{f_n(t_o)\}$ per $n\to+\infty$ ed al variare di $t_o\in[0,1]$ (si fissa t e si manda n all'infinito). Ad esempio prendiamo $t_o=0$ ed osserviamo che $\{f_n(0)\}=(1,0,0,\ldots,0,\ldots)$; ne concludiamo che $f_n(0)\to 0$ per $n\to 0$. La convergenza a 0 di $f_n(0)$ si può ovviamente codificare attraverso la definizione usuale ossia $\forall\ \varepsilon\ \exists\ n_\varepsilon$ *t.c.* $n>n_\varepsilon\ \Rightarrow |f_n(0)|<\varepsilon$ e dalla forma di $\{f_n(0)\}$ viene fuori che $n_\varepsilon=0$.

Se $t_o\in[0,1]$ ci si convince che il limite fa ancora zero ($t_o^n\to 0$ per $n\to+\infty$) ed inoltre (ovviamente) $\forall\ \varepsilon\ \exists\ n_{\varepsilon,t_o}$ *t.c.* $n>n_{\varepsilon,t_o}\ \Rightarrow |f_n(t_o)|<\varepsilon$. Volendo trovare (od il più delle volte dare una stima) di n_{ε,t_o} si ha $t_o^n<\varepsilon\Rightarrow n\ln t_o<\ln\varepsilon\Rightarrow n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln t_o}$ da cui $n_{\varepsilon,t_o}=[\frac{\ln\varepsilon}{\ln t_o}]+1$ ed effettivamente rimane la dipendenza da t_o. Salta immediatamente agli occhi dello studente/ssa accorto/a che se $t_o\to 1$ il precedente conto perde ogni significato. In altre parole $n_{\varepsilon,t_o}\to+\infty$ per $t_o\to 1$. *In Analisi questo fatto si codifica dicendo che la successione* $\{f_n(t)\}$ *non è uniformemente convergente in* $[0,1)$. Per $t=1$ la successione converge sempre ma al valore 1 ed n_ε è zero per ogni ε. La funzione costituente il limite della successione di funzioni è data da

$$f(t)\doteq\lim_{n\to+\infty} f_n(t)=\begin{cases}0 & t\neq 1\\ 1 & t=1\end{cases}$$

Si noti che mentre le funzioni $f_n(t)$ sono tutte continue in $[0,1]$, la funzione $f(t)$ è discontinua per $t=1$. La figura forse aiuterà la comprensione



A questo punto possiamo dare la definizione di *successione uniformemente convergente.*
Definizione *Data la successione* $\{f_n(x)\}$ *con* $x \in E$ *(*$E \subset \mathbf{R}$ *insieme arbitrario) supponiamo che per ogni* $x \in E$ *si abbia il limite per* $n \to +\infty$ *di* $f_n(x)$*. Definiamo* $f(x) \doteq \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$*. La successione* $\{f_n\}$ *si dice uniformemente convergente su* E *ad* $f(x)$ *se* $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon$ *t.c.* $n > n_\varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall\ x \in E$ *(*n_ε *va bene per tutto* E*).*

Come conseguenza possiamo scrivere che la successione è uniformemente convergente se $n > n_\varepsilon \Rightarrow \sup_{x\in E} |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.
Uno dei teoremi che ci servono a studiare gli argomenti che hanno originato questa digressione è dato da
Teorema 1.8 *Se la successione* $\{f_n(x)\}$, $x \in E$ *di funzioni continue converge uniformemente in* E *alla funzione limite* $f(x)$ *allora* f *pure è continua in* E*.*

Dimostrazione Dato $x_o \in E$ dobbiamo mostrare che $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_{\varepsilon,x_o}$ *t.c.* $|x - x_o| < \delta_{\varepsilon,x_o} \Rightarrow |f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$. Scriviamo allora $f(x) - f(x_o) = f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_o) + f_n(x_o) - f(x_o)$ ed osserviamo che:
1) $\forall\ \frac{\varepsilon}{3}\ \exists\ n_\varepsilon$ *t.c.* $n > n_\varepsilon \ \Rightarrow\ |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ per la convergenza della successione di funzioni per ogni $x \in E$
2) $\forall\ \frac{\varepsilon}{3} > 0\ \exists\ \delta_{(\varepsilon,x_o,n)}$ *t.c.* $|x - x_o| < \delta_{\varepsilon,x_o} \ \Rightarrow\ |f_n(x) - f_n(x_o)| < \frac{\varepsilon}{3}$. per la continuità di ciscuna $f_n(x)$
3) $\forall\ \frac{\varepsilon}{3}\ \exists\ n'_\varepsilon$ *t.c.* $n > n'_\varepsilon \ \Rightarrow\ |f(x_o) - f_n(x_o)| < \frac{\varepsilon}{3}$ per la convergenza della successione di funzioni come prima. Osserviamo però un fatto importante: $n'_\varepsilon = n_\varepsilon$ a causa della uniforme convergenza e quindi l'n di $f_n(x)$ può essere lo stesso di $f_n(x_o)$
Sommando le tre quantità se ne conclude che $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_{\varepsilon,x_o}$ *t.c.* $|x - x_o| < \delta_{\varepsilon,x_o} \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$. come volevamo.

Osservazione: i) nell'esempio esplicito di prima la funzione limite non era continua e quindi la convergenza non poteva essere uniforme. Infatti la formula $n_{\varepsilon,t_o} = 1 + [\frac{\ln\varepsilon}{\ln t_o}]$ dice esattamente questo ii) il δ di 2) dipende da anche da n e tale dipendenza rimane

A questo punto torniamo all'integrale improprio $F(y) = \int_a^\infty dx f(x,y)\ y \in S = [c,d]$ e diamo la seguente definizione (di qui fino all'esercizio **36.1.8**** escluso è materiale preso dal libro *G.E.Šilov Analisi Matematica, funzioni di una variabile edizioni mir 1978)*

Defnizione 1.8 L'integrale improprio che converge per ogni valore di $y \in S$ *è uniformemente convergente su* S *se:* $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon$ *t.c.* $p \geq n_\varepsilon \Rightarrow |\int_p^{+\infty} f(x,y)dx| < \varepsilon\ \forall\ y \in S$

Sia $\{h_k\}$ una successione tale che $h_k \nearrow +\infty$ e consideriamo la successione di funzioni $\{F_k(y)\}$

dove $F_k(y)=\int_a^{a+h_k}dxf(x,y)$; $F_k(y)-F_l(y)=\int_{a+h_k}^{a+h_l}dxf(x,y)$ con $k<l$. Dalla definizione di integrale uniformemente convergente se $k,l>k_o$ allora $\sup_{y\in S}|F_k(y)-F_l(y)|<2\varepsilon$ che è come dire che la successione di funzioni $\{F_k(y)\}$ converge uniformemente su S
Possiamo ora enunciare e dimostrare l'analogo del `Teorema 8.10, formula 8.35`
Teorema 2.8 *Sia $f(x,y)$ uniformemente continua in $[a,a+h]\times S$ per ogni $0<h<\infty$. Se l'integrale $\int_a^{+\infty}dxf(x,y)$ è uniformemente convergente su S allora la funzione $F(y)$ è continua su S.*
Dimostrazione La successione $\{F_k(y)\}$ è costituita da funzioni continue per $y\in S$ in quanto sono verificate le ipotesi del `Teorema 8.10`. Se l'integrale converge uniformemente allora la successione converge uniformemente su S e per il **Teorema 1.8** la funzione limite $F(y)$ è continua su S.
Essendo $F(y)$ continua si ha $\lim_{y\to y_o}\int_a^{+\infty}dxf(x,y)\doteq\lim_{y\to y_o}F(y)=F(\lim_{y\to y_o}y)=\int_a^{+\infty}dx\lim_{y\to y_o}f(x,y)=\int_a^{\infty}dxf(x,y_o)$ ossia si è passati al limite sotto il segno di integrale.

Come si vede dall'enunciato del precedente Teorema, la condizione (sufficiente) che serve per passare al limite dentro l'integrale è costituita dalla uniforme convergenza dell'integrale. Nel prossimo teorema diamo una condizione equivalente alla uniforme convergenza. L'utilità della condizione equivalente risiede nel fatto che essa introduce al criterio piú usato per stabilire la uniforme convergenza di un integrale improprio ossia il criterio della *maggiorante integrabile.*
Teorema 3.8 *L'integrale $\int_a^{+\infty}dxf(x,y)$, $y\in S$, converge uniformemente (secondo la definizione 1.8) su S se e solo se $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n$ t.c. $p>n,q>n\Rightarrow\ |\int_p^q dxf(x,y)|<\varepsilon\ \forall\ y\in S$ (Criterio di Cauchy)*
Dimostrazione
$\Rightarrow$ L'ipotesi è che l'integrale converga uniformemente. Prendiamo due valori $p>n_\varepsilon$ e $q>n_\varepsilon$ $q>p$ tali che $|\int_p^{+\infty}dxf(x,y)|<\frac{\varepsilon}{2}$ e $|\int_q^{+\infty}dxf(x,y)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Essendo $|\int_p^q dxf(x,y)|=|\int_p^{+\infty}dxf(x,y)-\int_q^{+\infty}dxf(x,y)|\le|\int_p^{+\infty}dxf(x,y)|+|\int_q^{+\infty}dxf(x,y)|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ da cui la tesi
$\Leftarrow$ Stavolta l'ipotesi è $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_\varepsilon$ *t.c.* $p>n_\varepsilon,q>n_\varepsilon\Rightarrow\ |\int_p^q dxf(x,y)|<\varepsilon\ \forall\ y\in S$. Avendo $\forall\ q>n_\varepsilon$ si può eseguire il limite per $q\to+\infty$ da cui la tesi.

Il criterio di Cauchy è alla base del seguente corollario.

Corollario 1.8 *Se la funzione $f(x,y)$ del precedente teorema verifica la maggiorazione $|f(x,y)|\le g(x)$ e $\int_a^{+\infty}dxg(x)<\infty$ allora l'integrale $\int_a^{+\infty}dxf(x,y)$ è uniformemente convergente rispetto a $y\in S$*

Dimostrazione $|\int_p^q dxf(x,y)|\le\int_p^q dxg(x)$ per ipotesi. Inoltre il criterio di Cauchy di convergenza degli integrali impropri enunciato nella **Proposizione 2.8.2** fa si che per ogni $p>n_\varepsilon$, $q>n_\varepsilon$ si abbia $|\int_p^q dxg(x)|<\varepsilon$.

Poiché $\lim_{y\to0}F(y)\neq\int_0^{+\infty}\lim_{y\to0}\sin(x^2y)dx=0$, il **Teorema 2.8** ci dice che l'integrale $\int_0^{+\infty}\sin(x^2y)dx$ non può essere uniformemente convergente per $y\in[-a,a]$ con qualsiasi $a>0$ perché se lo fosse potremmo passare al limite $y\to0$ sotto il segno di integrale ed invece sappiamo che tale passaggio conduce ad una contraddizione. Usiamo il **Teorema 3.8** e facciamo vedere $\exists\ \varepsilon>0$ *t.c.* $\forall\ n\ \exists\ p>n,q>n,y\in S,$ *t.c.* $|\int_p^q dx\sin(x^2y)|\ge\varepsilon$. Infatti l'integrale $F(y)$ si può riscrivere come $\frac{1}{\sqrt{|y|}}\frac{y}{|y|}\int_0^{+\infty}dx\sin x^2$. Dato un intero n qualsiasi prendiamo $p_n=\sqrt{2\pi k_n}$ $q_n=\sqrt{2\pi k_n+\pi}$ (k_n intero) tali che $p_n>n$ e $q_n>n$. L'integrale $\int_{p_n}^{q_n}dx\sin x^2$ è una quantità che chiamiamo I_n positiva che tende a zero per $n\to+\infty$ (perché). A questo punto troviamo quel y_n tale che $\frac{I_n}{\sqrt{|y_n|}}\ge\varepsilon$ ossia $|y_n|=(\frac{I_n}{\varepsilon})^2$ e quindi l'intgrale che definisce $F(y)$ non è (né poteva essere) uniformemente convergente.

Studiamo ora la questione della derivazione sotto il segno di integrale improprio. Abbiamo il seguente Teorema

Teorema 4.8 *È data la funzione* $F(y)=\int_a^{+\infty}dxf(x,y)$ *dove* $y\in S=[c,d]$ *se: i)* $f_y(x,y)$ *è continua in* $[a,a+h]\times S$ *per ogni* $h>0$ *ii)* $\int_a^{+\infty}dxf_y(x,y)$ *converge uniformemente rispetto ad* $y\in S$ *iii)* $\int_a^{+\infty}dxf(x,c)$ *converge allora* $F(y)$ *è derivabile rispetto ad* y *ed inoltre vale l'uguaglianza* $\frac{d}{dy}\int_a^{+\infty}dxf(x,y)=\int_a^{+\infty}dx\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$

Va notato come per la prima derivata dell'ultima riga si usa la notazione relativa alle funzioni di una variabile mentre nella seconda si usa la notazione per funzioni di due o più variabili. La cosa non è casuale in quanto nel primo caso, essendo $f(x,y)$ integrata rispetto ad x, rimane una funzione ($F(y)$ appunto) di una sola variabile. Nel secondo caso invece l'integrale viene dopo l'esecuzione della derivata e quindi è giusto usare l'altra notazione.

Per la dimostrazione facciamo uso di un Lemma che a sua volta fa uso di un altro Lemma sulle successioni uniformemente convergenti che è il seguente

Lemma 1.8 *Data la successione di funzioni integrabili* $\{x_n(t)\}$ $t\in[a,b]$ *che converge uniformemente su* $[a,b]$ *ad una funzione* $g(t)$*. Allora la funzione* $g(t)$ *è anch'essa integrabile ed inoltre vale la uguaglianza* $\int_a^b dtg(t)\doteq\int_a^b dt\lim_{n\to+\infty}x_n(t)=\lim_{n\to+\infty}\int_a^b dtx_n(t)$

Lemma 2.8 *Sia data* $\{x_n(t)\}$ $t\in[a,b]$*, una successione di funzioni derivabili con derivata continua in* (a,b) *e convergenti in almeno un punto* $t_o\in[a,b]$*. Supponiamo che la successione* $\{x_n'(t)\}$ *delle derivate converge uniformemente su* $[a,b]$ *ad una funzione* $g(t)$ *(continua). Allora la successione* $\{x_n(t)\}$ *converge uniformemente su* $[a,b]$ *ad una funzione* $x(t)$ *che è derivabile con continuità e tale che* $x'(t)=g(t)\doteq\lim_{n\to+\infty}x_n'(t)$*.*

La dimostrazione dei due lemmi verrà data dopo la prossima.

Dimostrazione del Teorema 4.8 Definiamo $F_n(y)\doteq\int_a^{a+h_n}dxf(x,y)$. Ciascuna $F_n(y)$ è definita sull'insieme limitato $[a,a+h_n]\times S$ ed inoltre, essendo $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ continua sull'insieme dato, verifica le ipotesi della seconda parte del `Teorema 8.10` e si ha $F_n'(y)=\frac{d}{dy}\int_a^{a+h_n}dxf(x,y)=\int_a^{a+h_n}dx\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$. Quindi abbiamo definita la successione $\{F_n'(y)\}$ attraverso la derivata dentro l'integrale. Per ipotesi la successione $\{F_n'(y)\}$ converge uniformemente sull'intervallo $[c,d]$ e $\{F_n(a)\}$ converge sempre per ipotesi. Il Lemma **2.8** implica che la successione $F_n(y)$, converge uniformemente sull'intervallo $[c,d]$, ad una funzione che chiameremo $F(y)$. Sempre il Lemma **2.8** implica che $F(y)$ è derivabile e $F'(y)=\lim_{n\to+\infty}\int_a^{a+h_n}dx\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ che è come dire: si è derivato sotto il segno di integrale.

Dimostrazione del Lemma 2.8 Per il Teorema fondamentale del calcolo, usando il fatto che x_n è derivabile con continuità, si ha $x_n(t)-x_n(t_o)=\int_{t_o}^t x_n'(\tau)d\tau$. Per il Lemma **1.8** la *successione di funzioni* $\{x_n(t)-x_n(t_o)\}$ converge uniformemente sull'intervallo $[a,b]$ ed inoltre, per ipotesi, la *successione numerica* $\{x_n(t_o)\}$ converge (essendo numerica non ha senso dire uniforme). Di conseguenza la successione $\{x_n(t)\}$ converge uniformemente ad una funzione che chiameremo $x(t)$. Passando al limite nella uguaglianza $x_n(t)-x_n(t_o)=\int_{t_o}^t x_n'(\tau)d\tau$ ed applicando di nuovo il Lemma **1.8** (dove?) abbiamo $x(t)-x(t_o)=\int_{t_o}^t g(\tau)d\tau$. Dunque fino ad ora abbiamo dimostrato che esiste la funzione $x(t)\doteq\lim_{n\to+\infty}x_n(t)$. Per concludere il Lemma dobbiamo far vedere che è derivabile e che la sua derivata coincide con $g(t)$.

Essendo $g(t)$ continua, la funzione $\int_{t_o}^t d\tau g(\tau)$ è derivabile e quindi è derivabile anche la funzione $x(t)$ e quindi vale la uguaglianza $x'(t) = g(t) = \lim_{n\to+\infty} x'_n(t)$.

Dimostrazione del Lemma 1.8 La ipotesi è che la successione di funzioni integrabili $\{x_n(t)\}$ converga uniformemente in $[a,b]$ ad una funzione $g(t)$. Come prima cosa vogliamo mostrare che $g(t)$ è integrabile e quindi dobbiamo far vedere che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione $\Pi_{\varepsilon,N}$ dell'intervallo $[a,b]$ tale che $\sum_{i=1}^N (S_i - s_i)(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$ ($S_i = \sup_{t_{i-1}\le t\le t_i} g(t)$ e $s_i = \inf_{t_{i-1}\le t\le t_i} g(t)$). Per definizione di estremo superiore ed inferiore si ha $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$ *t.c.* $S_i - \varepsilon < g(t_i^*) \le S_i$ e $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \bar t_i \in [t_{i-1}, t_i]$ *t.c.* $s_i \le g(\bar t_i) < s_i + \varepsilon$. Essendo le funzioni $x_n(t)$ integrabile sono limitate e quindi S_i s_i sono ambedue limitati. Quindi esistono due punti t_i^* e $\bar t_i$ tali che $S_i < g(t_i^*) + \varepsilon$ e $s_i > g(\bar t_i) - \varepsilon$.
Essendo $\{x_n\}$ uniformemente convergente abbiamo che $\forall \varepsilon' > 0\ \exists\ n_{\varepsilon'}$ *t.c.* $n > n_{\varepsilon'}\ \Rightarrow\ g(t) - \varepsilon' < x_n(t) < g(t) + \varepsilon\ \forall\ t \in [a,b]$ e quindi abbiamo $S_i < x_n(t_i^*) + \varepsilon + \varepsilon'$ $s_i > x_n(\bar t_i) - \varepsilon - \varepsilon'$.
Da ciò segue che $\sum_{i=1}^N (S_i - s_i)(t_i - t_{i-1}) < \sum_{i=1}^N (x_n(t_i^*) - x_n(\bar t_i) + 2\varepsilon + 2\varepsilon')(t_i - t_{i-1}) < \sum_{i=1}^N ((M_i^{(n)} - m_i^{(n)}) + 2\varepsilon + 2\varepsilon')(t_i - t_{i-1})$.
$M_i^{(n)} = \sup_{t_{i-1}\le t\le t_i} x_n(t)$, $m_i^{(n)} = \inf_{t_{i-1}\le t\le t_i} x_n(t)$; La integrabilità di $x_n(t)$ implica che $\forall\ \varepsilon'' > 0\ \exists\ \Pi_{(\varepsilon'',N_o)}$ *t.c.* $\sum_{i=1}^{N_o} (M_i^{(n)} - m_i^{(n)})(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon''$ e quindi $\sum_{i=1}^{N_o} (S_i - s_i)(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon'' + (b-a)(\varepsilon + \varepsilon')$ e quest'ultima quantità può essere presa piccola a piacere. ■
Osservazione La uniforme convergenza entra in $S_i < x_n(t_i^*) + \varepsilon + \varepsilon'$, $s_i > x_n(\bar t_i) - \varepsilon - \varepsilon'$ laddove la n è la stessa.

Veniamo ora alla questione dello *scambio dell'ordine di integrazione per integrali doppi.* In questo caso abbiamo il

Teorema 5.8 *Sia data $f(x,y)$ continua nell'insieme $[a, a+h] \times [c,d]$ $h > 0$. Se l'integrale $\int_a^{+\infty} dx f(x,y)$ è uniformemente convergente per $c \le y \le d$ allora la funzione $F(x) \doteq \int_c^d f(x,y) dy$ ha un integrale convergente sull'intervallo $[a,+\infty)$ ed inoltre $\int_c^d dy \{\int_a^{+\infty} f(x,y) dx\} = \int_a^{+\infty} dx \{\int_c^d f(x,y) dy\}$*

Dimostrazione Costruiamo la successione di funzioni $\{F_n(y)\}$ $y \in [c,d]$ dove $F_n(y) = \int_a^{a+h_n} dx f(x,y)$. Per ipotesi $F_n(y)$ converge uniformemente su $[c,d]$ ad $F(y)$ e quindi per il **Lemma 1.8** si può integrare mantenendo la convergenza ossia $\int_c^d dy F_n(y) \to \int_c^d dy F(y) = \int_c^d dy \{\int_a^{+\infty} dx f(x,y)\}$. Del resto $\int_c^d dy F_n(y) = \int_a^{a+h_n} dx \{\int_c^d dy f(x,y)\}$ (ci vuole un teorema sullo scambio di integrazione per integrali di Riemann) e quindi $\lim_{n\to+\infty} \int_c^d dy F_n(y) = \lim_{n\to+\infty} \int_a^{a+h_n} dx \{\int_c^d dy f(x,y)\} = \int_a^{+\infty} dx \{\int_c^d dy f(x,y)\}$.

36.1.8 Es:** Stuiare l'uniforme convergenza dell'integrale $\int_0^{+\infty} x \sin(x^3 - ax) dx$ ([WW] pag. 81 dove lo si attribuisce a de la Vallée Poussin)

36.2.8 Es:** Dimostrare che l'integrale $\int_0^{+\infty} e^{e^{-ia}(x^3 - nx)} dx$ è uniformemente convergente nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ([WW] pag. 81 dove lo si attribuisce a Stokes)

37.8** Utilizzando quanto scritto prima del precedente esercizio si calcoli $\int_0^{+\infty} dx \frac{\sin x}{x}$ (suggerimento: si definisca la funzione $F(a) \doteq \int_0^{+\infty} dx e^{-ax} \frac{\sin x}{x}$; si verifichi che l'integrale è uniformemente convergente per $a \ge 0$. Si verifichi che $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin x$ è uniformemente convergente per $a \ge a_o > 0$ e poi si proceda come nel precedente esercizio; anche in questo caso non è possibile trovare la primitiva utilizzando i metodi tradizionali. Attraverso la teoria dell'integrazione di funzioni di variabile complessa si troverà un altro modo di arrivare allo steso risultato.)

38.8** Dimostrare che l'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha t - \cos \beta t}{t^2} dt$ $(0 \le \alpha \le 1,\ 0 \le \beta \le 1)$ converge uniformemente rispetto ad α per $0 \le \alpha \le 1$ ed utilizzando il **Teorema 5.8** calcolarlo.

39.8 Calcolare $\int_0^1 dx \big(\int_\alpha^\beta x^t dt\big)$

40.8*** In relazione agli esercizi **22.1.5*****, **24.1.5**, **53.5**, supponendo che esista un insieme, detto C, che verifica le seguenti proprietà: 1) C è compatto 2) è non numerabile 3) nessun intervallo è sottoinsieme di C, si dia un esempio di funzione per la quale $T(f)$ è costituito da una infinità non–numerabile di punti (diciamo $\overline{y}$) "dati da veri flessi". In altre parole si chiede che esista $\overline{x} \in Dom(f)$ tale che $f'(\overline{x}) = 0$, che esista un intervallo (a, b) tale che $a < x < b$ e $f'(x) > 0$ per $x \in (a, b) \backslash \{\overline{x}\}$ e che l'insieme dei punti $\overline{y}$ per cui $\overline{y} = f(\overline{x})$ è una infinità non–numerabile. Si suppone che $C \subset Dom(f)$

41.8** Data una funzione $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ integrabile secondo Riemann. Dimostrare che l'insieme dei punti di continuità è ovunque denso [4.8]

42.8** Data una funzione $f\colon (0, 1] \to \mathbf{R}$ monotona tale che $\int_0^1 x^\alpha f(x)dx$ esiste. Allora $\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha+1} f(x) = 0$ [5.8]

43.8** Dimostrare che se una funzione $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ ammette derivata integrabile secondo Riemann allora è derivabile la funzione $\int_a^x dy f'(y)$ e la sua derivata è $f'(x)$. Se supponessimo che $f'(x)$ è continua in $[a, b]$ sarebbe conseguenza del teorema fondamentale del calcolo `pag.363 del libro di testo`

44.8** Siano date le funzioni degli esercizi **6.5**** e **63.5*****. Si dica in quali punti è derivabile la funzione $F(x) = \int_0^x dy f(y)$ e se è una primitiva della funzione $f(x)$

45.8** Siano date due funzioni continue $f\,, g\colon [a, +\infty)$ tali che $\lim_{x\to+\infty} |f(x) - g(x)| = 0$. Dimostrare ovvero confutare con un controesempio che se esiste $\int_a^\infty f(x)dx$ allora esiste pure $\int_a^\infty g(x)dx$

46.8** Si dia un esempio di funzione integrabile secondo Riemann ma monotona in nessun intervallo. Al contrario se una funzione è monotona e limitata in un intervallo allora è integrabile secondo Riemann.

47.8** Sia $f\colon [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ una funzione continua e non–negativa tale che $\int_0^{+\infty} dx f(x) = +\infty$. Allora esiste x_0 tale che $\sum_{k=1}^{+\infty} f(kx_0) = +\infty$. [da: 1) *K.L.Chung* – *A.M.M.* Vol.64, No.7 (Aug.–Sept., 1957), 510, 2) *K.L.Chung; A.R.Hyde; N.J.Fine A.M.M.* Vol.64, No.2 (Feb., 1957), 119–120]

48.8** Se $f(x) \searrow 0$ e l'integrale $\int^{+\infty} f(x)dx$ converge, allora converge pure $\int^{+\infty} xf'(x)dx$.
1) Si trovi una funzione positiva f tale che: 1) $f \to 0$ in modo non monotono, 2) $\int^{+\infty} f(x)dx < \infty$, $\int^{+\infty} xf'(x)dx$ non converge ad un numero finito.
2) Si trovi una funzione non negativa f tale che: 1) $f \searrow 0$, 2) $\int^{+\infty} f(x)dx = +\infty$, $\int^{+\infty} xf'(x)dx$ converge ad un numero finito

49.8*** Dimostrare che esistono funzioni $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ e $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivabili tali che $f'g'$ non è una derivata. [Suggerimento: usare la proprietà di Darboux delle derivate e volendo l'esercizio **22.5**]. È l'esercizio E3329 in *American Mathematical Monthly* vol.98, No.3.(Mar.,1991), pp.267–268. Va detto che la soluzione, qui riportata, è a sua volta ripresa da una soluzione analoga data da Witold Wilkosz, "Some properties of derivative

---

[4.8] Dal libro G.Pòlya–G.Szegö *Problems and Theorems in Analysis I* Springer–Verlag Ed. pag.77 n.**108**

[5.8] Dal libro G.Pòlya–G.Szegö *Problems and Theorems in Analysis I* Springer–Verlag Ed. pag.77 n.**112** functions", *Fundamenta Mathematicae*,2 (1921), 145–154]. È doveroso ricordare che Wilkosz fu ucciso dai nazisti nel 1941 (vedi *http://www.mat.uniroma2.it/ perfetti/eserci/funmat.jpg*). Sullo stesso argomento si può vedere il bell'articolo di A.M.Bruckner, J.Marik, C.E.Weil "Some Aspects of Products of Derivatives, *American Mathematical Monthly*, vol.99, Issue 2 (Feb.., 1992), 134–145]

• L'esercizio mostra che la classe delle derivate non costituisce un'algebra.

50.8 Utilizzando metodi del tutto elementari, trovare al variare di n il valore di $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan^n x}$ (non servono le derivate).

51.8** Sia data una funzione $F(x) \geq 0$ integrabile nell'intervallo $[0, a]$ tale che $(\int_0^t F dx)^2 \geq \int_0^t F^3 dx$. Dimostrare che $\int_0^a (F - x)^2 dx \leq \frac{a^3}{3}$ [Suggerimento: usare la disuguaglianza di Hölder $|\int_0^t FGdx| \leq (\int_0^t |F|^p dx)^{1/p} (\int_0^t |F|^q dx)^{1/q}$ dove $(1/p)+(1/q)=1$. È l'esercizio 78–18 di A.Meir in *SIAM Review* vol.21, No.4.(Oct.,1979), pp.567–568.]

52.8* Calcolare $\int_0^1 \{\frac{1}{x}\} dx$ e $\int_0^1 \{\frac{1}{x}\}\{\frac{1}{1-x}\} dx$ [problema U21 di *Mathematical Reflections* n.4 2006,]

53.8* Sia data una funzione continua $f: [0, 1] \to \mathbf{R}$ non negativa e avente la concavità rivolta verso l'alto. Dimostrare che $2\int_0^1 x^2 f(x) dx + \frac{1}{12} \leq (\int_0^1 f(x) dx)^2$ [è il problema num. 11133 pubblicato da *American Mathematical Monthly*]

54.8** Sia data la funzione $f: [0, 1] \to \mathbf{R}$ tale che ammette limite in ogni punto. Dimostrare che la funzione è integrabile secondo Riemann. [da *American Mathematical Monthly* vol.77, No.4.(Apr.,1970), p.411–412] problem 5667

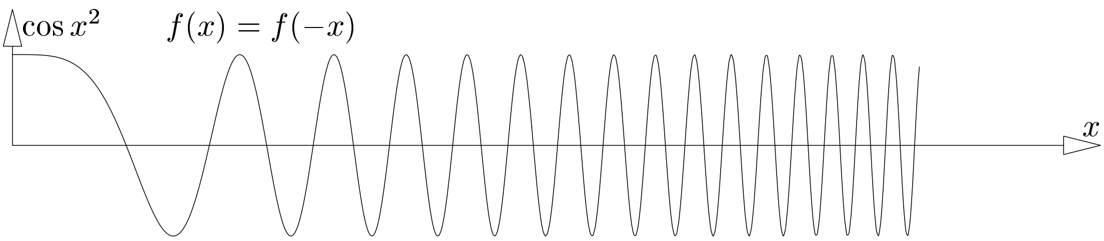
SOLUZIONI

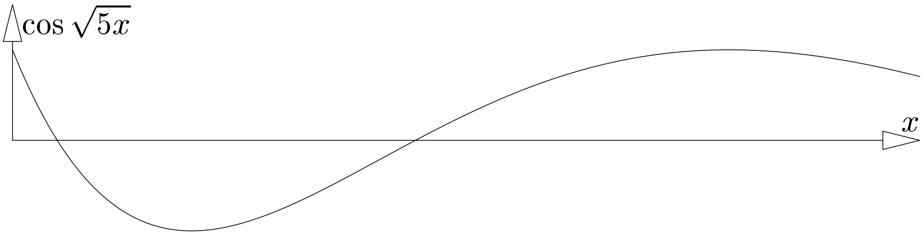
1.8 Ciascun gruppo di risultati corrisponde ad una riga di esercizi. C sta per converge, D per diverge

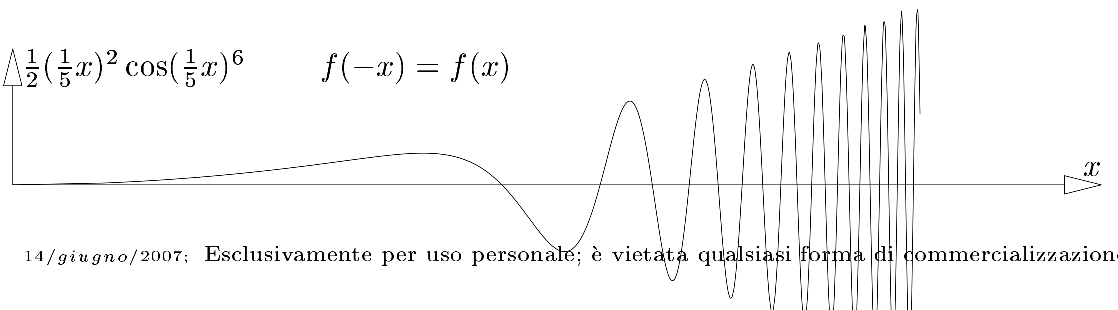
I) C, D, C, D per ogni valore di α e β II) C, D, C III) C per $\alpha > \frac{1}{3}$, per $\alpha = 1$ il valore è dato da $1-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$, C per $\alpha < -\frac{1}{2}$, C ed il valore dell'integrale è zero IV) C per $\alpha > 0$ e per $\alpha = 1$ il valore è dato da $-\frac{2}{15}$, C per $\alpha(\gamma^2-1) < 4$, C per $(\alpha > \frac{1}{4}\wedge\frac{1}{6}) \vee \gamma = \frac{2}{3}$, V) C, C per $\alpha > \frac{1}{2}$ VI) C per $1 < \alpha < 3$, C VII) C per $\alpha > 1$, C per $(\gamma, \alpha) = (1, -\frac{1}{2})$, VIII) C per $\alpha < 0$, D, C IX) C per $1 < \alpha < \frac{3}{2}$, C per $\alpha < 1$, C per $\alpha < -\frac{1}{2}$, C X) C per $\alpha > 0$, C per $\alpha > 1$, C per $0 < a < 2$, XI) C per $(\alpha < -1 \ \wedge \ \gamma < \frac{1}{3}) \vee (\alpha < 1 \ \wedge \ 1+\alpha = 3\gamma)$, C, C ed il valore è $2\ln 2$, XII) C per $-2 < a < 4$, C per $\alpha < -1 \wedge \ \alpha+\gamma > 0$, XIII) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \ln\sin x = -\frac{\pi}{2}\ln 2$, $\int_0^{\pi} dx \ln\sin x = -\pi\ln 2$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \ln\cos x = -\frac{\pi}{2}\ln 2$, $\int_1^{\infty} \frac{dx \ln x}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pi}{2}\ln 2$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cot x \ dx = \frac{\pi}{2}\ln 2$, $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}\ln 2$, $\int_0^{\pi} dx \ \ x\ln\sin x = -\frac{\pi^2}{2}\ln 2$, $\int_0^{2\pi} dx \ \ \ln\cos^2\frac{x}{2} = -4\pi\ln 2$, $\int_0^{\infty}\frac{dx \ln x}{1+x^2} = 0$, XIV) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx = \frac{\pi}{8}\ln 2$, $\int_0^1 dx \ \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} = \frac{\pi}{8}\ln 2$, $\int_0^{+\infty} dx \ \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}\ln 2$, $\int_0^1 dx \frac{\arctan x}{1+x} = \frac{\pi}{8}\ln 2$, $\int_0^{\pi/4} dx \frac{x\,dx}{2+\cos(2x)+\sin(2x)} = \frac{\pi}{4}\ln 2$, XV) $\int_0^{\pi} dx \frac{x\sin x}{1+\sin^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2})$, $\int_0^{\pi} dx \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x} = \frac{\pi^2}{4}$, $\int_{-1}^{1} dx \frac{\arccos x}{1+x^2} = \frac{\pi^2}{4}$

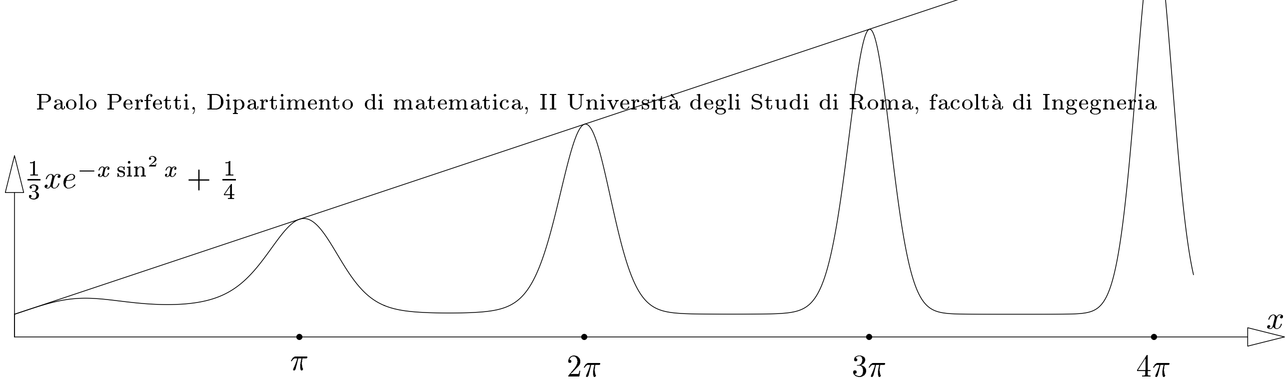
2.8 C D C per $\gamma > 1$, C C C D D C D D D

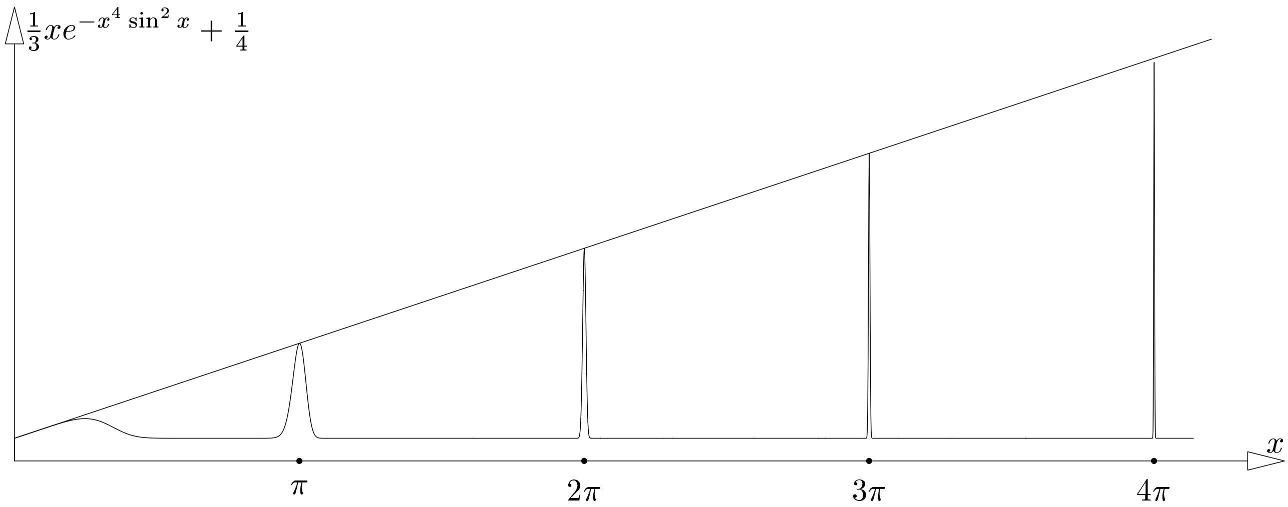
Qui di seguito sono riportati i grafici di alcune funzioni

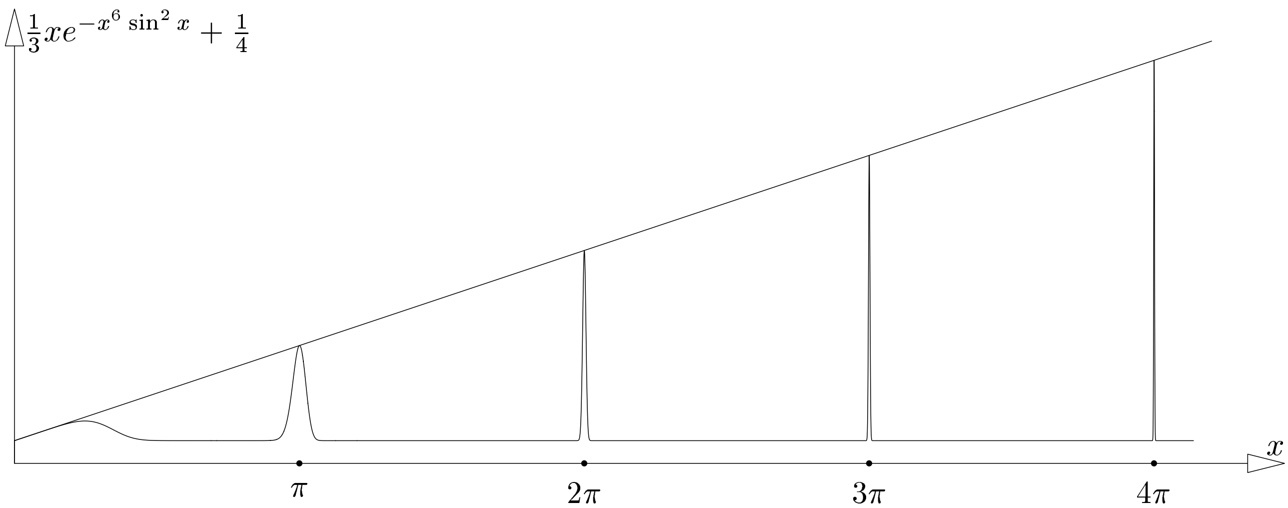


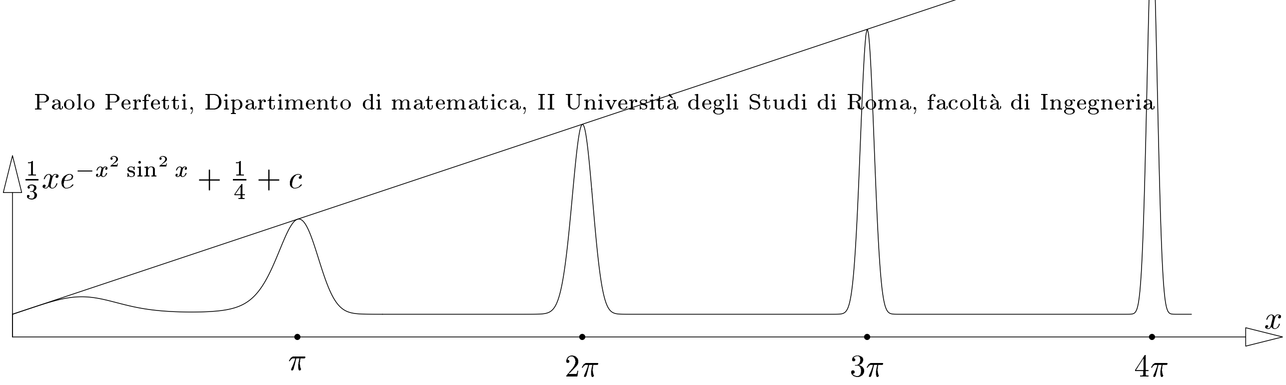


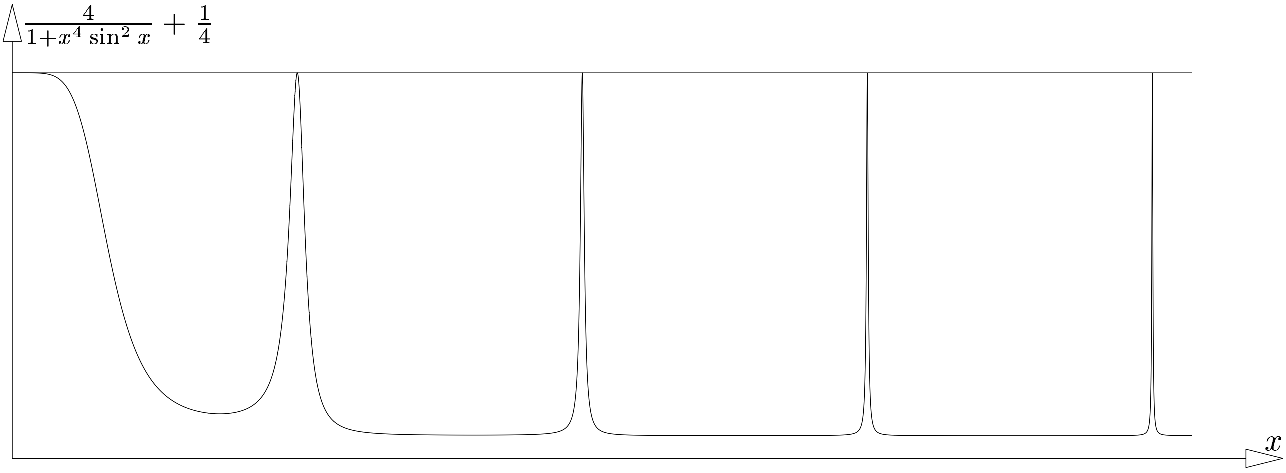



$\frac{1}{3}xe^{-x\sin^2 x}+\frac{1}{4}$
x
π
2π
3π
4π


$\frac{1}{3}xe^{-x^4\sin^2 x}+\frac{1}{4}$
x
π
2π
3π
4π


$\frac{1}{3}xe^{-x^6\sin^2 x}+\frac{1}{4}$
x
π
2π
3π
4π

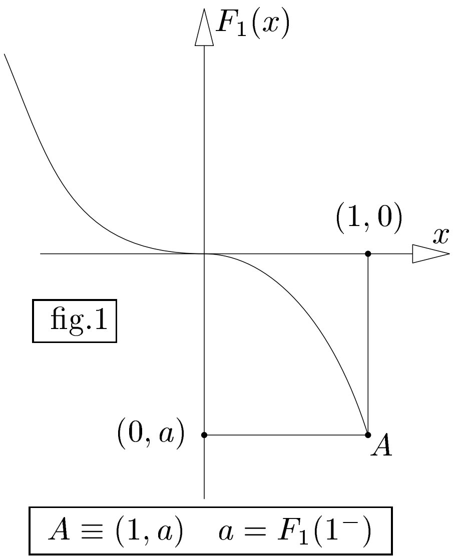


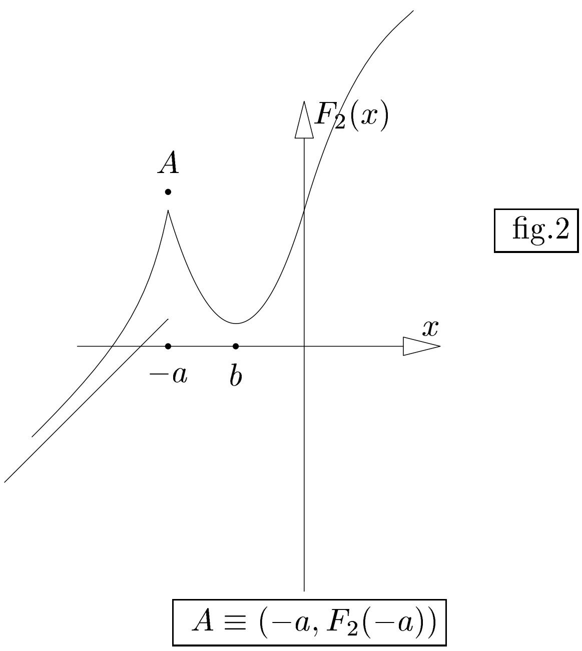


3.8 Converge per $(\alpha < -1 \ \wedge \ \beta < -1) \ \vee \ (\alpha > -1 \ \wedge \ \beta > 2(\alpha+1))$.

4.8 Nel primo caso la funzione è differenziabile ovunque mentre nel secondo caso lo è solo nei punti che non stanno su uno degli assi cartesiani.

5.8





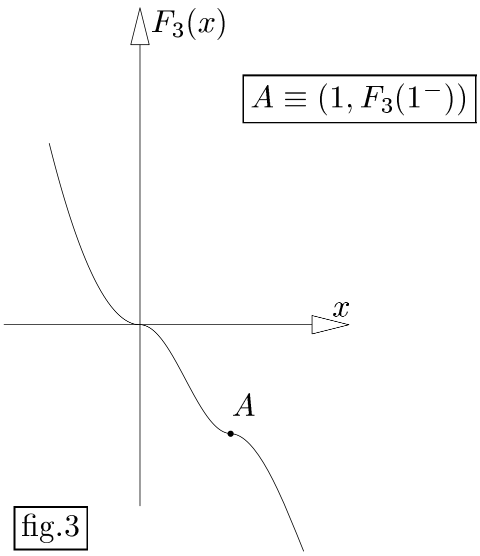


fig.3

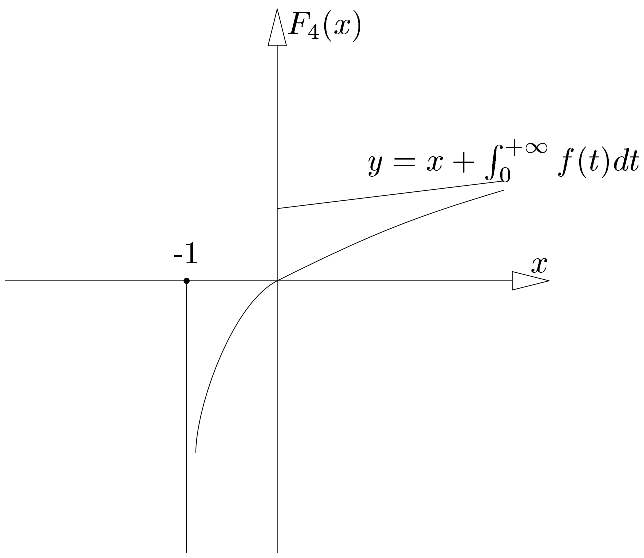


fig.4

5.8 $F_6(x) = \int_0^x dt(1 - \cos \frac{1}{t})$
È alquanto problematico disegnare il grafico della funzione data

6.8 Un esempio della funzione cercata è $f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

7.8 R.: $\frac{1}{2}$

10.8 A meno di un centesimo è $\frac{1}{24}$; a meno di un milionesimo è $\frac{111}{5176}$.

11.8 Trattandosi di integrali indefiniti, tutte le funzioni sono definite a meno di una costante I) $\mathcal{I}(\tan x) = -\ln|\cos t|$, II) $\mathcal{I}(\frac{1}{\sin x}) = \ln|\tan \frac{x}{2}|$, III) $\mathcal{I}(\tan^2 x) = \tan x - x$, IV) $\mathcal{I}(\frac{1}{x^4-1}) = \frac{1}{4}\ln\frac{|x-1|}{|x+1|} - \frac{1}{2}\arctan x$, V) $\mathcal{I}(\frac{1}{x^4+1}) = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x+1) + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x-1)$, VI) $\mathcal{I}(\ln(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})) = x\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}) + \frac{1}{2}\arcsin x$, VII) $\mathcal{I}((1+a\cos x)^{-1}) = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\log\left[\frac{|a+\cos x+\sqrt{a^2-1}\sin x|}{|1+a\cos x|}\right]$ se $a > 1$ mentre se $0 < a < 1$ l'integrale è $\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\arctan(\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}}\tan\frac{x}{2})$, VIII) $\mathcal{I}(\arctan\sqrt{x}) = x\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan\sqrt{x}$, IX) $\mathcal{I}(\frac{1}{x}\sqrt{3-x^2}) = \sqrt{3-x^2} + \sqrt{3}\ln\frac{x}{\sqrt{3}+\sqrt{3-x^2}}$, X) $\mathcal{I}((\cos x+\sin x)^{-1}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{|\tan\frac{x}{2}+\sqrt{2}-1|}{|\tan\frac{x}{2}-\sqrt{2}+1|}$, XI) $\mathcal{I}(\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}) = \sqrt{x^2+x} + \frac{1}{2}\ln(2x+1+2\sqrt{x^2+x})$, XII) $\mathcal{I}(\frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}) = \sqrt{1+x^2}\arctan x - \ln(x+\sqrt{1+x^2})$, XIII) $\mathcal{I}((\arcsin x)^2) = x(\arcsin x)^2 + 2\arcsin(x\sqrt{1-x^2}) - 2x$, XIV) $\mathcal{I}(x(\arctan x)^2) = \frac{1+x^2}{2}(\arctan x)^2 - x\arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$, XV) $\mathcal{I}(\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}) = \frac{1}{2}\arcsin x - \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}$, XVI) $\mathcal{I}(\frac{1}{1+\sqrt{1+x}}) = 2\sqrt{1+x} - 2\ln(1+\sqrt{1+x})$, XVII) $\mathcal{I}(\frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}) = 2\sqrt{x-2} + \sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{x-2}{2}}$, XVIII) $\mathcal{I}(\frac{1}{x\sqrt{x+1}}) = \ln\frac{|\sqrt{1+x}-1|}{|\sqrt{1+x}+1|}$, XIX) $\mathcal{I}(\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}) = \sqrt{x^2-1} + \ln(x-\sqrt{x^2-1})$, XX) $\mathcal{I}(\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}) = 2\arcsin\sqrt{x}$, XXI) $\mathcal{I}(\frac{x+1}{x(1+xe^x)}) = \ln\frac{|xe^x|}{|1+xe^x|}$, XXII) $\mathcal{I}(\frac{x^2-x+1}{\sqrt{(x^2+3)^2}}) = x + \ln(x^2+3) - \frac{2}{3}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}$, XXIII) $\mathcal{I}(\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}) = \sqrt{(a-x)(x-b)} - (a-b)\arctan\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}$, XXIV) $\mathcal{I}(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}) = \ln|\sin x+\cos x|$, XXV) $\mathcal{I}(\frac{x^7}{(1-x^2)^5})$ È vivamente sconsigliato l'uso dei fratti semplici. Se si procedesse integrando per parti si otterrebbe $\frac{1}{8}\frac{4x^6-6x^4+4x^2-1}{(1-x^2)^4}+C$ mentre attraverso la sostituzione $x = \sin t$ si perviene all'integrale $\frac{x^8}{8(1-x^2)^4} + C$. Si spieghi questa apparente contraddizione, XXVI) $\mathcal{I}(\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}) = \sqrt{x+x^2} + \ln(x+\sqrt{x+x^2})$,

XXVII) $\mathcal{I}(\frac{\ln(1+x)-\ln x}{x(x+1)}) = -\frac{1}{2}\ln^2(1+\frac{1}{x})$, XXVIII) $\mathcal{I}(\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}) = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\frac{|x^2(x-2)^5|}{|(x+2)^3|}$, XXIX) $\mathcal{I}(\frac{x^3-1}{4x^3-x}) = \frac{1}{4}x+\ln|x|-\frac{7}{16}\ln|2x-1|-\frac{9}{16}\ln|2x+1|$, XXX) $\mathcal{I}(\frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}) = \frac{x^2}{2}+\ln\frac{|x(x-2)\sqrt{(x-1)(x+3)^2}|}{|x+2|}$, XXXI) $\mathcal{I}(\frac{\sqrt{2-x+x^2}}{x^2}) = -\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{4-x-2\sqrt{2}\sqrt{2-x-x^2}}{3x}-\frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x^2}-\arcsin\frac{2x+1}{3}$, XXXII) $\mathcal{I}(\frac{1}{x^2}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{x-1}}) = -\frac{1}{x}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{x-1}})+\frac{1}{2}\arctan\sqrt{x-1}+\frac{1}{4}\ln\frac{x(1+\sqrt{x-1})^2}{(x-1)^2}$, XXXIII) $\mathcal{I}((2-x)\ln(x^2+8x+17)) = \frac{1+x}{2}\ln(x^2+8x+17)+4\arctan(x+4)+\frac{x^2-16}{2}$, XXXIV) $\mathcal{I}(\frac{\arcsin x}{x^2}) = \log\frac{|1-\sqrt{1-x^2}|}{|x|}-\frac{\arcsin x}{x}$, XXXV) $\mathcal{I}(\frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}) = \arctan(\tan^2 x)$, XXXVI) $\mathcal{I}(\frac{1+x^4}{1+x^2}) = \arctan x+\frac{1}{3}\arctan x^3$, XXXVII) $\mathcal{I}(\frac{1}{2x\sqrt{x-1}\arccos(1/\sqrt{x})}) = \ln(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}})$, XXXVIII) $\mathcal{I}(\frac{1}{a+bx^2}) = \frac{1}{a}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\arctan(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}x)$, se $ab>0$ mentre se $ab<0$ l'integrale è $\frac{a}{2|a|\sqrt{-ab}}\ln\frac{|\sqrt{|a|}+x\sqrt{|b|}|}{|\sqrt{|a|}-x\sqrt{|b|}|}$, XXXIX) $\mathcal{I}(\sqrt{(x-a)(b-x)}) = \frac{1}{8}(b-a)|b-a|\arcsin\frac{b+a-2x}{b-a}+\frac{1}{4}\sqrt{(x-a)(b-x)}(2x-b-a)$, XL) $\mathcal{I}(\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}) = \frac{2(b-a)}{|b-a|}\arcsin\frac{2x-a-b}{b-a}$, XLI) $\mathcal{I}(\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}) = \frac{1}{4}\arcsin(\frac{x}{a})+\frac{1}{4a}\sqrt{(a+x)(a-x)}-\frac{1}{4a}(a-x)\sqrt{(a+x)(a-x)}$, XLII) $\mathcal{I}(\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}) = -\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-2\arctan\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$, XLIII) $\mathcal{I}((x^5-1)^{-1}) = \frac{1}{5}\ln|x-1|-\frac{1}{20}\ln(x^4+x^3+x^2+x+1)+\frac{\sqrt{5}}{20}\ln\frac{x^2+b'x+1}{x^2+bx+1}-\frac{\sqrt{2}}{10}\sqrt{5-\sqrt{5}}\arctan(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}(2x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}))-\frac{\sqrt{2}}{10}\sqrt{5+\sqrt{5}}\arctan(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}(2x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}))$ $b=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, $b=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ XLIV) $\mathcal{I}(\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{1+x^2}) = \frac{a^2}{\sqrt{1+a^2}}\arctan(\frac{\sqrt{1+a^2}x}{\sqrt{a^2-x^2}})$

12.8 R.: $A_\rho = -2\pi|p|+2\pi\sqrt{\frac{mk^2}{2|E|}}$

13.8 R.: $\pi(\sqrt{a}-b)$.

20.8 R.: Si applichi la definizione di integrale di Riemann e si faccia uso della relazione $||f(x)|-|f(y)||\le|f(x)-f(y)|$. La funzione che vale 1 sui razionali e -1 sugli irrazionali No. Ad esempio si prenda $\int_0^{+\infty}dx\,\frac{\sin x}{x}$ che è integrabile in senso improprio e $\int_0^{+\infty}dx\,\frac{|\sin x|}{x}$ che non lo è.

21.8*** R.: Suggerimenti: usare l'esercizio **15.8** e trarre ispirazione dalla funzione dell'esercizio **17.5***. Per la seconda parte si faccia uso del `Teorema 6.12`

22.8 i ⇒ vi, i ⇒ ix, ii ⇒ vi, iii ⇒ vi, iii ⇒ viii, iv ⇒ vi, iv ⇒ ix, v ⇒ vi, v ⇒ ix, v ⇒ x,

25.8 R.: $G(t) = F_6(e^{-t})$

26.8 R.: Scrivere $\sin t = \sqrt{1-y^2}$ su tutto l'intervallo di integrazione è sbagliato.....

28.8** R.: $\frac{1}{x^n-1}$ e n pari.

$\frac{1}{n}\ln\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\cos\frac{2\pi k}{n}\ln(x^2-2x\cos\frac{2\pi k}{n}+1)-2\sin\frac{2\pi k}{n}\arctan\frac{x-\cos\frac{2\pi k}{n}}{\sin\frac{2\pi k}{n}}$

$\frac{1}{x^n-1}$ e n dispari.

$\frac{1}{n}\ln(x-1)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\cos\frac{2\pi k}{n}\ln(x^2-2x\cos\frac{2\pi k}{n}+1)-2\sin\frac{2\pi k}{n}\arctan\frac{x-\cos\frac{2\pi k}{n}}{\sin\frac{2\pi k}{n}}$

$\frac{1}{x^n+1}$ e n pari.

$-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\cos\frac{\pi(2k+1)}{n}\ln(x^2-2x\cos\frac{\pi(2k+1)}{n}+1)-2\sin\frac{\pi(2k+1)}{n}\arctan\frac{x-\cos\frac{\pi(2k+1)}{n}}{\sin\frac{\pi(2k+1)}{n}}$

$\frac{1}{x^n+1}$ e n dispari.

$\frac{1}{n}\ln(x+1)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\cos\frac{\pi(2k+1)}{n}\ln(x^2-2x\cos\frac{\pi(2k+1)}{n}+1)-2\sin\frac{\pi(2k+1)}{n}\arctan\frac{x-\cos\frac{\pi(2k+1)}{n}}{\sin\frac{\pi(2k+1)}{n}}$

29.8 R.: $\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}$, $\frac{1}{n}\ln\frac{b}{a}$

30.8** R.: $\ln\frac{b}{a}$, $\ln\frac{b}{a}$, $\frac{1}{2}\ln\frac{a+b}{|a-b|}$, $ab\ln\frac{b}{a}$, $\frac{3}{4}\ln 3$

31.8 R.: Il dominio della funzione è dato dai punti $\{\underline{x}\in\mathbf{R}^2\quad y>\frac{4}{3}x-\frac{1}{4}\ \wedge\ y<\frac{4}{3}x+\frac{1}{4}\}$. Essa vale identicamente zero per $y=\frac{4}{3}x$; tende a $-\infty$ quando $\underline{x}\to(x,\frac{4}{3}x+\frac{1}{4})$ e $-\infty$ quando $\underline{x}\to(x,\frac{4}{3}x-\frac{1}{4})$.

36.8** R.: $\pi\ln\frac{t+\sqrt{t^2-1}}{2}$ **37.8**** R.: $\frac{\pi}{2}$ **38.8**** R.:$\frac{\pi}{2}(\beta-\alpha)$ **39.8** R.: $\ln\frac{1+\beta}{1+\alpha}$

44.8** Ciascuna delle funzioni **6.5**** e **63.5***** non può ammettere primitiva in quanto tale primitiva dovrebbe avere, quale derivata, una funzione con discontinuità di salto in corrispondenza dei razionali ma questo sappiamo essere impossibile. D'altro canto le funzioni $\int_0^x dy g(y)$ sono derivabili per ogni x e la derivata è identicamente nulla.

45.8** L'affermazione è falsa: si prendano le funzioni $\int_0^\infty dx\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, $\int_0^\infty dx\ln(1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}})$. Il primo integrale converge ed il secondo no pur essendo $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}-\ln(1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}})=O(\frac{1}{x})$ per $x\to+\infty$

46.8** La funzione **6.5****

48.8** Si integri per parti e si usi la proprietà di Cauchy di convergenza degli integrali.

49.8*** Si prenda la funzione $f(x)=\begin{cases}\cos x^{-1} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ La funzione f è la derivata di una funzione ma f^2 non è la derivata di nessuna funzione.

50.8 $\frac{\pi}{4}$

52.8* $1-\gamma$, e $2\gamma-1$.

53.8* Si utilizzi la concavità della funzione

54.8** Naturalmente bosogna usare il criterio di integrabilità delle funzioni. O si usa quello di Du Bois–Reymond, oppure quello di Lebesgue.

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

§8

Nella risoluzione degli esercizi riguardanti gli integrali impropri si applicheranno spesso i teoremi al riguardo contenuti nel libro di testo: `teoremi 8.12 e 8.13`. Nel primo caso bisogna trovare la funzione $g(x)$ che soddisfa la relazione $0\le f(x)\le g(x)$. Supponiamo ora di avere il seguente integrale $\int_a^b f(x)dx$ dove: $-\infty<a<b$, $f\colon[a,b]\to\mathbf{R}$ non ha punti singolari per $a\le x<b$, b può essere infinito mentre se è finito supporremo che f abbia un asintoto verticale per $x\to b^-$, f è continua in (a,b). Consideriamo dapprima il caso in cui b è finito. Con un cambio di variabile possiamo riscrivere l'integrale come $\int_{a-b}^0 F(t)dt$ dove $F(t)=f(t+b)$. Se f ha un asintoto verticale per $x=b$ evidentemente F lo avrà per $t=0$. Ebbene è sovente possibile stabilire (eventualmente con facilità) che esiste $\delta>0$ tale che $t\in(-\delta,0)\ \Rightarrow\ 0\le F(t)\le G(t)$. Se invece $a-b\le t<-\delta$ la relazione $0\le F(t)\le G(t)$ può non essere vera. Va notato un punto importante ossia che ai fini della esistenza dell'integrale improprio spesso non è necessario conoscere il valore di δ ma

solo dimostrare che esiste (se ne esiste uno ne esistono infiniti; tutti i numeri più piccoli di δ vanno bene). In ragione di quanto scritto spezziamo l'integrale come $\int_{a-b}^{-\delta} F(t)dt + \int_{-\delta}^{0} F(t)dt$. Essendo F è continua in $[a-b,0)$, lo sarà a maggior ragione in $[a-b,-\delta)$ e quindi il fatto di essere improprio dipende solo dal comportamento della funzione di F nell'intorno di 0. Se $\int_\delta^0 G(t)dt < \infty$ si può applicare il `Teorema 8.12`.
Sottolineiamo il fatto che di δ si è supposta solo la sua esistenza e nonostante ciò si è potuto dire se l'integrale è convergente oppure no. Se però *bisogna stimare l'integrale*, ossia dire quanto è grande, allora non basta più sapere che δ esiste ma bisogna dire quanto vale (fa eccezione ovviamente il caso in cui si sappia trovare la primitiva della funzione).
Il caso in cui $b=+\infty$ è del tutto analogo.
Negli esercizi che seguono ci disinteresseremo alla stima di $-\delta$ tranne in alcuni casi e questo per ragioni di brevità.

1.8 $\int_0^1 dx \frac{\log(1+x^{2/3})}{e^x-1} = \int_0^1 f(x)dx$
l'integrale è improprio in quanto il denominatore si annulla per $x=0$. Per ogni $x\neq 0$ la funzione è continua e quindi $x=0$ rimane l'unica causa del fatto che l'integrale è improprio. $\log(1+x^{2/3}) = x^{2/3}(1+o(x^{2/3}))$, $\quad e^x-1 = x(1+o(x))$ per $x\to 0$ e quindi $f(x) = \frac{x^{2/3}}{x}(1+o(x^{2/3}))(1+o(x)) = \frac{1}{x^{1/3}}(1+o(x^{2/3}))$ per $x\to 0$ (essendo $o(x^{2/3})o(x) = o(x^{5/3})$, $o(x^{5/3})+o(x) = o(x)$ e $o(x^{2/3})+o(x) = o(x^{2/3})$). Tutto ciò implica che esiste un numero $A>1$ ed un valore $x(A)$ *vicino a* 0 tale che se $0\le x\le x(A)$ allora $1+o(x^{2/3}) < A$ da cui $f(x) \le \frac{1}{x^{2/3}}A$ per $0\le x\le x(A)$.
Essendo $f>0$ possiamo applicare il `teorema 8.12` all'integrale $\int_0^{x(A)} f(x)$ avendo come $g(x) = \frac{1}{x^{2/3}}$. Infatti $\int_0^{x(A)} \frac{1}{x^{2/3}} = 3x^{1/3}|_0^{x(A)} = 3x^{1/3}(A)$. L'integrale $\int_{x(A)}^1 f(x)dx$ non è un integrale improprio essendo l'integrale di una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato. Se ne conclude quindi che l'integrale improprio è convergente.
Va detto che attraverso l'uso dei simboli $o(\cdot)$ si è dimostrata la esistenza dei numeri $x(A)$ ed A *ma non si è proceduto ad una loro stima (il calcolo esatto è sovente impossibile).* Per quest'ultima bisogna usare gli sviluppi di Taylor ed il resto nella formula di Lagrange oppure integrale. La stima di A ed $x(A)$ è indispensabile se si vuole valutare l'integrale (anche qui la parola valutare significa di fatto stimate essendo il calcolo esatto precluso il più delle volte).
Procediamo dunque ad una stima di $x(A)$ in funzione di A. $\log(1+x) = x - \frac{1}{2(1+c)^2}x^2$ dove $0<c<x$ (sconosciuto) e quindi $\log(1+x^{2/3}) = x^{2/3} - \frac{1}{2(1+c)^2}x^{4/3}$ dove $0<c<x^{2/3}$. $e^x-1 = x+\frac{e^p}{2}x^2$, $0<p<x$ (sconosciuto). $\frac{1}{e^x-1} = \frac{1}{x}\frac{1}{1+x\frac{e^p}{2}}$ e mettendo assieme numeratore e denominatore si ottiene $\frac{x^{2/3}(1-\frac{1}{2(1+c)^2}x^{2/3})}{\frac{1}{x(1+x\frac{e^p}{2})}} \le \frac{x^{2/3}}{x}$ essendo $-\frac{1}{2(1+c)^2}x^{2/3} < 0$ e $\frac{1}{(1+x\frac{e^p}{2})} > 0$ per ogni $0\le x\le 1$. Ciò implica che $x(A)\equiv 1$ per ogni $A>1$. Ne segue che è stato superfluo spezzare l'integrale in due parti, la prima fra 0 ed $x(A)$ e la seconda fra $x(A)$ ed 1; su tutto l'intervallo $(0,1)$ vale la maggiorazione $f(x)\le \frac{1}{x^{2/3}}A$.

1.8 $\int_0^1 (\frac{1}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)(e^{1-x}-1)^2})dx$
L'integrale è improprio in quanto i due addendi divergono entrambe quando $x\to 1$. $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^3}$ è divergente (basta calcolarlo) e quindi se il secondo integrale improprio fosse convergente ne conseguirebbe che l'integrale totale è divergente.
Cambiamo variabile $1-x=t$ e l'integrale diventa $\int_0^1 dt(\frac{1}{t^3} - \frac{1}{t(e^t-1)^2}) = \int_0^1 dt\frac{(e^t-1)^2-t^2}{t^3(e^t-1)^2}$. $(e^t-1)^2 = e^{2t}-2e^t+1 = 1+2t^2+\frac{4}{3}e^{2\xi}t^3 - 2-2t-t^2-\frac{1}{3}e^{\xi'}t^3+1 = t^2+t^3(\frac{4}{3}e^{2\xi}-\frac{1}{3}e^{\xi'})$ dove $0<\xi<x$ e $0<\xi'<x$ e quindi l'integrale diventa $\int_0^1 dt\frac{\frac{4}{3}e^{2\xi}-\frac{1}{3}e^{\xi'}}{t^2\left(1+t(\frac{4}{3}e^{2\xi}-\frac{1}{3}e^{\xi'})\right)}$. Essendo $0<\xi<x<1$ e $0<\xi'<x<1$ si ha $\frac{4}{3}e^{2\xi}-\frac{1}{3}e^{\xi'} \ge \frac{1}{3}(4-c)$ per cui $t(\frac{4}{3}e^{2\xi}-\frac{1}{3}e^{\xi'}) \le \frac{1}{3}(4e^2-1)$

e l'integrale si minora con $\int_0^1 \frac{dt}{t^2}\frac{4-e}{4e^2-1} = +\infty$.

1.8 $\int_0^\infty dx \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\frac{1}{x}$

L'integrale è improprio per due motivi: la funzione integranda ha un asintoto per $x=0$ ed il dominio di integrazione tende a $+\infty$. Spezziamo l'integrale in due parti $\int_0^A dx\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x} + \int_A^\infty dx\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}$ con A e B da trovare in seguito. Essendo $|\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}| \le \frac{1}{\sqrt{x}}$ ed essendo $\int_0^A dx\frac{1}{\sqrt{x}} < \infty$ se ne conclude che il primo integrale è convergente.
In linea di principio la stessa disuguaglianza potrebbe essere usata per verificare la convergenza del secondo integrale ma in tal caso si avrebbe $\int_A^\infty dx\frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$. *Ciò non autorizza in alcun modo ad affermare che l'integrale è divergente in quanto quello della maggiorante usato nei* `teoremi 8.12` *e* `8.13` *è un criterio sufficiente e non già necesario. Se dunque "non funziona" non se ne possono trarre indebite conclusioni.* Piuttosto bisogna osservare che $|\sin\frac{1}{x}| \le \frac{1}{x}$ e quindi il secondo integrale si può maggiorare con $\int_A^\infty dx\frac{1}{x^{3/2}}$ che chiaramente converge. Si osservi che sono state usate due differenti stime della stessa funzione ma che ciascuna di esse consentiva la convergenza in uno solo degli integrali benché le stime fossero valide ambedue *per ogni valore di x. In secondo luogo è bene che lo studente/ssa si tolga dalla testa l'idea di operare nel seguente modo per $x\to 0$:* $\sin\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{6}\frac{1}{x^3} + o(\frac{1}{x^4})$. Lo sviluppo di Taylor che si vorrebbe usare è valido per la funzione $\sin x$ quando $x\to 0$.

1.8 $\int_{-2}^\infty e^{3x^2+7x}\ln^2(1+e^{-2x^2})dx$

Non vi sono singolarità sul cammino di integrazione essendo l'argomento del logaritmo sempre positivo. Essendo $\ln(1+x) \le x$ per $x\in\mathbf{R}^+$ viene fuori che $\ln^2(1+e^{-2x^2}) \le e^{-4x^2}$ e quindi l'integrale è maggiorato da $\int_{-2}^\infty dx e^{-x^2+7x}$. Ora se $x<0$ oppure $x>8$ si ha $-x^2+7x<-x$ per cui l'integrale si maggiora con $\int_{-2}^8 dx e^{-x^2+7x} + \int_8^\infty dx e^{-x}$. Il primo integrale non è improprio e converge essendo l'integrando una funzione continua. Il secondo si calcola esattamente conoscendo la ben nota primitiva. Il risultato è che l'integrale converge.
Che $\ln(1+x) < x$ per ogni $x>0$ si può verificare in almeno due modi.
Primo modo: si dimostra che la funzione $h(x) = \ln(1+x) - x < 0$ per ogni $x>0$. Infatti $h(0)=0$ $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$ e $h'(x) = \frac{-x}{1+x} < 0$ per ogni $x>0$ da cui il risultato.
Secondo modo: dallo sviluppo di Taylor si ha $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}\frac{x^3}{(1+c)^3} = x(1-\frac{x}{(1+c)^3})$ $0<c<x$ e quindi $(1-\frac{x}{(1+c)^3}) < 1$ da cui il risultato.
Un secondo modo di risolvere l'esercizio molto simile al precedente ma recante meno informazioni finali è dato dal seguente:
Lo sviluppo del logaritmo dà $\ln^2(1+e^{-2x^2}) = e^{-4x^2} + o(e^{-4x^2})$ per $x\to+\infty$ e quindi esiste un valore A tale che se $x>A$ $o(e^{-4x^2}) < \frac{1}{2}e^{-4x^2}$. In tal modo l'integrale si può riscrivere come $\int_{-2}^A dx f(x) + \int_A^\infty e^{7x-x^2}$ e si prosegue come prima.

L'applicazione del `Teorema 8.12` appare essere leggermente diversa (sul piano tecnico ma non concettuale) da quanto scritto a `pag.396 Altri criteri`. Ivi si cerca di verificare se una data funzione ha un dato ordine rispetto ad un infinito/esimo opportuno in modo da applicare il `Teorema 8.12` e concludere la convergenza oppure escluderla. Ad esempio laddove dice
`1) se` f `è infinitesima per` $x\to+\infty\ldots$
vuol dire che se è $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = l$ e $l\ne+\infty$, $\alpha>1$ allora la funzione è integrabile in senso improprio. È chiaro che se avessi $\lim_{x\to+\infty} e^x f(x) = l$ e $l\ne+\infty$, il teorema sarebbe ugualmente applicabile ed è esattamente quanto accade.

1.8 $\int_1^2 \frac{1-\cos\sqrt{x-1}}{(x^3-1)^2}dx$

La funzione ha un asintoto verticale per $x\to 1^+$. L'integrale, cambiando variabile diventa, $\int_0^1 dx\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x^2((x+1)^2+(x+1)+1)} \ge \int_0^1 dx\frac{1-\cos\sqrt{x}}{49x^2}$. $1-\cos\sqrt{x} = 1-1+\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}(\cos\xi)^4x^4 \ge \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4$ da cui $1-\cos\sqrt{x} \ge \frac{1}{4}x$ essendo $1\ge\frac{x}{6}$ per $x\le 6$. L'integrale si minora con $\int_0^1\frac{dx}{x}\frac{1}{4\cdot 49}$ che diverge.

1.8 $\int_2^\infty dx(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\cos(\ln^{-5/4} x))^2$

Essendo $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ si ha che l'integrale è uguale a $\int_2^\infty \frac{dx}{x} 4\sin^2(\frac{1}{2\ln^{5/4} x}) \le \int_2^\infty \frac{dx}{x}\frac{1}{\ln^{5/2} x}$ e cambiando variabile esso diventa $\int_{\ln A}^\infty \frac{e^t dt}{e^t t^{5/2}}$.
Si poteva anche operare nel seguente modo: detto $y = \frac{1}{\ln^{5/4} x}$ si ha $\cos y = 1 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{24}\cos(\xi)y^4$ dove $0 < \xi < y < \frac{1}{\ln^{5/4} 2}$ da cui $\cos(\frac{1}{\ln^{5/4} x}) = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{\ln^{5/2} x} - \frac{1}{24}\cos(\xi)\frac{1}{\ln^5 x}$. Risolvendo la disequazione $\frac{1}{24}\cos(\xi)\frac{1}{\ln^5 x} < \frac{1}{4}\frac{1}{\ln^{5/2} x}$. ossia $x \ge x_o = e^{\frac{1}{6^{2/5}}}$ si può spezzare come $\int_2^A dx f(x) + \int_A^\infty dx f(x)$ dove $A = \max\{2, e^{\frac{1}{6^{2/5}}}\}$ e maggiorare il secondo come $\int_A^\infty \frac{dx}{4}\frac{1}{x\ln^{5/2} x}$

1.8 $\int_0^\infty dx \frac{1}{x^\alpha |\log x|^\beta}$

L'integrale è improprio in quanto si hanno asintoti per $x = 0$, $x = 1$ ed inoltre il dominio di integrazione è illimitato. La cosa migliore da fare è cambiare variabile $\ln x = t$ che è valido per ogni $x > 0$ (quest'ultimo punto non va sottovalutato in quanto un cambio di variabile potrebbe benissimo non essere valido all'interno di tutto il dominio di integrazione). L'integrale diventa $\int_{-\infty}^\infty dt \frac{e^t}{e^{t\alpha}|t|^\beta} = \int_{-\infty}^\infty dt \frac{e^{t(1-\alpha)}}{|t|^\beta}$. Prendiamo $A > 0$ e spezziamo l'integrale in tre parti ossia $\int_{-\infty}^{-A} f(t)dt + \int_{-A}^A f(t)dt + \int_A^\infty f(t)dt = I_1 + I_2 + I_3$.
I_1 converge per $1 - \alpha > 0$ e β qualsiasi oppure per $\alpha = 1$ e $\beta > 1$. Infatti se $1 - \alpha > 0$ si ha $\frac{e^{t(1-\alpha)}}{|t|^\beta} \le e^{t(1-\alpha)} \sup_{t\in(-\infty,A)} \frac{1}{|t|^\beta} = e^{t(1-\alpha)}\frac{1}{A^\beta}$ (si capisce come fondamentale sia considerare un dominio di integrazione che non comprenda l'origine). Se invece $\alpha = 1$ l'integrando si riduce ad una funzione di cui si ha la primitiva e si applica la definizione di integrale improprio per verificare che converge per $\beta > 1$.
Dimostriamo ora che per i valori trascurati di α e β l'integrale diverge. Sia quindi $1 - \alpha < 0$. Essendo $\lim_{t\to-\infty} e^{t(1-\alpha)}t^k = +\infty$ per qualunque valore di k, esiste $t_{(\beta,\alpha)} < 0$ tale che $t < t(\beta,\alpha) \Rightarrow \frac{t(1-\alpha)}{|t|^\beta} \ge e^{\frac{t}{2}(1-\alpha)}$ e quindi scegliendo (data la arbitrarietà) $A \ge |t(\beta,\alpha)|$ si ha $I_1 \ge \int_{-\infty}^{-A} dt e^{\frac{t}{2}(1-\alpha)} = +\infty$ da cui la divergenza. Se poi si vuole una stima di $t(\beta,\alpha)$ allora bisogna risolvere la disequazione $\frac{e^{t(1-\alpha)}}{|t|^\beta} \ge e^{\frac{t}{2}(1-\alpha)}$ ossia $\frac{e^{\frac{t}{2}(1-\alpha)}}{|t|^\beta} \ge 1$ ossia $e^{\frac{t}{2}(1-\alpha)} \ge |t|^\beta$. Se $\beta \le 0$ allora $|t|^\beta \le 1$ per ogni $t \le -1$ ed essendo $e^{\frac{t}{2}(1-\alpha)} \ge 1$ per ogni $t \le 0$ si ha che per $\beta \le 0$ $t(\beta,\alpha) = -1$. Se invece $\beta > 0$ allora scriviamo $e^{\frac{t}{2}(1-\alpha)} \ge |t|^\beta$ come $\beta\ln|t| - t(1-\alpha)$ e consideriamo la funzione $h(t) = \beta\ln|t| - t(1-\alpha)$. $h(-1) = (1-\alpha) < 0$; $\lim_{t\to-\infty} h(t) = -\infty$ $\frac{dh}{dt} = \frac{\beta}{t} - (1-\alpha) \le 0$ se $t \ge \frac{\beta}{(1-\alpha)}$ e quindi per $t < \frac{\beta}{(1-\alpha)}$ la funzione è crescente. Ne consegue che per $t < \frac{\beta}{(1-\alpha)}$ $h(t) < (1-\alpha) < 0$ e quindi $t(\beta,\alpha) = \frac{\beta}{(1-\alpha)}$. Riassumendo per $1 - \alpha < 0$ se $\beta \le 0$ $t(\beta,\alpha) = -1$ mentre se $\beta > 0$ si ha $t(\beta,\alpha) = \frac{\beta}{(1-\alpha)}$.
Se $\alpha = 1$ e $\beta \le 1$ chiaramente l'integrale diverge potendo calcolare la primitiva.

Passiamo ora a studiare I_3. Si potrebbe riapplicare il ragionamento precedente ma conviene cambiare variabile $z = -t$ ottenendo $\int_{-A}^{-\infty} -dz f(-z) = \int_{-\infty}^{-A} dz \frac{e^{z(\alpha-1)}}{|z|^\beta}$. Possiamo ora usare il risultato precedente ottenendo la convergenza per $\alpha - 1 > 0$ e β qualsiasi mentre per $\alpha = 1$ β deve essere più grande di 1. La divergenza di I_3 si deduce esattamente come quella di I_1. La unione dei due risultati ci consente di dire che se $\alpha = 1$ e $\beta > 1$ convergono entrambe gli integrali. Per qualsiasi altra coppia (α,β) o converge il primo e diverge il secondo o viceversa.
Il secondo integrale I_2 diverge per $\beta > 1$ ed $\alpha = 1$ da cui si vede che non esiste alcuna coppia (α,β) che soddisfa tutte le richieste.

1.8 $\int_0^{+\infty}(\arctan\frac{1}{t^\alpha+1} - \frac{1}{(t^\alpha+1)})dt$

Sia $\alpha < 0$. L'integrando ha un asintoto orizzontale con ordinata $y = \frac{\pi}{4} - 1 < 0$ e quindi l'integrale non può convergere in quanto esiste un valore $t(\alpha)$ per cui $\arctan\frac{1}{t^\alpha+1} - \frac{1}{(t^\alpha+1)} < \frac{\pi}{6} - \frac{1}{\sqrt{3}} <$

0 da cui $\int_{t(\alpha)}^{+\infty}(\arctan\frac{1}{t^\alpha+1}-\frac{1}{(t^\alpha+1)})dt < \int_{t(\alpha)}^{+\infty}\frac{\pi}{6}-\frac{1}{\sqrt{3}}dt$ ed il secondo integrale è illimitato inferiormente.
Diamo ora una stima di $t(\alpha)$. Sia $z\doteq g(t)=\frac{1}{t^\alpha+1}=\frac{t^{|\alpha|}}{1+t^{|\alpha|}}$ essendo $\alpha<0$. $g(0)=0$, $\lim_{t\to+\infty}g(t)=1$ ed g è monotona crescente. Essendo $\arctan x\le x$ si ha che $\arctan z-z$ è monotona decrescente fra $0\le z\le 1$ ed inoltre $\lim_{z\to 1}\arctan z-z=\frac{\pi}{4}-1$. Ne segue che se $z>\frac{1}{\sqrt{3}}$ si ha $\arctan z-z<\frac{\pi}{6}-\frac{1}{\sqrt{3}}<0$.

Se $\alpha=0$ la funzione è una costante diversa da zero e quindi diverge anche in questo caso.

Sia ora $\alpha>0$. Per $t\ge 0 \Rightarrow 0<\frac{1}{t^\alpha+1}\le 1$. Indichiamo $z=\frac{1}{t^\alpha+1}$; sappiamo che $\arctan z-z=\frac{1}{6}\frac{6\xi^2-2}{(1+\xi^2)^3}z^3 \doteq R$ dove $0<\xi<z$. Si ha $|R|\le\frac{1}{6}6\frac{(\xi^2+1)}{(1+\xi^2)^3}z^3\le 1$ essendo $0<z\le 1$. In tal modo l'integrale si maggiora con $\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^\alpha)^3}\le\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^{3\alpha}}$ che converge per $\alpha>\frac{1}{3}$.

Rimane da dimostrare ora che per $0<\alpha<\frac{1}{3}$ l'integrale non converge. Per $0<\xi<z<\frac{1}{\sqrt{6}}$ si ha $R<\frac{1}{6}\frac{-z^3}{(1+\xi^2)^3}\le\frac{-z^3}{48}$ (a denominatore si è usato $\xi<z<1$). $z<\frac{1}{\sqrt{6}}$ vuol dire $t>(\sqrt{6}-1)^{1/\alpha}\doteq t(\alpha)$. Spezziamo l'integrale come $\int_0^{t(\alpha)}dtf(t)+\int_{t(\alpha)}^{+\infty}dtf(t)$ ed il secondo integrale si maggiora **senza modulo** con $\int_{t(\alpha)}^{+\infty}dtf(t)\le-\int_{t(\alpha)}^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^\alpha)^2}\le\int_{t(\alpha)}^{+\infty}\frac{dt}{8t^{3\alpha}}$ che diverge a $-\infty$ per $0<\alpha\le\frac{1}{3}$.
Ora calcoliamo l'integrale per $\alpha=1$.

$$\int_0^{+\infty}dt(\arctan\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+1})\doteq\lim_{A\to+\infty}\int_0^A dt(\arctan\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+1})=$$
$$=\lim_{A\to\infty}\int_1^{1+A}dt(\arctan\frac{1}{t}-\frac{1}{t})=\lim_{A\to+\infty}\int_1^{\frac{1}{A+1}}-\frac{dy}{y^2}\arctan y-\lim_{A\to+\infty}\int_1^A\frac{dt}{t}=$$
$$=\lim_{A\to+\infty}\Big(\frac{\arctan y}{y}\Big|_1^{\frac{1}{A+1}}-\ln|A|-\int_1^{\frac{1}{A+1}}\frac{dy}{y(1+y^2)}\Big)=$$
$$=\lim_{A\to+\infty}\Big(\frac{\arctan y}{y}\Big|_1^{\frac{1}{A+1}}-\ln|A|-\int_1^{\frac{1}{A+1}}(\frac{dy}{y}-\frac{ydy}{1+y^2})\Big)=$$
$$=1-\frac{\pi}{4}+\lim_{A\to+\infty}\Big(\ln\frac{|A+1|}{|A|}+\frac{1}{2}\ln(1+y^2)\Big|_1^{\frac{1}{A+1}}\Big)=1-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$$

1.8 $\int_{-\infty}^0 e^{3x\alpha}(\cos x+\sin 2x+5)^\alpha dx$

$0<e^{3x\alpha}(\cos x+\sin x+5)^\alpha\le e^{3x\alpha}7^\alpha$ per cui l'integrale converge per $\alpha>0$. Per $\alpha=1$ l'integrale diventa $\int_{-\infty}^0 dxe^{3x\alpha}(\cos x+\sin 2x+5)=\frac{3}{10}e^{3x}(\cos x+\frac{\sin x}{3})+\frac{3}{10}e^{3x}(\sin x+\frac{\cos x}{3})-\frac{5}{3}e^{3x}|_{-\infty}^0=-\frac{22}{15}$

Se $\alpha=0$ chiaramente diverge. Se $\alpha<0$, l'integrale diverge potendo scrivere $f(x)>\frac{e^{3x\alpha}}{2^\alpha}$

1.8 $\int_2^\infty\frac{\sqrt{9+5x}\ln^\alpha(e^{x+1}+1)}{x}dx$

$\alpha\ge 0$; $f(x)\ge\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{x}}$ essendo $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}=+\infty$ l'integrale diverge.
$\alpha<0$; Essendo $1+e^{1+x}\ge e^{1+x}$ si maggiora l'integrale come $\int_2^\infty dxf(x)\le\int_2^\infty dx\frac{\sqrt{9+5x}}{x}(x+1)^\alpha\le\int_2^\infty dx2^\alpha\sqrt{10}x^{\alpha-\frac{1}{2}}$ che converge per $\alpha<-\frac{1}{2}$.
Sia ora $-\frac{1}{2}\le\alpha<0$; $\int_2^\infty dxf(x)\ge\int_2^\infty dx\frac{\sqrt{9+5x}\ln^\alpha(2e^{x+1})}{x}\ge\int_2^\infty dxf(x)\ge\int_2^\infty dx\frac{1}{\sqrt{x}}(x+1)^\alpha\ge\int_2^\infty dx2^\alpha\frac{x^\alpha}{\sqrt{x}}$ e quindi diverge se $\alpha-\frac{1}{2}\ge-1$ ossia $-\frac{1}{2}\le\alpha<0$ (si è usato il fatto che per $y\ge 0$ si ha $\ln 2e^y\ge y$)

In alternativa si poteva fare: definitivamente per $x\to+\infty$ $\ln^\alpha(1+e^{x+1})=(x+1)^\alpha(1+o(\frac{1}{x^n})^\alpha$ e ciò implica che $2^\alpha(x+1)^\alpha\le\ln^\alpha(1+e^{x+1})\le\frac{(x+1)^\alpha}{2^\alpha}$ e si giunge così alle stesse conclusioni.

1.8 $\int_0^{+\infty} dx \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}$
L'integrale è $-\frac{1}{2}\int_0^{\infty} \ln x d((1+x^2)^{-1}) = \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{1}{2}\frac{\ln x}{(1+x^2)}\Big|_{\varepsilon}^{\infty} + \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{dx}{x(1+x^2)} =$
$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\frac{\ln\varepsilon}{(1+\varepsilon^2)} - \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{A\to+\infty}\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Big|_{\varepsilon}^{A} = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}(\frac{\ln\varepsilon}{1+\varepsilon^2} - \ln\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}) = 0$

1.8 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2}|\ln(1+x^{-1/2}) - \sin^{1-\gamma^2} x^{-1/4}|^{\alpha} \doteq \int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2}|f_\gamma(x)|^{\alpha}$
$f_\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x}) - \big(\frac{1}{x^{\frac14}} - \frac{1}{6x^{\frac34}} + o(\frac{1}{x})\big)^{1-\gamma^2}$ definitivamente per $x\to+\infty$. Ora La disequazione $\frac{1}{\sqrt{x}} \le (\frac{1}{\sqrt{x}})^{\frac12(1-\gamma^2)}$ ossia $1 < (\frac{1}{\sqrt{x}})^{\frac12(1-\gamma^2)-1}$ è verificata per ogni $x>1$ se $\frac12(1-\gamma^2)-1<0$ e quindi $-\frac12\gamma^2-\frac12<0$ che è sempre verificata. Quindi definitivamente per $x\to+\infty$ si ha $\frac{C_\gamma}{x^{\frac14(1-\gamma^2)}} \le |f_\gamma(x)| \le \frac{C'_\gamma}{x^{\frac14(1-\gamma^2)}}$ (stimeremo dopo C e C') e quindi $\frac{|f_\gamma(x)|^\alpha}{x^2} \le \frac{C''}{x^2 x^{\frac14(1-\gamma^2)\alpha}}$ e vogliamo che $2+\frac{\alpha}{4}(1-\gamma^2)>1$. Se $1-\gamma^2<0$ si ha convergenza per $\alpha<\frac{4}{\gamma^2-1}$ e divergenza per $\alpha\ge\frac{4}{\gamma^2-1}$. Se $1-\gamma^2>0$ si ha convergenza per $\alpha>\frac{4}{\gamma^2-1}$ e divergenza per $\alpha\le\frac{4}{\gamma^2-1}$.
Se $1-\gamma^2=0$ l'integrale diventa $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2}|\ln(1+x^{-1/2})-1|^\alpha$, da cui $|f_\gamma(x)|\le C$ def.te per $x\to+\infty$ e quindi $\frac{|f_\gamma(x)|}{x^2}\le\frac{1}{x^2}$ e l'integrale converge per ogni valore di α.
Se $\alpha=0$ il risultato è analogo al precedente insieme con la sua dimostrazione.

Diamo una stima ora delle costanti C e C'.
$\ln(1+y) = y - \frac{1}{2(1+\xi)^2}y^2$ con $0<\xi<y$ ed inoltre $\sin z = z - \frac16(\cos c)z^3$ e $0<c<z$.
Nel problema concreto si ha $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ ed essendo $x>2$ si ottiene $0<y<\frac{1}{\sqrt2}$ e quindi $|-\frac12\frac{1}{(1+\xi)^2}|y^2 \le \frac12 y^2 < \frac12 y$. Ne segue che $\frac12\frac{1}{\sqrt{x}} \le \ln(1+\frac{1}{\sqrt{x}}) \le \frac32\frac{1}{\sqrt{x}}$. Essendo però $\ln(1+z)\le z$ per ogni z positivo si ha $\frac12\frac{1}{\sqrt{x}} \le \ln(1+\frac{1}{\sqrt{x}}) \le \frac{1}{\sqrt{x}}$. Essendo inoltre $\frac{z^2}{3}<1$ per $|z|<\sqrt3$ ed essendo $z=\frac{1}{x^{\frac14}}$, per $x>2$ si ha $\frac{1}{\sqrt{x}}<3$. Ne segue che $\frac12\frac{1}{x^{\frac14}} \le \sin\frac{1}{x^{\frac14}} \le \frac32\frac{1}{x^{\frac14}}$. Anche qui, essendo $\sin z\le z$ per $z>0$ si ha $\frac12\frac{1}{x^{\frac14}} \le \sin\frac{1}{x^{\frac14}} \le \frac{1}{x^{\frac14}}$. Ne segue che se $1-\gamma^2>$ si ha $\frac{1}{2^{1-\gamma^2}}\frac{1}{x^{\frac14(1-\gamma^2)}} \le \sin^{1-\gamma^2}\frac{1}{x^{\frac14}} \le \frac{1}{x^{\frac14(1-\gamma^2)}}$ mentre se $1-\gamma^2<0$ si ha $\frac{1}{x^{\frac14(1-\gamma^2)}} \le \sin^{1-\gamma^2}\frac{1}{x^{\frac14}} \le \frac{1}{2^{1-\gamma^2}}\frac{1}{x^{\frac14(1-\gamma^2)}}$. In tal modo se $1-\gamma^2>0$ si ottiene $\frac12\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^{\frac14(1-\gamma^2)}} \le f_\gamma(x) \le \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2^{1-\gamma^2}}\frac{1}{x^{\frac14(1-\gamma^2)}}$ che può essere riscritta come $\frac{1}{x^{\frac14(1-\gamma^2)}}(\frac12 - \frac{1}{x^{\frac14(1+\gamma^2)}}) \le f_\gamma(x) \le \frac{1}{x^{\frac14(1-\gamma^2)}}(1-\frac{1}{x^{\frac14(1+\gamma^2)}})$. Se $x>2^8$ allora $x^{\frac14(1+\gamma^2)}>4$ essendo $1+\gamma\ge1$ per $1-\gamma^2>0$. Dunque alla fine si ha per $1-\gamma^2>0$ $\frac{1}{x^{\frac14(1-\gamma^2)}}\frac14 \le f_\gamma(x) \le \frac{1}{x^{\frac14(1-\gamma^2)}}$.

Se $1-\gamma^2<0$ si ha $\frac12\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2^{1-\gamma^2}}\frac{1}{x^{\frac14(1-\gamma^2)}} \le f_\gamma(x) \le \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^{\frac14(1-\gamma^2)}}$ ossia $-\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^{\frac14(1-\gamma^2)}} \le |f_\gamma(x)| \le -\frac12\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2^{1-\gamma^2}}\frac{1}{x^{\frac14(1-\gamma^2)}} \le \frac{1}{2^{1-\gamma^2}}\frac{1}{x^{\frac14(1-\gamma^2)}}$. Da quest'ultima segue che $\frac{1}{x^{\frac14(1-\gamma^2)}}(1-\frac{1}{2^{\frac14(1+\gamma^2)}}) \le |f_\gamma(x)| \le \frac{1}{2^{1-\gamma^2}}\frac{1}{x^{\frac14(1-\gamma^2)}}$. A questo punto è immediato ricavare le costanti C e C'.

1.8 $\int_1^{\infty}\big(\cos\frac{1}{x^{2\alpha}} - \cos\frac{1}{x^{3\gamma}}\big)dx$
Se $\gamma=\frac23\alpha$ l'integrale è convergente essendo identicamente nullo.

Se $\alpha=0$ e $\gamma\ne0$ o viceversa l'integrale non converge. Supponiamo che $\alpha=0$; $\cos 1\doteq a$ e l'integrale diventa $\int_1^{+\infty}dx(a-\cos\frac{1}{x^{3\gamma}}) = \int_1^{+\infty}dx(a-1+1-\cos\frac{1}{x^{3\gamma}})$. Ora $1-\cos\frac{1}{x^{3\gamma}} \le \frac{1}{2x^{3\gamma}}$ e $\frac{1}{2x^{6\gamma}} < \frac12(1-a)$ per $x > \frac{1}{(1-a)^{\frac{1}{6\gamma}}} = x_o(a)$. L'integrale diventa $\int_1^{x_o(a)}dx(a-\cos\frac{1}{x^{3\gamma}}) + \int_{x_o(a)}^{+\infty}dx(a-\cos\frac{1}{x^{3\gamma}}) \le \int_1^{x_o(a)}dx(a-\cos\frac{1}{x^{3\gamma}}) + \int_{x_o(a)}^{+\infty}dx(a-1+\frac12-\frac12 a) = \int_1^{x_o(a)}dx(a-\cos\frac{1}{x^{3\gamma}}) + \int_{x_o(a)}^{+\infty}dx(\frac{a-1}{2})$ ed il secondo integrale tende a $-\infty$ per cui l'integrale è illimitato inferiormemnte.

Siano ora $\alpha>0$ e $\gamma>0$; l'integrale è dato da $\int_1^{+\infty}dx\big(\frac{1}{2x^{6\gamma}} - \frac{1}{2x^{4\alpha}} + o(\frac{1}{2x^{6\alpha}}) + o(\frac{1}{2x^{9\beta}})\big)$. Se $\gamma>\frac23\alpha$

e $4\alpha > 1$ per cui $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{3}{2}\gamma$ ossia $\alpha > \frac{1}{4}$ $\gamma > \frac{1}{6}$ $\gamma > \frac{2}{3}\alpha$ l'integrale converge. Infatti essendo l'integrando $-\frac{1}{2x^{4\alpha}} + o(\frac{1}{2x^{4\alpha}})$ esso è un o-piccolo di ordine superiore ad 1 rispetto all'infinitesimo campione $\frac{1}{x}$. Stessa identica situazione si ha se $\frac{1}{6} < \gamma < \frac{2}{3}\alpha$.

Se $\alpha \leq \frac{1}{4}$ e $\gamma > \frac{1}{6}$ l'integrale diverge. Esso infatti diventa $\int_0^{+\infty} dx\big[(-\frac{1}{2x^{4\alpha}} + \frac{1}{2x^{6\gamma}})\big] + o(\frac{1}{2x^{6\alpha}}) + o(\frac{1}{2x^{9\gamma}})$. Se $6\alpha > 1$ il secondo terzo e quarto integrale convergono mentre il quarto diverge per cui l'integrale diverge. Se invece $6\alpha \leq 1$ allora il primo e terzo integrale danno $\int_0^{+\infty} dx \frac{1}{2x^{4\alpha}}(-1 + o(\frac{1}{x^{2\alpha}}))$; ora prendiamo quel valore A (che esiste) di x per cui $-1 + o(\frac{1}{x^{2\alpha}}) < -\frac{1}{2}$. per $x > A$. L'integrale si maggiora quindi con $\int_0^A dx f(x) - \int_A^{+\infty} dx \frac{1}{4x^{4\alpha}}$ che è illimitato inferiormente.
Chiaramente se $\alpha > \frac{1}{4}$ $\gamma \leq \frac{1}{6}$ l'integrale diverge per le stesse ragioni.
Se $\alpha \leq \frac{1}{4}$ e $\gamma \leq \frac{1}{6}$ ma $\gamma \neq \frac{2}{3}\alpha$ l'integrale diverge. In tal caso si può scrivere $\int_0^A dx f(x) + \int_A^{+\infty} dx \frac{-1}{2x^{4\gamma}}\big[(1 + o(\frac{1}{x^{2\alpha}})) - \frac{x^{4\alpha}}{x^{6\gamma}}(1 + o(\frac{1}{x^{3\gamma}}))\big]$ e se $4\alpha < 6\gamma$ allora l'integrale si può maggiorare con $\int_0^A dx f(x) + \int_A^{+\infty} dx \frac{-1}{4x^{4\gamma}}$. Stesso discorso se $6\gamma < 4\alpha$ (sempre per $\alpha \leq \frac{1}{4}$, $\gamma < \frac{1}{6}$).
Identico discorso al precedente si ha per $\alpha > \frac{1}{4}$ e $\gamma \leq \frac{1}{6}$.

Alla fine il risultato è dato da $\alpha > \frac{1}{4} \ \wedge \ \gamma > \frac{1}{6}$ $\gamma = \frac{2}{3}\alpha$.

1.8 $\int_1^\infty \big(x^2 e^{1/x} - x^2 \cos\frac{2}{x} - x - 3 - \sin\frac{1}{6x}\big)dx$
$\int_1^{+\infty} dx\big[x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+O(\frac{1}{x^4})) - x^2(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{3x^4}+o(\frac{1}{x^5})) - x - 3 - (\frac{1}{6x} - \frac{1}{6(6x)^3} + o(\frac{1}{x^4}))\big] = \int_1^{+\infty} dx x^2 O(\frac{1}{x^4})$ e quindi converge.

1.8 $\int_2^\infty \sin^\alpha\big(x^4(\cos\frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{24x^4})\big)dx$
$\int_2^{+\infty} dx \sin^\alpha(\frac{1}{6!x^2} + o(\frac{1}{x^3}))$; se $\alpha \leq 0$ la funzione tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$ e quindi diverge. Se $\alpha = 0$ la funzione è una costante e quindi diverge anch'essa. Se $\alpha > 0$ la funzione è infinitesima e $|f(x)| \leq c|x|^{-2\alpha}$ per cui se $\alpha > \frac{1}{2}$ l'integrale converge. Infatti definitivamente per $x \to +\infty$ $|o(\frac{1}{x^3})| \leq \frac{1}{x^2}$ per cui $c = \frac{1}{6!} + 1$.
Sia $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$. Essendo definitivamente $|o(\frac{1}{x^3})| \leq \frac{1}{6!2}x^2$ si ha $(\frac{1}{6!x^2} + o(\frac{1}{x^3})) \geq \frac{1}{6!2}x^2$ ed inoltre definitivamente per $z \to 0^+$ $\sin z \geq cz$ per una costante c opportuna e calcolabile. Tenendo conto di tutte le considerazioni fatte si può minorare $\sin^\alpha\big(x^4(\cos\frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{24x^4})\big)dx \geq c'\frac{1}{x^{2\alpha}}$.
Per quel che riguarda c si può porre $c = \frac{2}{\pi}$ e $0 \leq z \leq \frac{\pi}{2}$
$\cos z = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{6!}z^6 - \frac{1}{8!}z^8\cos\xi$ con $0 < \xi < z$. Quindi $x^4(\cos\frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{24x^4}) = \frac{1}{6!}\frac{1}{x^2} + \cos\xi\frac{1}{8!}\frac{1}{x^4}$ e $0 < \xi < \frac{1}{x}$. La richiesta $|o(\frac{1}{x^3})| \leq \frac{1}{x^2}$ si traduce in $\cos\xi\frac{1}{8!}\frac{1}{x^4} \leq \frac{1}{8!}\frac{1}{x^4} \leq \frac{1}{6!}\frac{1}{x^2}$ e quindi $x \geq 1$ va bene. In questo caso quindi non c' è bisogno di spezzare l'integrale in due parti (è una peculiarità delle funzioni circolari tipo seno, coseno (non arcotangente) e dipende dal fatto che le derivate successive non producono fattoriali).
La richiesta $|o(\frac{1}{x^3})| \leq \frac{1}{6!2}x^2$ si traduce in $\cos\xi\frac{1}{8!}\frac{1}{x^4} \leq \frac{1}{8!}\frac{1}{x^4} \leq \frac{1}{6!2}\frac{1}{x^2}$ che di nuovo vale per $x > 1$.
La richiesta $0 \leq z \leq \frac{\pi}{2}$ diventa $x \geq \frac{2}{\pi}$ ed essendo $\frac{2}{\pi} < 1$ di nuovo tutte le $x > 1$ vanno bene.

1.8 $\int_0^\infty x^{-\alpha}\big((1+\sin^2 x)^{1/6} - 1 + e^{-1/(x+x^7)}\big)dx$
Spezziamo l'integrale come $\int_0^A dx \frac{f}{x^\alpha} + \int_A^{+\infty} dx \frac{f}{x^\alpha}$ con A da trovare o no a seconda di ciò che vogliamo dimostrare. Essendo $|f| \leq 2^{\frac{1}{6}}$ ne segue che il secondo integrale converge per $\alpha > 1$ (nulla si può dire circa $\alpha \leq 1$ in quanto il `Teorema 8.13` dà una condizione sufficiente per la convergenza). Per $x \to 0$, si ha $f(x) = 1 + \frac{1}{6}\sin^2 x + o(\sin^2 x) - 1 + o(x^n)$ per ogni n positivo ossia $\frac{1}{6}x^2 + o(x^2)$. Quindi $|f| \leq x^2$ definitivamente per $x \to 0$ e ne consegue che il primo integrale converge per $\alpha < 3$. Riunendo viene fuori che certamente si ha convergenza per $1 < \alpha < 3$. Vogliamo ora mostrare che per $\alpha \leq 1$ e $\alpha \geq 3$ non si ha convergenza. Se $\alpha \geq 3$ il secondo integrale converge ma il primo no. Infatti essendo $\frac{1}{6}x^2 + o(x^2) \geq \frac{1}{12}x^2$ si ha $\int_0^A \frac{f}{x^\alpha}dx \geq \int_0^A dx\, x^{2-\alpha}$ e quindi si ha divergenza. Se invece $\alpha \leq 1$ allora il primo integrale converge ma il secondo no. Infatti si ha $|f| \geq \frac{1}{2}$ definitivamente per $x \to +\infty$ e quindi divergenza.

Volendo dare una stima degli integrali in questione ossia un senso un pò più preciso alle parole "definitivamente" usate spesso si può procedere nel seguente modo. Cominciamo a considerare $\alpha \leq 1$. $f(x) \geq 1 - 1 + e^{-\frac{1}{x+x^7}}$ e vogliamo che tale espressione sia maggiore od uguale a $\frac{1}{2}$. Dobbiamo dunque risolvere la disequazione $e^{-\frac{1}{x+x^7}} \geq \frac{1}{2}$ che è difficile da risolvere se non impossibile. Conviene quindi minorare $e^{-\frac{1}{x+x^7}} \geq e^{-\frac{1}{x}} \geq \frac{1}{2}$ che è vera per $x \geq \frac{1}{\ln 2}$ e quindi $\int_{\frac{1}{\ln 2}}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x^\alpha} \geq \int_{\frac{1}{\ln 2}}^{\infty} dx \frac{1}{2x^\alpha}$ che diverge esattamente quando $\alpha \leq 1$.
Sia ora $\alpha \geq 3$. L'integrale divergente *dovrebbe* essere il primo. $(1+z)^{1/6} = 1 + \frac{1}{6}z - \frac{5}{72}.(1+\xi)^{-11/6}z^2$ e considerando che al posto di z vi è $\sin x$ ne segue che per ogni x si ha $\frac{5}{72}\sin^2 x \leq \frac{1}{12}|\sin x|$. Da quanto scritto segue che $1 + \frac{1}{6}\sin^2 x - \frac{1}{12}\sin^2 x \leq (1+\sin^2 x)^{1/6} \leq 1 + \frac{1}{6}\sin^2 x + \frac{1}{12}\sin^2 x$ e quindi $1 + \frac{1}{12}\sin^2 x \leq (1+\sin^2 x)^{1/6} \leq 1 + \frac{1}{4}\sin^2 x$. È da risolvere poi la disequazione $e^{-\frac{1}{x+x^7}} \leq \frac{1}{24}x^2$. Per $0 \leq x \leq 1$ essa è implicata da $e^{-\frac{1}{2x}} \leq x^2$ che è vera per $0 \leq x \leq \frac{1}{e^3}$ (dimostrare tale fatto). Quindi si ha $f(x) \geq 1 + \frac{1}{12}\sin^2 x - 1 - \frac{1}{24}x^2 \geq 1 + \frac{1}{12}\frac{2}{\pi}x^2 - 1 - \frac{1}{24}x^2 \geq x^2(\frac{1}{6\pi} - \frac{1}{24})$. Ne segue quanto volevamo dimostrare ossia che $\int_0^{e^{-3}} dx f(x)$ è divergente. L'ultima precisazione è che essendo $e^{-3} \neq \frac{1}{\ln 2}$ l'integrale originario va spezzato come $\int_0^{e^{-3}} dx f(x) + \int_{e^{-3}}^{\frac{1}{\ln 2}} dx f(x) + \int_{\frac{1}{\ln 2}}^{\infty} dx f(x)$ ed il secondo integrale converge essendo la funzione continua in quel sottoinsieme.

1.8 $\int_0^1 \frac{1-\cos((1-x)^2)}{\tan(x(1-x))(-\ln x)^\alpha} dx$

$f(x) = 2\sin^2(\frac{(1-x)^2}{2}) \frac{x(1-x)}{\tan x(1-x)} \frac{1}{x(1-x)(-\ln x)^\alpha}$. $\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \Rightarrow x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ e quindi $\frac{x(1-x)}{\tan x(1-x)} \leq C$ con C costante opportuna; ne segue che $|f| \leq C\frac{(1-x)^3}{(-\ln x)^\alpha}$ per $1 - \delta \leq x \leq 1$. Da ciò segue che $\int_{1-\delta}^1 dx|f| \leq \int_{1-\delta}^1 dx \frac{(1-x)^3}{(-\ln x)^\alpha} = -\int_\delta^0 d\xi \frac{\xi^3}{(-\ln(1-\xi))^\alpha} = \int_0^\delta d\xi \frac{\xi^3}{(-(-\xi+o(\xi)))^\alpha} = \int_0^\delta d\xi \frac{\xi^3.}{(\xi+o(\xi))^\alpha}$. L'integrale esiste per $3 - \alpha > -1$ ossia $\alpha < 4$.
Se invece $0 < x \leq \delta'$ allora $|f| \leq \frac{C'}{x(-\ln x)^\alpha}$ e quindi studiamo $\int_0^{\delta'} \frac{dx}{x(-\ln x)^\alpha} = \int_{-\infty}^{\ln \delta'} \frac{dt}{(-t)^\alpha}$ e converge per $\alpha > 1$. Il risultato è che l'integrale converge per $1 < \alpha < 4$.
Se $\alpha \geq 4$ non converge il primo integrale mentre il secondo converge. Se $\alpha \leq 1$ non converge il secondo integrale mentre il primo converge.

1.8 $\int_1^\infty \big(x(\ln x)^\alpha + (x^2-1)^{1/3}\big)^{-1} dx$

Spezziamo l'integrale come $\int_1^a dx f(x) + \int_a^b dx f(x) + \int_b^\infty dx f(x)$. Cambiando variabile $t = x - 1$ il primo diventa $\int_0^{a-1} dt\ ((1+t)\ln^\alpha(1+t) + (t+2)^{1/3}t^{1/3})^{-1}$ e se $a - 1$ è abbastanza piccolo $|f(t)| \leq (t^\alpha(1+o(1))^\alpha + 2^{1/3}t^{1/3})^{-1}$. Se $\alpha < \frac{1}{3}$ $|f(t)| \leq \frac{C}{t^\alpha}$ che fa convergere l'integrale in questione per $\alpha < 1$. Se $\alpha = \frac{1}{3}$ $|f(t)| \leq \frac{C}{t^{1/3}}$ che converge. Se $\alpha > \frac{1}{3}$ allora $|f(t)| \leq \frac{C}{t^{1/3}}$ e quindi converge. La conclusione è che il primo integrale converge per ogni valore di α. Il secondo integrale converge per ogni valore di α mentre il terzo, essendo $|f(t)| \leq \frac{C}{t\ln^\alpha t}$ converge per $\alpha > 1$. Se $\alpha \leq 1$ il terzo integrale diverge. Infatti l'integrando si minora definitivamente per $t \to +\infty$ con $4t\ln^\alpha t$ da cui la divergenza. Si dimostrino tutte le maggiorazioni scritte ossia si dia un senso concreto alla parola "definitivamente" anche in quei casi in cui non viene esplicitamente usata.

1.8 $\int_2^\infty \big(\cos(x^{-\gamma/2}) - (1 - \frac{1}{x})^\alpha\big) dx$

Per $x \to +\infty$ l'integrando è dato da $-\frac{1}{2x^\gamma} - \frac{\alpha}{x} + O(\frac{1}{x^{2\gamma}}) + O(\frac{1}{x^2})$ da cui segue che: $\gamma > 1$ $\alpha \geq 0$ non converge $\quad \gamma = 1 \wedge \alpha \neq -1$ non converge $\quad \gamma = 1 \wedge \alpha = -\frac{1}{2}$ converge $\quad 0 < \gamma < 1$ non converge.
Lo studente/ssa faccia le opportune maggiorazioni e minorazioni per dimostrare il risultato.

1.8 $\int_0^\infty \big[\frac{\sqrt{x}}{2x^2+3x} + x^{\alpha-1}e^{-2/x} + (x+1)(\cos\frac{2}{x^2} - 1)\big] dx$

Il primo e terzo addendo danno un contributo convergente all'integrale improprio (dimostrare). $x^{\alpha-1}e^{-2/x} \leq x^{\alpha-1}$ per cui $\alpha < 0$ implica la convergenza "a $+\infty$". Se $\alpha \geq 0$, essendo definitivamente per $x \to +\infty$ $e^{-2/x} \geq \frac{1}{2}$, si avrebbe $x^{\alpha-1}e^{-2/x} \leq x^{\alpha-1} \geq \frac{1}{2}x^{\alpha-1}$ da cui la divergenza. Lo studio dell'integrale improprio nell'intorno dell'origine ci dice che converge per ogni valore di α. Infatti $e^{-2/x} = o(x^N)$ per ogni N grande a piacere e per $x \to 0^+$.

1.8 $\int_0^\infty \frac{\arctan\sqrt{t}}{t^\alpha}$

Essendo $\arctan\sqrt{t} \leq \sqrt{t}$ si ha $\frac{\arctan\sqrt{t}}{t^\alpha} \leq t^{\frac{1}{2}-\alpha}$ e quindi converge per $\frac{1}{2} - \alpha > -1$ ossia $\alpha < \frac{3}{2}$. Inoltre per $t < t_o$ con t_o opportuno si ha $\arctan\sqrt{t} \geq \frac{1}{2}t$ da cui $\frac{\arctan\sqrt{t}}{t^\alpha} \geq \frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-\alpha}$ e quindi l'integrale $\int_0^{t_o} dt\frac{\arctan\sqrt{t}}{t^\alpha}$ diverge se $\alpha \geq \frac{3}{2}$. Inoltre dalla maggiorazione $\arctan\sqrt{t} \leq \frac{\pi}{2}$ si ha $\frac{\arctan\sqrt{t}}{t^\alpha} \leq \frac{\pi}{2t^\alpha}$ da cui la convergenza dell'integrale a $+\infty$ per $\alpha > 1$. Il risultato è quindi che $1 < \alpha < \frac{3}{2}$. Se $\alpha \geq \frac{3}{2}$ il primo integrale diverge mentre il secondo converge da cui la divergenza. Se viceversa $\alpha \leq 1$ il primo integrale converge mentre il secondo diverge da cui la divergenza.

1.8 $\int_0^\infty dx(27x^\alpha + x^2)^{-1}$

Essendo $f_\alpha(x) < \frac{1}{x^2}$ l'integrale $\int_a^\infty f_\alpha(x)dx$ converge per ogni valore di α.

Se $\alpha \geq 1$ e $0 < x \leq 1$ si ha $f_\alpha(x) \geq \frac{1}{54x^m}$ dove $m = \min\{x^\alpha, x^2\}$ da cui segue la divergenza dell'integrale in quanto $m \geq 1$.

Se invece $\alpha < 1$ maggioro $f_\alpha(x) \leq \frac{1}{27x^\alpha}$ da cui la convergenza. La conclusione è che l'integrale converge per $\alpha < 1$.

1.8 $\int_2^{+\infty} \frac{\arctan(x-2)^\alpha}{\sqrt{x}-1}dx$

Se $\alpha \geq 0$ allora $\arctan(x-2)^\alpha$ è definitivamente per $x \to +\infty$ maggiore od uguale a $\frac{\pi}{4}$ per cui l'integrale diverge.

Essendo poi $\frac{(x-2)^\alpha}{\sqrt{x}-1} \leq Cx^{\alpha-\frac{1}{2}}$ con C costante opportuna e definitivamente per $x \to +\infty$ se ne conclude che per $\alpha < -\frac{1}{2}$ l'integrale converge.

Poiché inoltre $\frac{(x-2)^\alpha}{\sqrt{x}-1} \geq C'x^{\alpha-\frac{1}{2}}$ l'integrale diverge per $-\frac{1}{2} \leq \alpha < 0$. Si stimino le costanti C e C'.

1.8 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x\ \ln x}{(x+1)^{3/2}-1}dx$

Definitivamente per $x \to +\infty$ si ha $|f| \leq \frac{1}{x^{5/4}}$ (lo si dimostri) per cui si ha convergenza. Definitivamente per $x \to 0$ si ha $|f| \leq 2\ln x$ (lo si dimostri) per cui l'integrale è convergente.

1.8 $\int_0^1 dx(x\ln x + \frac{(1-\cos x)^\alpha}{e^x-1})$

Taylor ci dice che l'integrale converge per $\alpha > 0$

1.8 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x+1|^{|x|(a-1)}dx$

Per $|x| \to +\infty$ ci vuole $a-1 < 0$. Se $a-1 \geq 0$ ne segue che $f(x) \geq 1$ da cui la divergenza. Essendo negativo scriviamo $a-1 = -|a-1|$ e quindi $f(x) = \frac{1}{|x+1|^{|x||a-1|}}$; poi cambiamo variabile $x+1 = t$ e per $|t| \leq \delta$ con δ sufficientemente piccolo abbiamo $\int_{-\delta}^{\delta} \frac{dt}{|t|^{|a-1|}|t|^{-t|a-1|}}$. $|t|^{-t|a-1|} = e^{-t|a-1|\ln t} \geq 1$ per cui $\int_{-\delta}^{\delta} \frac{dt}{|t|^{|a-1|}|t|^{-t|a-1|}} \leq \int_{-\delta}^{\delta} \frac{dt}{|t|^{|a-1|}}$ e la convergenza si ha per $|a-1| < 1$ ossia $0 < a < 2$.

1.8 $\int_0^1 (\frac{1}{x^\alpha \sin^2 x} - \frac{1}{x^{3\gamma}})dx$

$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$ $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x(1-\frac{1}{6}x^2+o(x^3))} = \frac{1}{x}(1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^3))$ e quindi l'integrale diventa $\int_0^1 dx(\frac{1}{x^{2+\alpha}}(1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^3)) - \frac{1}{x^{3\gamma}})$ da cui il risultato per cui l'integrale converge solamente se $\alpha < -1 \ \wedge \ \gamma < \frac{1}{3}$ oppure $\alpha < 1 \ \wedge \ 2 + \alpha = 3\gamma$

1.8 $\int_0^1 x^{\ln x}dx$

$\int_0^1 x^{\ln x}dx = \int_0^1 e^{(\ln\frac{1}{x})^2} = \int_0^1 \left(\frac{1}{x}\right)^{\ln\frac{1}{x}} = \int_0^{\frac{1}{e}} \left(\frac{1}{x}\right)^{\ln\frac{1}{x}} + \int_{\frac{1}{e}}^1 \left(\frac{1}{x}\right)^{\ln\frac{1}{x}} \geq \int_{\frac{1}{e}}^1 \left(\frac{1}{x}\right)^{\ln\frac{1}{x}} + \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x}$ e quest'ultimo integrale diverge.

1.8 $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{\ln x}dx$

Integrando per parti si arriva a $-\frac{\cos x}{\ln x}\Big|_2^{+\infty} - \int_2^{+\infty} \frac{\cos x}{x\ln^2 x}dx$. L'ultimo integrando è maggiorabile in modulo con $\frac{1}{x\ln^2 x}$ che è integrabile fra 2 e $+\infty$.

1.8 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+1)^{3/2}}dx$

$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+1)^{3/2}}dx = \lim_{A\to 0}\lim_{B\to+\infty}\int_A^B \frac{\ln x}{(x+1)^{3/2}}dx$ ed integrando per parti si ha
$-2\lim_{A\to 0}\lim_{B\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x+1}}\right)\Big|_A^B + 2\lim_{A\to 0}\lim_{B\to+\infty}\int_A^B \frac{dx}{x(x+1)^{1/2}}$ e con la sostituzione
$\sqrt{x+1} = t$ si perviene a $-2\lim_{A\to 0}\lim_{B\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x+1}}\right)\Big|_A^B - 2\lim_{A\to 0}\lim_{B\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x+2\sqrt{x+1}}\right)\Big)_A^B$
da cui $2\lim_{A\to 0}\frac{\ln A}{(A+1)^{1/2}} - 2\lim_{A\to 0}\ln A + 2\lim_{A\to 0}\ln(A+2\sqrt{A+1}) = 2\ln 2$

1.8 $\int_0^1 dx\frac{(1-x^4)^{3/2}}{\tan(x-1)^2}$

Sviluppando secondo Taylor abbiamo convergenza.

1.8 $\int_0^{+\infty} t^{-a}\arctan^3(\frac{t}{t^2+2})dt$

Dalla maggiorazione $\arctan\frac{t}{t^2+2} \leq \min\{\frac{1}{t},\frac{t}{2}\}$ segue che l'integrale è certamente convergente per $-2 < a < 4$.
Sia ora $a \geq 4$. Se $t < t_o$ con t_o opportuno si ha $\arctan\frac{t}{t^2+2} \geq \frac{1}{2}\frac{t}{t^2+2} \geq \frac{t}{2+t_o^2}$ e quindi l'integrale $\int_0^{t_o}\frac{dt}{t^a}\arctan^3(\frac{t}{t^2+2})$ si minora con $\int_0^{t_o}\frac{dt}{t^a}(\frac{t}{t_o^2+2})^3$ che diverge appunto non appena $a \geq 4$. D'altro canto $\int_{t_o}^{+\infty}\frac{dt}{t^a}\arctan^3(\frac{t}{t^2+2}) \leq \int_{t_o}^{+\infty}\frac{\pi^3 dt}{8t^a}$ che viceversa converge per $a \geq 4$ da cui la convergenza della somma degli integrali.
Sia ora $a \leq -2$. Per $t > t_1$ con t_1 opportuno si ha $\arctan\frac{t}{t^2+2} \geq \frac{1}{2}\frac{t}{2t^2} = \frac{1}{2t}$
da cui $\int_{t_1}^{+\infty}\frac{dt}{t^a}\arctan^3(\frac{t}{t^2+2}) \geq \int_{t_1}^{+\infty}\frac{dt}{8t^{a+3}}$ da cui la divergenza per $a \geq -2$. D'altro canto
$\int_0^{t_1}\frac{dt}{t^a}\arctan^3(\frac{t}{t^2+2}) \leq \int_0^{t_1}\frac{dt}{t^a}\frac{\pi^3}{8}$ che converge per $a \leq -2$.

1.8 $\int_{\alpha+\gamma}^{\infty} t^\alpha\ln(t+2)dt$

Se $\alpha \geq 0$ l'integrale diverge in quanto $\lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$. Sia allora $\alpha < 0$. L'integrale può convergere solo se $\alpha < -1 \wedge \alpha+\gamma > 0$. Infatti $f(t) = t^{-1+\frac{1}{2}(\alpha+1)}t^{\frac{1}{2}(\alpha+1)}\ln(2+t) \leq t^{-1+\frac{1}{2}(\alpha+1)}C$ per $t > t_o$ e per una opportuna costante C.
Se $-1 < \alpha < 0$ $f(t) > t^{\alpha-\frac{\alpha+1}{2}} = t^{\frac{\alpha-1}{2}}$ definitivamente per $t\to+\infty$ e $-1 < \frac{\alpha-1}{2} < 0$ per cui l'integrale è maggiore di un integrale divergente e quindi diverge anch'esso.
Se $\alpha < -1$ ma $\alpha+\gamma \leq 0$ allora il cammino di integrazione attraversa l'origine e si ha definitivamente per $t\to 0$ $f(t) > t^{\alpha+\frac{1}{2}(-1-\alpha)} = t^{\frac{\alpha-1}{2}}$ e $\frac{\alpha-1}{2} < -1$ da cui la divergenza.

1.8 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\ln\sin x$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\ln(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}) = \frac{\pi}{2}\ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\ln\sin\frac{x}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\ln\cos\frac{x}{2}$; nell'ultimo integrale cambiamo variabile $-x+\pi = t$ e diventa $-\int_\pi^{\frac{\pi}{2}} dt\ln\sin\frac{t}{2} = \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi dt\ln\sin\frac{t}{2}$. La somma degli integrali ora dà $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\ln 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}\ln 2 + \int_0^\pi dt\ln\sin\frac{t}{2} = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt\ln\sin t$ da cui il risultato.

1.8 $\int_0^\pi dx\ln\sin x$

In questo caso basta osservare che per ogni valore di $0 \leq y < 1$ vi sono due valori $x_1 \in]0,\frac{\pi}{2})$ e $x_2 \in (\frac{\pi}{2},\pi]$ tali che $\sin x_1 = \sin x_2$ e quindi $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\ln\sin x = \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi dx\ln\sin x$

1.8 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \ln\cos x$

Basta osservare che $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \ln\cos x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \ln\sin(\frac{\pi}{2}-x) = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 dt \ln\sin t = -\frac{\pi}{2}\ln 2$

1.8 $\int_1^{\infty} \frac{dx \ln x}{x\sqrt{x^2-1}}$

Cambiando variabile $x = \frac{1}{t}$ l'integrale diventa $-\int_0^1 \frac{dt \ln t}{\sqrt{1-t^2}}$ e definendo $x = \sin z$ diventa $-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin z dz = \frac{\pi}{2}\ln 2$

1.8 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx x\cot x$

Poiché $\cot x dx = d(\ln(\sin x))$ si ottiene $x\ln(\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin z dz$ da cui il risultato $\frac{\pi}{2}\ln 2$

1.8 $\int_0^1 dx \frac{\arcsin x}{x}$

Nel precedente integrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx x\cot x$ effettuiamo la sostituzione $\sin x = t$

1.8 $\int_0^{\pi} dx x\ln(\sin x)$

$\int_0^{\pi} dx x\ln(\sin x) = \int_0^{\pi} dx x\ln 2 + \int_0^{\pi} dx x\ln(\sin\frac{x}{2}) + \int_0^{\pi} dx x\ln(\cos\frac{x}{2})$. Nell'ultimo integrale eseguiamo la sostituzione $-x+\pi = t$ da cui si ha $\int_0^{\pi} dx x\ln(\cos\frac{x}{2}) = -\int_{\pi}^0 dt(\pi-t)\ln\cos\frac{t}{2} = \int_0^{\pi}(\pi-t)\ln\sin\frac{t}{2}$. Sommando con i precedenti integrali otteniamo $\int_0^{\pi} xdx\ln 2 + \int_0^{\pi}\pi\ln\sin\frac{t}{2} = \frac{\pi^2}{2}\ln 2 + 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt\ln(\sin t) = \frac{\pi^2}{2}\ln 2 - 2\pi\frac{\pi}{2}\ln 2 = -\frac{\pi^2}{2}\ln 2$

1.8 $\int_0^{2\pi} dx x\ln(\cos^2\frac{x}{2})$

$\int_0^{2\pi} dx x\ln(\cos^2\frac{x}{2}) = 2\int_0^{\pi} dx x\ln(\cos^2\frac{x}{2}) = 4\int_0^{\pi} dx x\ln(\cos\frac{x}{2}) = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\ln(\cos x) = -4\pi\ln 2$

1.8 $\int_0^{+\infty} dx\frac{\ln x}{1+x^2}$

Partiamo da $-\pi\ln 2 = \int_0^{\pi} dx\ln\sin x$ sostituendo $x = 2\arctan t$ ed ottenendo $\int_0^{+\infty} 2\frac{dt}{1+t^2}\ln(\frac{2t}{1+t^2}) = 2\ln 2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} + 2\int_0^{+\infty} dt\frac{\ln t}{1+t^2} - 2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}\ln(1+t^2)$. Nell'ultimo integrale sostituiamo $t = \tan z$ ottenendo $-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dz\ln\cos z = 2\frac{\pi}{2}\ln 2$ e quindi $-\pi\ln 2 = 2\frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{+\infty} dx\frac{\ln x}{1+x^2} - 2\pi\ln 2$ ossia $\int_0^{+\infty} dx\frac{\ln x}{1+x^2} = 0$

1.8 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx\ln(1+\tan x)$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx\ln(1+\tan x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx\ln(\sin x+\cos x) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx\ln\cos x$. Cambiamo variabile nel secondo integrale $\frac{\pi}{4} - x = t$ ottenendo $\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx\ln(\sqrt{2}\cos x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx\ln(\sqrt{2}) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx\ln(\cos x)$. Sommando si ottiene $\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx\ln(1+\tan x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx\ln(\sqrt{2}) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx\ln(\cos x) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx\ln(\cos x) = \frac{\pi}{8}\ln 2.$

1.8 $\int_0^1 dx\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$. Si cambia variabile $x = \tan t$ nel precedente

1.8 $\int_0^{+\infty} dx\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$.

Si scrive $\int_0^{+\infty} dx\frac{\ln(1+x)}{1+x^2} = \int_0^1 dx\frac{\ln(1+x)}{1+x^2} + \int_1^{+\infty} dx\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$. Si cambia variabile $x = \tan t$ nel secondo integrale come prima e si ottiene $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx\ln(1+\tan x) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx\ln(\cos x+\sin x) - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx\ln(\cos x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx\ln(\cos x+\sin x) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx\ln(\cos x)$. Nel primo integrale si cambia variabile $\frac{\pi}{4} - x = t$ e quindi $\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx\ln(\cos x+\sin x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}}{}' \ln(\sqrt{2}\sin t)dt$ da cui $\int_1^{+\infty} dx\frac{\ln(1+x)}{1+x^2} = \frac{\pi}{8}\ln 2$ e commando con $\int_0^1 dx\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$ si ottiene $\frac{\pi}{4}\ln 2$

1.8 $\int_0^1 dx\frac{\arctan x}{1+x}$. Si integra per parti il precedente

1.8 $\int_0^{\pi/4}\frac{xdx}{2+\cos(2x)+\sin(2x)}$. Si effettua la sostituzione $t=\tan x$ nel precedente.

1.8 $\int_0^{\pi}dx\frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}$.
Si scrive $\int_0^{\pi}dx\frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}$. Nel secondo si cambia variable $x-\frac{\pi}{2}=t$ e si ottiene $\int_0^{\pi}dx\frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\frac{x\cos x}{1+\cos^2 x}+\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\frac{\cos x}{1+\cos^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\frac{x\sin x}{2-\cos^2 x}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\frac{x\cos x}{2-\sin^2 x}+\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\frac{\cos x}{2-\sin^2 x}\stackrel{\text{def}}{=}I_1+I_2+I_3$. In I_1 effettuiamo la sostituzione $\cos x=u$, nel secondo e nel terzo la sostituzione $\sin x=u$ ed otteniamo $\int_0^1 du\frac{\arccos u}{2-u^2}+\int_0^1 du\frac{\arcsin u}{2-u^2}+\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{du}{2-u^2}$. Usando il fatto che $\arcsin u+\arccos u=\frac{\pi}{2}$ si ha $I=\pi\int_0^1\frac{du}{2-u^2}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2})$

1.8 $\int_0^{\pi}dx\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}$.
Si fanno gli stessi calcoli di prima. L'integrale diventa $\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{\arcsin u}{1+u^2}du+\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{\arccos u}{1+u^2}du+\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{du}{1+u^2}=\pi\int_0^1\frac{du}{1+u^2}=\frac{\pi^2}{4}$

1.8 $\int_{-1}^{1}dx\frac{\arccos x}{1+x^2}$
Con la sostituzione $x=\cos t$ si ottiene $\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt=\frac{\pi^2}{4}$

2.8 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ e $\int_0^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx$
Dimostreremo un risultato più generale che si applica alle funzioni date. Tale risultato costituisce il contenuto della seguente proposizione. Dopo daremo anche una dimostrazione *ad hoc* per i due integrali.

Proposizione 2.8.1 *L'integrale* $\int_a^{+\infty}dx\,g(x)\sin x$ *dove* $g(x)>0$ *e* $\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$ *in modo monotono* ($g(x)\searrow 0$) *è convergente. Se inoltre* $\int_a^{+\infty}dx\,g(x)=+\infty$ *allora l'integrale* $\int_a^{+\infty}dx\,g(x)|\sin x|$ *è divergente.*

Come è evidente, la proposizione si applica ai due integrali in questione.

Per la dimostrazione abbiamo bisogno di un risultato relativo alla convergenza delle serie numeriche. Tale risultato, dovuto a Leibnitz, è contenuto nel seguente

Lemma È data la successione $\{a_n\}$ tale che $a_n\cdot a_{n+1}\geq 0$ ed inoltre $\lim_{n\to+\infty}|a_n|=0$. Allora esiste il limite $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(-)^k a_k$.

La dimostrazione è un risultato classico della teoria delle serie (vedi `Teorema 9.7`) e $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(-)^k a_k$ è detto somma della serie.

Il precedente risultato prelude al seguente

Lemma Sia data la funzione f che verifica le ipotesi seguenti
1) $f(x)=0$ per $x=a_j$ con $a_1<a_2<a_3<\ldots a_n\ldots$
2) $f(x)>0$ per $a_{2n-1}<x<a_{2n}$, $f(x)<0$ per $a_{2n}<x<a_{2n+1}$
3) Esiste un intero N per cui i numeri $b_n=\int_{a_n}^{a_{n+1}}dx\,f(x)$ verificano le relazioni $|b_n|\geq|b_{n+1}|$ per $n=N,N+1,N+2,\ldots$ e $\lim_{n\to+\infty}|b_n|=0$
Allora $\int_a^{+\infty}dx\,f(x)$ è convergente.

Dimostrazione Dato X esiste un intero n tale che $a_n\leq X\leq a_{n+1}$; inoltre $\int_a^X dx\,f(x)=\int_a^{a_1}dx\,f(x)+[b_1+b_2+b_3+\ldots+b_{n-1}]+\int_{a_n}^{X}dx\,f(x)$. Ora facciamo il limite per n che tende a $+\infty$ della precedente espressione. Il primo termine è costante. Il secondo termine converge perché verifica le condizioni del criterio di Leibnitz dato dal precedente Lemma. Il terzo termine tende a zero in quanto $|\int_{a_n}^X dx\, f(x)| \le |b_n|$ avendo f segno costante su ogni intervallo delle radici.

Ora possiamo dimostrare il teorema da cui eravamo partiti.
Essendo $g(x) > 0$ le radici di $g(x)\sin x$ sono date da $x = k\pi$ $k \in \mathbf{Z}$. È evidente che $g(x)|\sin x| \ge g(x+\pi)|\sin(x+\pi)|$. Inoltre $|b_n| = \int_{m\pi}^{(m+1)\pi} g(x)|\sin x|dx \ge \int_{m\pi}^{(m+1)\pi} g(x+\pi)|\sin(x+\pi)|dx = \int_{(m+1)\pi}^{(m+2)\pi} g(x)|\sin x|dx = b_{m+1}$. Inoltre $|b_n| \le \pi g(m\pi) \to 0$ per $m \to +\infty$. Quindi le ipotesi del precedente lemma sono verificate e l'integrale è convergente.

Sia ora $\int_a^{+\infty} dx\, g(x) = +\infty$.
$\int_a^{+\infty} dx\, g(x)|\sin x| \ge \int_a^{a_1} dx\, g(x)|\sin x| + \sum_{k=1}^{+\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} dx\, g(x)|\sin x|$ e la sommatoria è maggiore od uguale a $\sum_{k=1}^{+\infty} g(\pi(k+1))\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} dx\,|\sin x| = \sum_{k=1}^{+\infty} 2g(\pi(k+1))$. Quest'ultima somma è divergente essendo divergente l'integrale di $g(x)$.

$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx + \lim\limits_{A\to+\infty}\int_1^A\frac{\sin x}{x}dx$. Nel secondo integriamo per parti ottenendo $\lim_{A\to+\infty}(\cos 1 - \frac{\cos A}{A}) - \lim_{A\to+\infty}\int_1^A \frac{\sin x}{x^2}dx$. Ambedue i limiti esistono.

Per quanto riguarda $\int_0^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx$ si può osservare che $|\sin x| \ge \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$. e rifarsi i conti.

2.8 $\int_0^{+\infty} dx\, \cos x^\gamma$

Se $\gamma < 0$ $\lim_{x\to+\infty}\cos x^\gamma = 1$ e quindi l'integrale improprio non può essere convergente. Infatti esiste $N > 0$ tale che $x > N \Rightarrow \cos x^\gamma > \frac{1}{2}$ e quindi l'integrale improprio verifica la minorazione $\int_0^{+\infty} dx\, \cos x^\gamma \ge \int_0^N dx\, \cos x^\gamma + \int_N^{+\infty} dx\, \cos x^\gamma \ge \int_0^N dx\, \cos x^\gamma + \frac{1}{2}\int_N^{+\infty} dx$ che chiaramente diverge.

Sia ora $\gamma > 0$
Cambiando variabile $x^\gamma = t$ l'integrale diventa $\int_0^1 dx\, \cos x^\gamma + \int_1^{+\infty}\frac{dt}{\gamma}t^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\cos t$. Il primo integrale è convergente mentre per il secondo integriamo per parti ottenendo $\frac{1}{\gamma}t^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\sin t\,\Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} dt\, \frac{1-\gamma}{\gamma^2}t^{\frac{1-2\gamma}{\gamma}}\sin t$. Il primo contributo è definito e finito se $\gamma > 1$. Il secondo contributo è un integrale improprio convergente se $\frac{1-2\gamma}{\gamma} < -1$ ossia $\gamma > 1$. È importante notare che $\lim_{x\to+\infty}\cos x^\gamma$ non esiste a meno che $\gamma = 0$ e quindi la funzione non è infinitesima per $x \to +\infty$. Naturalmente se esistesse il limite per x che tende a $+\infty$ allora tale limite deve essere zero se si vuole l'integrale improprio convergente. Tale esempio inoltre non verifica l'ipotesi del `teorema 8.12` né del `teorema 8.13`. Oltre al calcolo eseguito si può usare la proposizione precedente dopo la sostituzione nell'integrale (la $g(x)$ è data da $x^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$).

Se $\gamma = 1$ l'integrale si calcola ed è divergente nel senso che $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x dt\, \cos t$ non esiste. Nonostante ciò è vero che $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{2\pi n} dt\, \cos t = 0$.

Vogliamo ora far vedere che $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x dt\, \cos^\gamma t$ non converge per $0 < \gamma < 1$.

Per questo bisogna ricordare che $\int_0^{+\infty} dx \cos x^\gamma \doteq \lim_{X\to+\infty}\int_0^X dx\cos x^\gamma \doteq \lim_{X\to+\infty} I(X)$
Tale limite esiste se e solo se è verificato il criterio di Cauchy (la dimostrazione verrà data alla fine) ossia
$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, X_\varepsilon > 0\ t.c.\ X' \ge X_\varepsilon,\ X'' \ge X_\varepsilon \ \Rightarrow\ |I(X') - I(X'')| = |\int_{X'}^{X''} dx\cos x^\gamma| < \varepsilon$
(vedi `pag.176` per la formulazione del criterio di Cauchy riguardante le successioni.). Sia ora $\{X_n\}$ una successione tale che $\lim_{n\to+\infty} X_n = +\infty$ e supponiamo che esista una sottosuccessione

$\{X_{n_k}\}$ tale che $\lim_{k\to+\infty}\int_{X_{n_k}}^{X_{n_k}+\delta} dx\cos x^\gamma \neq 0$. In tal caso non è verificato il criterio di Cauchy in quanto dato $X > 0$, basta prendere $X_{n_k}+\delta$ quale X'' e X_{n_k} quale X' per negare tale criterio. Nel nostro caso particolare, una volta pervenuti alla formula $\int_0^1 dx\,\cos x^\gamma + \int_1^{+\infty}\frac{dt}{\gamma}\,t^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\cos t$ si prenda $X_n = \frac{\pi}{2}+n\pi$ e si consideri la sottosuccessione $\{X_{n_k}\} = \{\frac{4k+1}{2}\pi+\pi\} = \{2k\pi+\frac{3\pi}{2}\}$, k intero. $\int_{2k\pi+\frac{3\pi}{2}}^{2k\pi+\frac{5\pi}{2}}\frac{dt}{\gamma}t^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\cos t \geq \frac{\pi\delta}{2}$ con $\delta < 1$. La conseguenza è che l'integrale improprio non converge..

Per dimostrare la relazione $\int_{2k\pi+\frac{3\pi}{2}}^{2k\pi+\frac{5\pi}{2}}\frac{dt}{\gamma}t^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\cos t \geq \frac{\pi\delta}{2}$ si deve far ricorso al grafico della funzione $f(t) = t^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\cos t$. Il grafico è costituito da una funzione illimitata che negli intervalli $(2k\pi+\frac{3\pi}{2}, 2k\pi+\frac{5\pi}{2}) \doteq (t_k, t_k')$ è positiva. $f'(t) = \frac{1-\gamma}{\gamma}t^{\frac{1-2\gamma}{\gamma}}\cos t - t^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\sin t$ e $f''(t) = t^{\frac{1-3\gamma}{\gamma}}\Big[\cos t(\frac{(1-\gamma)(1-2\gamma)}{\gamma^2}-t^2) - 2\frac{1-\gamma}{\gamma}t\sin t\Big]$. Ne segue che $f(t)$ ha un massimo in ciascun intervallo (t_k, t_k') la cui ascissa $x_k \searrow \frac{t_k+t_k'}{2} = 2\pi(k+1)$ per $k\to+\infty$. Inoltre ha la concavità rivolta verso l'alto nell'intervallo $(t_k, a_k)\subset(t_k,t_k')$ con $a_k\to t_k$ per $k\to+\infty$ e verso il basso nella restante parte di intervallo. L'ordinata del massimo è $f'(x_k) = \frac{\gamma}{1-\gamma}x_k^{\frac{1}{\gamma}}\sin x_k$. $f'(2k\pi+\frac{3\pi}{2}) = (2k\pi+\frac{3\pi}{2})^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} > 1$ mentre $f'(2k\pi+\frac{5\pi}{2}) = -(2k\pi+\frac{5\pi}{2})^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} < -1$. Quindi negli intervalli (t_k, t_k') il grafico della funzione è costituito da "campane" che tendono a diventare dei rettangoli con il lato più piccolo uguale $t_k'-t_k = \pi$ e l'altezza sempre più grande. Ne segue che ciascuna di queste campane conterrà al suo interno il triangolo che ha per base il segmento (t_k, t_k') e per altezza un opportuno valore $\delta < 1$. In tal modo la divergenza dell'integrale improprio è assicurata.

Dobbiamo ora dimostrare la seguente proposizione:

Proposizione 2.8.2 $\lim_{X\to+\infty} I(X) = I \iff: \forall\,\varepsilon\ \exists\ X_\varepsilon > 0\ t.c.\ X' \geq X_\varepsilon\ X'' \geq X_\varepsilon \Rightarrow |I(X') - I(X'')| = |\int_{X'}^{X''} dx\cos x^\gamma| < \varepsilon$

Dimostrazione Cominciamo da $\Rightarrow$. Supponiamo quindi che esiste $\lim_{X\to+\infty} I(X) = I$. Dalla definizione di limite segue che dato $\frac{\varepsilon}{2}$ esiste X_ε tale che $|I(X) - I| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ non appena $X > X_\varepsilon$. Ma allora prendendo $X > X_\varepsilon$ e $X' > X_\varepsilon$ si ha $|I(X) - I(X')| = |I(X) - I + I - I(X')| \leq |I(X) - I| + |I - I(X')| \leq \varepsilon$ e questo è vero qualunque siano X ed X' perché maggiori di X.

Facciamo ora vedere $\Leftarrow$. Supponiamo quindi che sia vero il criterio di Cauchy. Ne dobbiamo concludere che esiste il limite I.

1) Sia $U_A = \{Y \in \mathbf{R}\ t.c.\ Y = I(X), X > A\}$.

Dato $B > A$ sia $S_B = \sup_{X>B} I(X)$ e $s_B = \inf_{X>B} I(X)$. Evidentemente $B' > B$ implica $S_{B'} \leq S_B$ e $s_{B'} \geq s_B$. La successione $\{s_B\}$ è monotona non decrescente e limitata dall'alto mentre la successione $\{S_B\}$ è monotona non crescente e limitata dal basso. Dunque s_B converge al suo estremo superiore s e S_B al suo estremo inferiore S.

3) Il criterio di Cauchy implica che $\forall\ \varepsilon > 0,\ 0 < S - s < \varepsilon$. Infatti dalla definizione di estremo superiore ed inferiore segue che esistono $X_{B,\varepsilon} > A$ e $X'_{B,\varepsilon} > A$ tale che $s_B \leq I(X_{B,\varepsilon}) < s_B + \varepsilon$ e $S_B - \varepsilon < I(X'_{B,\varepsilon}) \leq S_B$. Ma allora $S_B - s_B < |I(X'_{B,\varepsilon}) + I(X_{B,\varepsilon})|$ e quest'ultima quantità è minore di ε per ipotesi.

4) La conclusione del punto 3) implica che $s = S \doteq I$. Infatti se così non fosse ossia $s < S$ si cadrebbe in contraddizione con le conclusioni del punto 3)

5) Si conclude dimostrando che $\lim_{X\to+\infty} I(X) = I$. Infatti $s_B - I \leq I(X) - I \leq S_B - I$ per ogni $X > B$. Quindi si ha $s_B - s + s - I \leq I(X) - I \leq S_B - S + S - I$ e quindi $s_B - s \leq I(X) - I \leq S_B - S$ e quindi $-\varepsilon \leq I(X) - I \leq \varepsilon$ per un opportuno B che dipende da ε.

2.8 $\int_0^{+\infty} dx\,x^2\cos x^6$.

Cambiando variabile $x^3 = t$ il precedente integrale diventa $\frac{1}{3}\int_0^{+\infty} dt\,\cos t^2$ e quindi converge. *Tale esempio potrebbe apparire sorprendente in quanto la funzione non è neppure limitata per*

$x \to +\infty$. Ci si convinca però del fatto che se esistesse tale limite, per avere convergenza dell'integrale, esso dovrebbe essere zero.

2.8 $\int_0^\infty xe^{-x^6\sin^2 x}dx$

Scriviamo $\int_0^\infty xe^{-x^6\sin^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xe^{-x^6\sin^2 x}dx + \sum_{k=1}^{+\infty}\int_{k\pi-\frac{\pi}{2}}^{k\pi+\frac{\pi}{2}} xe^{-x^6\sin^2 x}dx$ ed esaminiamo il singolo integrale $\int_{k\pi-\frac{\pi}{2}}^{k\pi+\frac{\pi}{2}} xe^{-x^6\sin^2 x}dx = \int_{k\pi-\frac{\pi}{2}}^{k\pi-\varepsilon_k} xe^{-x^6\sin^2 x}dx + \int_{k\pi-\varepsilon_k}^{k\pi+\varepsilon_k} xe^{-x^6\sin^2 x}dx + \int_{k\pi+\varepsilon_k}^{k\pi+\frac{\pi}{2}} xe^{-x^6\sin^2 x}dx$ $\varepsilon_k < \frac{1}{2}$. Cominciamo a studiare il secondo integrale. Esso è maggiorabile da $2\varepsilon_k(\pi k + \varepsilon_k) \le 2(\pi+1)k\varepsilon_k$. Ora prendiamo $\varepsilon_k = \frac{1}{k^a}$ con $a > 2$. ne segue che $\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{k\pi-\varepsilon_k}^{k\pi+\varepsilon_k} xe^{-x^6\sin^2 x}dx \le \sum_{k=1}^{+\infty} 2(\pi+1)k^{1-a}$ e quindi converge. Consideriamo ora il terzo integrale. Nell'intorno del punto $x_k = \pi k$ la funzione si può scrivere come $(\pi+\varepsilon_k)e^{-(\pi+k)^6\sin^2\varepsilon_k}$. Ora per $|x| \le x_o$ con x_o calcolabile si ha $\sin^2 x \ge \alpha x^2$ con α che dipende da x_o e quindi si può stimare $(\pi k+\varepsilon_k)e^{-(\pi+k)^6\sin^2\varepsilon_k} \le (\pi k+1)e^{-(\pi k-1)^6\alpha^{-2}k^{-2a}}$ ed è una quantità che tende a zero a patto che $a < 3$. Questo vuol dire che il punto $\pi k+\varepsilon_k$ si trova alla destra del punto di massimo della funzione e più vicino a $x_k = \pi k$ (si verifichi che $x_k = \pi k$ non è un massimo). Questo implica che nell'intervallo $(\pi k+\varepsilon_k, \pi k+\frac{\pi}{2})$ la funzione è decrescente e si può stimare l'integrale come $\frac{\pi-\varepsilon_k}{2}f(\pi k+\varepsilon_k) \le \frac{\pi-\varepsilon_k}{2}(\pi k+\varepsilon_k)e^{-(\pi k-1)^6\alpha^{-2}k^{-2a}}$ ed è una quantità che tende a zero più velocemente di ogni potenza. Ne segue che $\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{k\pi+\varepsilon_k}^{k\pi+\frac{\pi}{2}} xe^{-x^6\sin^2 x}dx$ converge. Identico discorso si può fare per $\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{k\pi-\frac{\pi}{2}}^{k\pi-\varepsilon_k} xe^{-x^6\sin^2 x}dx$ e quindi l'integarle converge. Come si vede la scelta fatta di prendere $2 < a < 3$ è fondamentale. Se $a < 2$ non converge la prima serie studiata. Se $a > 3$ non convergono né la seconda né la terza

2.8 $\int_0^\infty xe^{-x^2\sin^2 x}dx$

Esattamente come prima scriviamo

$\int_0^\infty xe^{-x^2\sin^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xe^{-x^2\sin^2 x}dx + \sum_{k=1}^{+\infty}\int_{k\pi-\frac{\pi}{2}}^{k\pi+\frac{\pi}{2}} xe^{-x^2\sin^2 x}dx$ ed esaminiamo il singolo integrale

$\int_{k\pi-\frac{\pi}{2}}^{k\pi+\frac{\pi}{2}} xe^{-x^2\sin^2 x}dx = \int_{k\pi-\frac{\pi}{2}}^{k\pi-\varepsilon_k} xe^{-x^2\sin^2 x}dx + \int_{k\pi-\varepsilon_k}^{k\pi+\varepsilon_k} xe^{-x^2\sin^2 x}dx + \int_{k\pi+\varepsilon_k}^{k\pi+\frac{\pi}{2}} xe^{-x^2\sin^2 x}dx$ $\varepsilon_k < \frac{1}{2}$. Studiamo il secondo integrale. $f(\pi k+\varepsilon_k) = (\pi k+\varepsilon_k)e^{-(\pi k+\varepsilon_k)^2\sin^2\varepsilon_k} \ge (\pi k+\varepsilon_k)e^{-(\pi k+\varepsilon_k)^2\varepsilon_k^2} \ge (\pi k+\varepsilon_k)e^{-(\pi k+\varepsilon_k)^2\frac{a^2}{k^2}} \ge C(\pi k)$ per una opportuna costante C e con la scelta di $\varepsilon_k = \frac{a}{k}$ (per $a < \pi$ si ha $C = e^{-4a^2\pi^2}$. Di conseguenza si può minorare come $\int_{k\pi-\varepsilon_k}^{k\pi+\varepsilon_k} xe^{-x^2\sin^2 x}dx \ge 2\varepsilon_k C\pi k$ e la serie rispetto a k diverge

2.8 $\int_0^\infty xe^{-x^4\sin^2 x}dx$. Valgono le considerazioni precedenti con la scelta $\varepsilon_k = \frac{a}{k^2}$

2.8 $\int_0^\infty \ln(1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}})dx$. Bisogna ricordare che $\ln(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2\frac{1}{(1+\overline{y})^2}$ e $0 < \overline{y} < y$. Applicando la formula al caso in questione si ha $\ln(1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\frac{\sin^2 x}{x}\frac{1}{(1+\overline{y})^2}$ con $0 < \overline{y} < \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$. Se $A \ge 1$ segue che $0 < \overline{y} \le 1$ per ogni $x \ge A$ e quindi $\frac{1}{(1+\overline{y})^2} \ge \frac{1}{4}$. Ciò implica che $\int_0^\infty dx\frac{\sin^2 x}{x}\frac{1}{(1+\overline{y})^2} \ge \frac{1}{4}\int_0^\infty dx\frac{\sin^2 x}{x}$ che diverge da cui il risultato.

2.8 $\int_0^{+\infty} dx\frac{|\sin x|}{\ln x}$. Sappiamo che $\int_0^{+\infty} dx\frac{\sin x}{\ln x}$ converge. Dalla relazione $|\sin x| \ge \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ segue che l'integrale diverge.

2.8 $\int_{2e}^{+\infty} dx\frac{\sin x}{\ln x+\sin x}$. Sappiamo che $\int_{2e}^{+\infty} dx\frac{\sin x}{\ln x}$ converge. Scriviamo $\frac{\sin x}{\ln x} - \frac{\sin x}{\ln x+\sin x} = \frac{\sin^2 x}{\ln(\ln x+\sin x)}$. Se dimostriamo che $\int_{2e}^{+\infty} dx\frac{\sin^2 x}{\ln x(\ln x+\sin x)}$ diverge allora diverge pure $\int_{2e}^{+\infty} dx\frac{\sin x}{\ln x+\sin x}$. $\int_{2e}^{+\infty} dx\frac{\sin^2 x}{\ln x(\ln x+\sin x)} \ge \int_{2e}^{+\infty} dx\frac{\sin^2 x}{\ln x(\ln x-1)}$ che diverge in quanto scrivendo $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, l'integrale $\int_{2e}^{+\infty} dx\frac{\cos 2x}{\ln x(\ln x-1)}$ converge mentre $\int_{2e}^{+\infty} dx\frac{1}{\ln x(\ln x-1)}$ diverge.

La dimostrazione della proposizione

Data una funzione $f\colon[0,+\infty)\to\mathbf{R}$ *uniformemente continua e tale che* $\int_0^{+\infty} f dx$ *esista come integrale improprio, dimostrare che* $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

è come segue. Si procede per assurdo e quindi si suppone che 1) la funzione sia uniformrmemente continua, 2) la funzione non ammette come limite zero (potrebbe anche non ammettere limite affatto). 3) la funzione è integrabile secondo Riemann

La condizione 1) è data da $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon\colon\ |x-y|<\delta_\varepsilon\ \Rightarrow\ |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

La condizione 2) è data da $\exists\ \overline{\varepsilon}\colon\ \forall\ n\ \exists\ x_n\geq n\colon\ |f(x_n)|\geq\overline{\varepsilon}$

Da 1) e 2) segue che, prendendo $\varepsilon<\overline{\varepsilon}$, si può scrivere $f(x)>\overline{\varepsilon}-\varepsilon$ oppure $f(x)<-\overline{\varepsilon}+\varepsilon$ per ogni $x\in(x_n-\delta_\varepsilon,x_n+\delta_\varepsilon)$. D'altra parte, detta $\{a_j\}$ una qualsiasi partizione della semiretta $(0,+\infty)$ $(a_{k+1}\geq a_k)$, dal fatto che l'integrale improprio esiste, segue che la serie $\sum\int_{a_k}^{a_{k+1}} f dx$ converge e quindi $\lim_{k\to+\infty}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f dx=0$. Ma questo è in palese contrasto con quanto detto prima non appena si prendono gli a_j in modo tale che gli infiniti valori $x_n\pm\delta_\varepsilon$ coincidiano con alcuni di essi (o anche tutti).

3.8 Spezziamo l'integrale come $\int_0^1 dx x^\alpha|\cos x|^{x^\beta}+\int_1^\infty dx x^\alpha|\cos x|^{x^\beta}\doteq I_1+I_2$
Sia $\beta<-2$; il limite per $x\to0^+$ della parte con il modulo è una forma indeterminata del tipo 1^∞. Per $0<x\leq1$ si ha $|\cos x|^{x^\beta}\leq e^{x^\beta(\cos x-1)}$ (la dimostrazione a dopo). Poiché $\lim_{x\to0^+} x^\beta(\cos x-1)=-\infty$ se $\beta<-2$ segue che in un opportuno intorno destro di 0 si ha $x^\alpha|\cos x|^{x^\beta}\leq x^\alpha x^n$ per ogni n positivo (ovviamente se cambia n cambia l'intorno ed una sua stima è posposta).
Quindi I_1 converge per ogni valore di α purché $\beta<-2$. Per quanto concerne I_2 essendo $x^\alpha|\cos x|^{x^\beta}\leq x^\alpha$ e si ha convergenza per $\alpha<-1$ per cui la somma di I_1 e I_2 converge per $\alpha<-1\ \wedge\ \beta<-2$.
Dimostriamo ora che $|\cos x|^{x^\beta}\leq ae^{x^\beta(\cos x-1)}$ per $0<x\leq1$. Un modo è il seguente:
$x^\alpha|\cos x|^{x^\beta}=\left((\cos x)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right)^{x^\beta(\cos x-1)}\leq e^{x^\beta(\cos x-1)}$ se e solo se $(\cos x)^{\frac{1}{\cos x-1}}\geq e$ che è certamente vero in quanto il resto di ordine 2 della funzione esponenziale è sempre positivo.
Ora dimostriamo che in un opportuno intorno destro di 0 si ha $x^\alpha|\cos x|^{x^\beta}\leq x^\alpha x^n$ per ogni n positivo.
$\cos x-1=-\frac12x^2+\frac{\cos\xi}{24}x^4<-\frac14x^2$ per $0\leq x\leq\sqrt6$ e quindi $e^{x^\beta(\cos x-1)}\leq e^{-\frac14x^\beta x^2}$ e chiediamo che $e^{-\frac14x^\beta x^2}\leq x^n$ ossia $x^ne^{\frac14x^\beta x^2}\geq1$. Detta $f(x;\beta,n)$ la precedente funzione si ha $\lim_{x\to0^+} f(x;\beta,n)=+\infty$, e $\lim_{x\to+\infty} f(x;\beta,n)=+\infty$. $f'(x;\beta,n)=e^{-\frac14x^\beta x^2}x^{n-1}(n+\frac14(2+\beta)x^{2+\beta})\geq0$ per $x\geq(\frac{-4n}{2+\beta})^{\frac{1}{2+\beta}}\doteq x_o(n,\beta)$.
La funzione $f(x;\beta,n)$ ha un minimo in $x_o(\beta,n)$ la cui ordinata è $f_o(\beta,n)=e^{\frac{n}{|2+\beta|}}\left(\frac{4n}{|2+\beta|}\right)^{-\frac{n}{|2+\beta|}}$ e pensando $\frac{n}{|2+\beta|}$ come un numero intero N grande, tale ordinata è all'incirca $\frac{1}{N!}$ che è molto più piccola di 1.
Consideriamo allora la funzione $f_o(\beta,n)(\frac{1}{f_o(\beta,n)}x^\alpha|\cos x|^{x^\beta})$ e per quanto detto prima si ha $\frac{1}{f_o(\beta,n)}x^\alpha|\cos x|^{x^\beta}\leq f_o(\beta,n)x^{\alpha+n}$ se $0<x<\overline{x}$ dove $\overline{x}=\min\{x_o(\beta,n),\sqrt6\}$. È da notare che $x_o(\beta,n)\to0$ per $n\to+\infty$.
La disuguaglianza $\int_0^1 dx x^\alpha|\cos x|^{x^\beta}\geq\inf_{0\leq x\leq1}|\cos x|^{x^\beta}\int_0^1 dx x^\alpha$ e $\inf_{0\leq x\leq1}|\cos x|^{x^\beta}\neq0$ da cui I_1 diverge se $\beta\geq-2\ \wedge\ \alpha\leq-1$. Essendo $I_2>0$ ne segue che la somma I_1+I_2 diverge se $\beta\geq-2\ \wedge\ \alpha\leq-1$.
Sia ora $\beta\leq0$. Essendo $x^\beta\leq1$ per $x\geq1$ si ha $\int_1^{+\infty} dx x^\alpha|\cos x|^{x^\beta}\geq\int_1^{+\infty} dx x^\alpha|\cos x|$ che diverge se $\alpha\geq-1$. Per dire che l'integrale diverge si fa uso: della Proposizione **2.8.1** se $-1\leq\alpha<0$ e della maggiorazione $x^\alpha\geq x^{\alpha'}$ con $\alpha>0$ e $-1<\alpha'\leq0$ per $x\geq1$. Del resto l'integrale fra 0 ed 1 è positivo e non potrà compensare la divergenza del precedente per cui riassumendo i risultati

ottenuti fino ad ora si può dire che si ha convergenza per $\alpha < -1$ e $\beta < -2$ e divergenza per $\beta \le 0$ e $\alpha \ge -1$.

Sia ora $\alpha > -1$. I_1 converge sempre per ogni valore di β in quanto $x^\alpha |\cos x|^{x^\beta} \le x^\alpha$. Scriviamo l'integrale come I_2 come $\int_1^{N_o\pi} x^\alpha |\cos x|^{x^\beta} + \sum_{k=N_o}^{+\infty} \int_{\pi k}^{(k+1)\pi} dx x^\alpha |\cos x|^{x^\beta}$. L'integrale converge se e solo se converge la somma (serie convergente).

$(k+\frac{1}{2}(1-\frac{\alpha}{|\alpha|}))^\alpha \int_{\pi k}^{(k+1)\pi} dx|\cos x|^{x^\beta} \le \int_{\pi k}^{(k+1)\pi} dx x^\alpha |\cos x|^{x^\beta} \le$
$\le (k+\frac{1}{2}(1+\frac{\alpha}{|\alpha|}))^\alpha \int_{\pi k}^{(k+1)\pi} dx|\cos x|^{x^\beta}$

Cambiando variabile $y = x - \pi k$ gli integrali di destra e di sinistra diventano
$(k+\frac{1}{2}(1-\frac{\alpha}{|\alpha|}))^\alpha \int_0^\pi dx|\cos x|^{(x+k\pi)^\beta} \le$
$\le \int_{\pi k}^{(k+1)\pi} dx x^\alpha |\cos x|^{x^\beta} \le (k+\frac{1}{2}(1+\frac{\alpha}{|\alpha|}))^\alpha \int_0^\pi dx|\cos x|^{(x+k\pi)^\beta}$.

e si maggiora ulteriormente con
$(k+\frac{1}{2}(1-\frac{\alpha}{|\alpha|}))^\alpha \int_0^\pi dx|\cos x|^{(\pi+k\pi)^\beta} \le (k+\frac{1}{2}(1-\frac{\alpha}{|\alpha|}))^\alpha \int_0^\pi dx|\cos x|^{(x+k\pi)^\beta} \le$
$\le \int_{\pi k}^{(k+1)\pi} dx x^\alpha |\cos x|^{x^\beta} \le (k+\frac{1}{2}(1+\frac{\alpha}{|\alpha|}))^\alpha \int_0^\pi dx|\cos x|^{(x+k\pi)^\beta} \le$
$\le (k+\frac{1}{2}(1+\frac{\alpha}{|\alpha|}))^\alpha \int_0^\pi dx|\cos x|^{(k\pi)^\beta}$

usando un pò di trigonometria si arriva a scrivere gli integrali agli estremi della precedente maggiorazione rispettivamente come
$\int_0^\pi dx|\cos x|^{(\pi+k\pi)^\beta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy(\cos y)^{(k\pi+\pi)^\beta} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy(\sin y)^{(k\pi+\pi)^\beta}$ e
$(k+\frac{1}{2}(1-\frac{\alpha}{|\alpha|}))^\alpha \int_0^\pi dx|\cos x|^{(k\pi)^\beta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy(\cos y)^{(k\pi)^\beta} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy(\sin y)^{(k\pi)^\beta}$.
Inoltre si eseguono le seguenti ovvie maggiorazioni e minorazioni $(k\pi)^\beta \ge [(k\pi)^\beta] \ge [(3k)^\beta]$, $(k\pi+\pi)^\beta \le (2k\pi)^\beta \le 1 + [(2k\pi)^\beta] \le 1 + [(7k)^\beta]$ e quindi si può scrivere

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dy(\cos y)^{(1+[(7k)^\beta])} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy(\sin y)^{(1+[(7k)^\beta])} \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy(\cos y)^{(k\pi+\pi)^\beta} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy(\sin y)^{(k\pi+\pi)^\beta}$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dy(\cos y)^{(k\pi+\pi)^\beta} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy(\sin y)^{(k\pi+\pi)^\beta} \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy(\cos y)^{[(3k)^\beta]} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy(\sin y)^{[(3k)^\beta]}$

Dallo svolgimento dell'esercizio **23.8** si hanno le seguenti relazioni
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \cos^{2M} x = \frac{\pi}{2}\frac{(2M)!}{2^{2M}(M!)^2}$, $\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sin^{2M} x = \frac{\pi}{2}\frac{(2M)!}{2^{2M}(M!)^2}$,
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \cos^{2M+1} x = \frac{(M!)^2 2^{2M}}{((2M+1)!)^2}$, $\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sin^{2M+1} x = \frac{(M!)2^{2M}}{((2M+1)!)^2}$,
si dimostra per induzione (vedi alla fine dell'esercizio) che per $M > M_o$ (M_o opportuno) si ha $\frac{1}{\sqrt{M}} \le \frac{(2M)!}{2^{2M}(M!)^2} \le \frac{1}{\sqrt{M}}(1+\frac{1}{2M}) < \frac{2}{\sqrt{M}}$. Invertendo si ha $\frac{\sqrt{M}}{2} \le \frac{2^{2M}(M!)^2}{(2M)!} \le \sqrt{M}$ e quindi
$\frac{1}{\sqrt{M}} \ge \frac{\sqrt{M}}{(2M+1)} \ge \frac{2^{2M}(M!)^2}{(2M+1)!} \ge \frac{\sqrt{M}}{2(2M+1)} \ge \frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt{M}}$
Quindi per ogni intero pari o dispari, detto I uno qualsiasi dei precedenti quattro integrali, si ha $\frac{1}{6\sqrt{M}} \le I \le \frac{1}{\sqrt{M}}$. Da tutte queste maggiorazioni segue che
$\sum_{k=N_o}^{+\infty} 2\frac{(k+\frac{1}{2}(1-\frac{\alpha}{|\alpha|}))^\alpha}{(1+[(7k)^\beta])^{1/2}} \le \sum_{k=N_o}^{+\infty} \int_{\pi k}^{(k+1)\pi} dx x^\alpha |\cos x|^{x^\beta} \le \sum_{k=N_o}^{+\infty} 2\frac{(k+\frac{1}{2}(1+\frac{\alpha}{|\alpha|}))^\alpha}{([(3k)^\beta])^{1/2}}$
e quindi la serie converge se e solo se $\alpha - \frac{\beta}{2} + 1 < 0$ da cui il risultato.
Ci è rimasta da dimostrare la relazione induttiva $M > M_o$ (M_o opportuno) si ha $\frac{1}{\sqrt{M}} \le \frac{(2M)!}{2^{2M}(M!)^2} \le \frac{1}{\sqrt{M}}(1+\frac{1}{2M}) < \frac{2}{\sqrt{M}}$.
Cominciamo dalla parte sinistra. Per $M = 2$ è vera. Il passaggio da M ad $M+1$ dà $\sqrt{\frac{M+1}{M}}\frac{2M+1}{2M+2} \ge 1$ che è vera.
La parte destra è vera per $M = 2$ ed il passaggio induttivo da M ad $M+1$ dà $\frac{2M+1}{2M+2} \le \sqrt{\frac{M}{M+1}}\frac{2M+1}{2M}\frac{2M+2}{2M+3}$ e quindi $\frac{(2M+3)^3\sqrt{M}}{2(M+1)^{3/2}} \le 1$. L'espressione ottenuta tende ad 1 per $M \to +\infty$ e quindi si potrà scrivere come $1 + \frac{a}{M} + O(\frac{1}{M^2})$. Se dimostriamo che $a < 0$ abbiamo il risultato

in quanto basterà poi porre $O(\frac{1}{M^2}) < \frac{-a}{2M}$ per cui la frazione sarà minore di 1. Facendo lo sviluppo di Taylor delle funzioni opportune si perviene al fatto che la frazione può scriversi come $(1+\frac{3}{2M})(1-\frac{3}{2M}) + O(\frac{1}{M^2}) = 1 - \frac{9}{4M} + O(\frac{1}{M^2})$ da cui il risultato.
Trovare un baco nella dimostrazione precedente ossia che nella dimostrazione che $\frac{(2M)!}{2^{2M}(M!)^2} \le \frac{1}{\sqrt{M}}(1+\frac{1}{2M})$ e capirne il rimedio. Il baco consiste nel fatto che la disuguaglianza $O(\frac{1}{M^2}) < \frac{-a}{2M}$ impone di considerare i valori di M più grandi di un certo valore che dipende da a e dalla stima che si dà di $O(\frac{1}{M^2})$ mentre all'inizio della dimostrazione si dice che si vuole operare a partire da $M=2$. La contraddizione si risolve dicendo che si dimostra la induzione a partire da un valore opportuno di M_o ed è esattamente quel valore per cui definitivamente $O(\frac{1}{M^2}) < \frac{-a}{2M}$.

4.8 $F(x,y) = \int_0^{x+y} \frac{e^t-1}{t} dt$
Se indichiamo con $f(z) = \int_0^z \frac{e^t-1}{t} dt$ e con $g(x,y) = x+y$ si ha $F(x,y) = f \circ g(x,y)$. Se $f(z)$ è derivabile allora F, essendo $g(x,y)$ differenziabile, è differenziabile vedi `pag.301`. Ora f è certamente derivabile se $z \neq 0$ mentre se $z=0$ va fatto qualche conto. Il modo più veloce consiste nel definire la funzione

$$\tilde h(t) = \begin{cases} \dfrac{e^t-1}{t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

$\tilde h(t)$ è continua per ogni t e quindi la funzione $\tilde f(z)$ è derivabile ovunque per il teorema di Torricelli. Ma $\tilde f(z) \equiv f(z)$ e quindi anche $f(z)$ è derivabile.

Alternativamente si può procedere analizzando il limite del rapporto incrementale ossia $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(h) - f(0)) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^h \frac{e^t-1}{t} dt$. $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 e^{c(t)}$
dove $0 < c(t) < t < h$. In tal modo $|\frac{1}{h}\int_0^h (\frac{e^t-1}{t} - 1) dt| \le |\frac{1}{2h}\int_0^h t e^{c(t)} dt| \le \frac{1}{2|h|} e^h \frac{t^2}{2}\Big|_0^h$ e quest'ultima espressione tende a zero per $h \to 0$. Dunque $f'(0) = 1$ e l'affermazione è dimostrata.
La derivata parziale rispetto ad x è data da $\frac{e^{x+y}-1}{x+y}$ che è uguale alla derivata parziale rispetto ad y.

4.8 $H(x,y) = \int_x^y dt\, h(z)$
Se $x \neq 0 \ \wedge \ y \neq 0$ la funzione è differenziabile per le stesse ragioni di prima. Se $y = 0 \ \vee \ x = 0$ il discorso cambia.
Per essere differenziabile deve essere derivabile rispetto ad x ed a y. Scriviamo la funzione H come $H(x,y) = \int_0^y dt\, h(z) - \int_0^x dt\, h(z)$ se ne deduce che se $x=0$ oppure $y=0$ o tutte e due la funzione $h(z)$ non è continua avendo una discontinuità di salto. Ciò implica che H non può essere derivabile. Sia infatti $\underline{x} = (x_o, 0)$. Per $y \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$ $\partial_y H(x,y) = h(y)$ dal teorema di Torricelli. Inoltre $\lim_{y\to 0^+} \int_0^y dt\, h(z) = h(0^+)$ e $\lim_{y\to 0^-} \int_0^y dt\, h(z) = h(0^-)$ da cui segue che se H fosse derivabile la derivata avrebbe una discontinuità di salto e questo è impossibile per il `teorema 6.10`.

5.8 $F_1(x) = \int_0^x dt \log(1 - e^{\frac{t-1}{t^2}}) \doteq \int_0^x dt\, f(t)$
Per $t=0$ si intende che l'integrando vale 1. $Dom\,(f) = (-\infty, 1)$ $\lim_{t\to 1^-} f(t) = -\infty$,
$\lim_{t\to -\infty} f(t) = -\infty$, $\lim_{t\to 0} f(t) = 0$. essendo
l'argomento di f minore od uguale ad 1, f è sempre negativa tranne per $t=0$. Da ciò segue che F_1 è positiva per x negativo e negativa per x positivo.
Inoltre segue che F_1 è sempre decrescente essendo $F_1' = f$. $F_1'(0) = f(0) = 0$ e quindi 0 è un flesso discendente.
$f'(t) = \frac{-2+t}{t^3}\frac{e^{\frac{t-1}{t^2}}}{1-e^{\frac{t-1}{t^2}}}$ da cui segue che f' è positiva per $t<0$ e negativa negativa per $t<1$
e quindi F_1 ha la concavità rivolta verso l'alto per $x<0$ e verso il basso per $x>0$.
$\lim_{x\to -\infty} F_1(x) = +\infty$ chiaramente. Vediamo ora $\lim_{x\to 1^-} F_1(x)$.

Per questo dobbiamo fare $\lim_{A\to 1^-}\int_0^1 dt f(t)$ che è un integrale improprio. $e^{\frac{t-1}{t^2}}=1+\frac{t-1}{t^2}+O((t-1)^2)$ da cui
$f(t)=\ln(\frac{1-t}{t^2}+O((t-1)^2))=\ln\frac{1-t}{t^2}+\ln(1+O(t-1))=\ln(1-t)-2\ln t+\ln(1+O(t))$ e l'integrale della seconda e terza funzione non è improprio.
Bisogna studiare solamente $\int_{1/2}^1 dt\ln(1-t)$ che converge ad un valore negativo e calcolabile in quanto si può trovare la primitiva. Dunque $\lim_{x\to 1^-}F_1(x)=l<0$.
A questo punto il grafico è quello disegnato.

5.8 $F_2(x)=\int_{-1}^x f(t)dt$ dove f è la funzione dell'esercizio **4.6**.
Il dominio della funzione f è $\mathbf{R}\backslash\{-a\}$ dove $-a$ è l'ascissa negativa in cui si annulla il denominatore. Certamente F_2 è definita per $x<-a$. In $x=-a$ è definita se converge l'integrale $\int_1^{-a} f(t)dt$ ossia deve essere definito il limite $\lim_{\delta\to 0^+}\int_{-1}^{-a-\delta}dt+\lim_{\delta\to 0^+}\int_{-1}^{-a-\delta}dt\frac{te^t}{(t-\ln(-t))^{1/3}}$.
Cambiando variabile $t'=-t$ esso diventa $1-a+\lim_{\delta\to 0^+}\int_{a+\delta}^1 dt\frac{te^{-t}}{(t+\ln t)^{1/3}}$ e $a+\ln a=0$. Cambiamo ancora variabile $y=t-a$ e solamente l'integrale diventa $\lim_{\delta\to 0^+}\int_\delta^{1-a}\frac{dt(t+a)e^{-a-t}}{(t+a+\ln(t+a))^{1/3}}$.
Il denominatore può svilupparsi come $t+a+\ln a+\ln(1+\frac{t}{a})=t+\ln(1+\frac{t}{a})=t(1+\frac{1}{a})+O(t^2)$ e quindi una volta elevato ad $1/3$ si ha una potenza che rende l'integrale convergente. Questo fatto implica che il dominio della funzione F_2 è tutto $\mathbf{R}$. Non ha asintoti verticali. Ha due asintoti obliqui in quanto $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{F_2(x)}{x}=1$ ed inoltre convergono pure gli integrali (dimostrarlo) $\int_{-1}^{\pm\infty}\frac{te^{-|t|}}{(t-\ln|t|)^{1/3}}$. f è continua e derivabile dappertutto e quindi F_2 è derivabile con $F_2'=f$. In $x=-a$ F_2 non può essere derivabile in quanto l'integranda ha una discontinuità di salto. Possiamo dire quindi che F_2 è crescente per $x<-a$, decrescente per $-a<x<b$ e crescente per $x>b$. $x=b$ è un punto di minimo mentre $x=-a$ è un punto angoloso.

5.8 $F_3(x)=\int_0^x dt\frac{2t-1}{(t^2+1)\log|\frac{t-1}{t}|}=\int_0^x dt\, f(t)$
$Dom\,(f)=\mathbf{R}\backslash(1,0,\frac{1}{2})$; $\lim_{t\to\pm\infty}f(t)=2$, $\lim_{t\to 1}f(t)=0$, $\lim_{t\to 0}f(t)=0$, $\lim_{t\to\frac{1}{2}}f(t)=-\frac{2}{5}$.
Definiamo la funzione $\tilde f(x)$ come: $\tilde f(x)=f(x)$ se $x\neq 0,\frac{1}{2},1$, $\tilde f(0)=0$, $\tilde f(1)=0$, $\tilde f(\frac{1}{2})=-\frac{2}{5}$. In tal modo $\tilde f$ è una funzione continua in tutto il suo dominio e $\int_0^x dt\, f(x)=\int_0^x dt\,\tilde f(x)$. A rigor di logica dovremmo definire una funzione $\tilde F_3(x)$ ma evitiamo di farlo in quanto $\tilde F_3(x)=F_3(x)$. L'equazione $F_3'(x)=\tilde f(x)$ è vera per ogni x e quindi F_3 è decrescente. I punti di ascissa 0 ed 1 sono dei flessi ma f' non è derivabile in quei punti e quindi $F_3^{''}$ in quei punti non esiste. Anzi si ha $\lim_{x\to 0^\pm}f'(x)=\mp\infty$, $\lim_{x\to 1^\pm}f'(x)=\mp\infty$, e quindi $\lim_{x\to 0^\pm}F_3^{''}(x)=\mp\infty$, $\lim_{x\to 1^\pm}f^{''}(x)=\mp\infty$, .
Asintoti oliqui. $\lim_{x\to\pm\infty}F_3(x)=\mp\infty$ ma $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{F_3(x)}{x}=-2$ per cui è lecito pensare che vi sia un asintoto obliquo. Il termine noto dell'asintoto "a $+\infty$" sarebbe dato dall'integrale $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x dx\,(f(t)+2)$. $\ln(1-\frac{1}{t})=-\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+O(\frac{1}{t^3})$, $(t^2+1)\ln(1-\frac{1}{t})=-t-\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+O(\frac{1}{t})$, $(2t-1)+2(t^2+1)\ln(1-\frac{1}{t})=-2-\frac{2}{t}+O(\frac{1}{t})$. L'integrale diventa $\int_0^x dt\,\frac{2}{t+\frac{1}{2}}+\int_0^x dt\, o(\frac{1}{t})$ che dà $+\infty$. A "$-\infty$ succede la stessa cosa. Dunque asintoti obliqui non vene sono. Il punto di ascissa $\frac{1}{2}$ è un flesso. Il grafico, a meno di flessi diversi da quelli trovati, è quello in figura.

5.8 $F_4(x)=x+\int_0^x dt\frac{e^{-t}}{t+1}$
Il dominio di f è $\mathbf{R}\backslash\{-1\}$. $\lim_{t\to-\infty}f(t)=-\infty$, $\lim_{x\to\pm 1}f(t)=\pm\infty$, $\lim_{t\to+\infty}f(t)=0$. $f>0$ per $x>-1$, e $f<0$ per $x<-1$. Poiché $\int_0^{-1}dt\, f(t)=-\infty$ (verificare), il dominio di $F_4(x)$ è $(-1,+\infty)$. Quest'ultimo fatto è generale; non è detto che il dominio della funzione integrale coincida con il dominio della funzione integranda. Se ad esempio si fosse definita $F_4(x)=\int_{-2}^x f(t)dt$ il suo dominio sarebbe stato $(-\infty,-1)$. $F_4(x)<0$ per $x<0$ e $F_4(x)>0$ per $x>0$. $\lim_{x\to-1^+}F_4(x)=-\infty$. $\lim_{x\to+\infty}\frac{F_4(x)}{x}=1$ e $\lim_{x\to+\infty}F_4(x)-x=\int_0^\infty f(t)=q<+\infty$ per cui la F_4 ha un asintoto obliquo per $x\to+\infty$ di equazione $y=x+\int_0^{+\infty}f(t)dt$. Si dia una

stima di q (una possibile è $\frac{1}{3}2^{3/4} \le q \le 1$). $F_4'(x) = f(x) > 0$ e quindi F_4 è crescente

5.8 $F_6(x) = \int_0^x dt(1-\cos\frac{1}{t})$; Il dominio è tutta la retta. È una funzione dispari (dimostrarlo) per cui basta studiarla per $x \ge 0$; È monotona non decrescente (dimostrarlo). $F_6(0) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} F_6(x)$ converge a $\int_0^\infty dt(1-\cos\frac{1}{t})$ per cui $F_6(x)$ ha due asintoti orizzontali di equazioni $y = \pm\int_0^\infty dt(1-\cos\frac{1}{t})$. F_6 è derivabile in ogni punto del dominio 0 compreso e $F_6'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 1-\cos\dfrac{1}{x} & \text{se } x \ne 0. \end{cases}$ Ora $F_6' = 0$ per $x_k = \frac{1}{2k\pi}$ e $k \in \mathbf{Z}\backslash\{0\}$; $F_6''(x_k) = -\frac{1}{x_k^2}\sin\frac{1}{x_k} \equiv 0$; $F_6'''(x_k) = \frac{2}{x_k^3}\sin\frac{1}{x_k} + \frac{1}{x_k^4}\cos\frac{1}{x_k} = (2k\pi)^4$; $F_6(x_k) = \int_0^{x_k} dt(1-\cos\frac{1}{t}) \to 0$ per $k \to +\infty$. Abbiamo dimostrato quindi che esiste una successione di flessi che converge a 0 tanto sulle ascisse quanto sulle ordinate. Il grafico della funzione, per $-\frac{1}{2\pi} \le x \le \frac{1}{2\pi}$ è rappresentato da una "scala" i cui "scalini" si trovano in corrispondenza dei punti x_k.

6.8 La funzione è differenziabile per quanto scritto prima. $\partial_x F_6(\underline{x}) = 4xe^{2x^2+y^2}$ $\partial_y F_6(\underline{x}) = 2ye^{2x^2+y^2}$ $\partial_{xy} F_6(\underline{x}) = 8xye^{2x^2+y^2}$. L'unico punto critico è $\underline{0}$ ed è un minimo.

7.8 Cambiando variabile $x^2 = t$ l'integrale diventa
$\int_0^{1/4} \frac{dt}{2\sqrt{t}}\arctan t = \int_0^{1/4} \frac{dt}{2\sqrt{t}}(t + \frac{1}{6}\arctan^{(3)}(\xi)t^3)$ $0 < \xi < \frac{1}{4}$. Il secondo integrale, detto R, si stima come $\frac{1}{12}\int_0^{1/4} dt\frac{t^3}{\sqrt{t}}\arctan^{(3)}(\xi) = \frac{1}{12}\int_0^{1/4} dt\, t^{5/2}\big(\frac{8\xi^2-2}{(1+\xi^2)^2}\big) < 0$ essendo $8\xi^2 - 2 < 0$ per $\xi \in (0, \frac{1}{4})$.
Inoltre $R \ge \frac{1}{12}\int_0^{1/4} dt\frac{-2t^{5/2}}{(1+\frac{1}{16})^2} = \frac{1}{12}\frac{-2(16)^2}{2^7(17)^2} > \frac{-1}{1000}$. Il valore dell'integrale così trovato è dato da $\frac{1}{2}\int_0^{1/4}\frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}$.

8.8 Essendo $\sin x^2 \le 1$ e $\sin x^2 \le x^2$ si ha che l'integrale è minore od uguale sia di t che di $\frac{t^3}{3}$ e dunque del minore dei due.

8.8 La prima parte della stima si ottiene osservando che $|\sin x| \le 1$ e la seconda osservando che $|\sin x| \le |x|$ da cui il risultato.

9.8 Si usi la relazione $\frac{\cos x}{2+\tan^3 x} \le \frac{\cos x}{2}$

10.8 Si usano gli sviluppi di Taylor. Prima però è opportuno modificare l'integrale. Senza tali manipolazioni è possibile lo stesso eseguire il calcolo ma meno agevolmente. Se indichiamo con I l'integrale oggetto di studio, traslando di $\frac{1}{2}$ si può scrivere $I = \int_{-\frac{1}{2}}^0 dx\sin x^2$. Usando poi il fatto che $\sin x^2$ è una funzione pari si ha $I = \int_0^{\frac{1}{2}} dx\sin x^2$ e da ultimo operando la sostituzione $x^2 = t$ si perviene a $I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}} dt\frac{\sin t}{\sqrt{t}}$. Ora $\sin t = \sum_{k=0}^n \frac{t^{2k+1}(-)^k}{(2k+1)!} + \frac{\sin^{(2n+3)}\xi(t)}{(2n+3)!}t^{2n+3}$ con $0 < \xi(t) < t \le \frac{1}{4}$ e quindi $I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}} dt(\sum_{k=0}^n \frac{t^{2k+\frac{1}{2}}(-)^k}{(2k+1)!} + \frac{\sin^{2n+3}\xi(t)}{(2n+3)!}t^{2n+\frac{5}{2}})$. Prendiamo ora $n = 0$ e consideriamo il numero $I_0 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}} dt\sqrt{t} = \frac{1}{24}$ mentre $|\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}} dt\frac{\sin^{(3)}\xi(t)}{6}t^{5/2}| \le |\frac{1}{12}\int_0^{\frac{1}{4}} dt t^{5/2}| \le \frac{1}{42\cdot 2^7} < 10^{-3}$. Conseguentemente si ha $|I - I_0| < 10^{-3}$ con $I_0 = \frac{1}{24}$. Il calcolo nel caso si voglia un errore minore di un milionesimo procede esattamente nello stesso modo solo che bisogna "andare un pò più il la" con l'ordine dello sviluppo di Taylor. $|\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}} dt\frac{\sin^{(5)}\xi(t)}{120}t^{9/2}| < (120\cdot 11\cdot 2^{11})^{-1} < 10^{-6}$ e quindi $|I - I_3| < 10^{-6}$ dove $I_3 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}} dt(\sqrt{t} - \frac{1}{6}t^{5/2}) = \frac{111}{5176}$.
Si può notare come la trasformazione dell'integrale sia molto importante per due ragioni. La prima è che non avrebbe senso sviluppare il polinomio di Taylor di $\sin(x-\frac{1}{2})^2$ centrandolo nell'origine in quanto si dovrebbe calcolare $\sin\frac{1}{2}$ e non sappiamo quanto vale. La seconda è che pur potendo sviluppare $\sin y^2$, in realtà non conviene in quanto le derivate sono più complicate

Data $f(x)$ con $\mathcal{I}(f)$ si indicherà il suo integrale indefinito.

11.8 $\mathcal{I}(\tan x)$: $\int dx\,\frac{\sin x}{\cos x}$ con la sostituzione $\cos x = t$ e l'integrale diventa $\int -\frac{dt}{t} = -\ln|t| = -\ln|\cos t|$

11.8 $\mathcal{I}(\frac{1}{\sin x})$: $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{2}{x}} = \ln|\tan\frac{x}{2}|$

11.8 $\mathcal{I}((\tan x)^2)$: $\int dx\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \int dx\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \tan x - x$

11.8 $\mathcal{I}(\frac{1}{x^4-1})$ Si procede coi fratti semplici. $\frac{1}{(x-1)^4} = \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}$ per cui $\int \frac{dx}{(x-1)^4} = \frac{1}{4}\ln\frac{|x-1|}{|x+1|} - \frac{1}{2}\arctan x$

11.8 $\mathcal{I}(\frac{1}{x^4+1})$ Si procede anche qui coi fratti semplici dopo avere osservato che $x^4+1 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$ per cui $\frac{1}{x^4+1} = \frac{A+Bx}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{C+Dx}{x^2+\sqrt{2}x+1}$ e $A = C = \frac{1}{2}$ mentre $D = -B = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Dai calcoli fatti segue che $\int \frac{1}{x^4+1} = \int \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}+x}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx +$ $+\int \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}-x}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx = I_1 + I_2$. $I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{\sqrt{2}2}\int \frac{xdx}{x^2+\sqrt{2}x+1} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1} +$ $+\frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{dx(2x+\sqrt{2})}{x^2+\sqrt{2}x+1} = I_{1,1} + I_{1,2}$. $I_{1,1} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\frac{1}{2}+(x^2+\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = \frac{1}{4}\int \frac{2dx}{(1+x\sqrt{2})^2} =$ $= \frac{1}{4}\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}x+1)$, $I_{1,2} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2+\sqrt{2}x+1)$ per cui $I_1 = \frac{1}{4}\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}x+1)+$ $+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2+\sqrt{2}x+1)$. $I_2 = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2-\sqrt{2}x+1} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{dx(2x-\sqrt{2})}{x^2-\sqrt{2}x+1} = I_{2,1} + I_{2,2}$.
$I_{2,1} = \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x-1)$ mentre $I_{2,2} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2-\sqrt{2}x+1)$. Raccogliendo i quattro integrali si ottiene il risultato.

11.8 $\mathcal{I}(\ln(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}))$ Eseguiamo il calcolo in due maniere. La prima è la seguente. $\ln(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}) = \ln\sqrt{x+1} + \ln(1+\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}) \doteq I_1 + I_2$. Per il calcolo di I_1 si procede per parti.
$I_1 = \frac{1}{2}\int dx\ln(1+x) = \frac{1}{2}x\ln(1+x) - \frac{1}{2}\int dxxd(\ln(1+x)) = \frac{1}{2}x\ln(1+x) - \frac{1}{2}\int dx\frac{x}{1+x} =$ $\frac{1}{2}x\ln(1+x) - \frac{1}{2}\int dx(1-\frac{1}{1+x}) = \frac{1}{2}x\ln(1+x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln(1+x) = \frac{1}{2}(x+1)\ln(1+x) - \frac{1}{2}x =$ $(x+1)\ln\sqrt{x+1} - \frac{1}{2}x$
$I_2 = \int dx\ln(1+\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}})$. Si opera la sostituzione $\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} = t$ che implica $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ e quindi (con un minimo di algebra) $dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt$. L'integrale diventa $\int \frac{-4t}{(1+t^2)^2}\ln(1+t)dt = 2\int \ln(1+t)d(\frac{1}{1+t^2})$ ed integrando per parti si ha $2\frac{\ln(1+t)}{1+t^2} - 2\int \frac{dt}{(1+t)(1+t^2)}$. Quest'ultimo integrale si integra con il metodo dei fratti semplici ossia $\frac{1}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{1}{2(1+t)} + \frac{-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}}{(1+t^2)}$ e quindi $\int \frac{dt}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{1}{2}\ln(1+t) + \frac{1}{2}\arctan t - \frac{1}{4}\ln(1+t^2)$
Alla fine si è ottenuto $I_1+I_2 = (x+1)\ln\sqrt{x+1} - \frac{1}{2}x + 2\frac{\ln(1+t)}{1+t^2} - \ln(1+t) - \arctan t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C$ dove bisogna operare la sostituzione $t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ e quindi $1+t^2 = \frac{2}{1+x}$. Alla fine viene fuori $I = x\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}) - \frac{1}{2}x - \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + C$.
Come detto esiste una seconda maniera di calcolare l'integrale. Si usa la ben nota formula $\int dxf(x) = xf(x) - \int xf'(x)$ ed usando il fatto che $(\ln(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}))' = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x\sqrt{1-x^2}}$ si ottiene $\int dx\ln(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}) = x\ln(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}) - \frac{1}{2}\int dx\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}} =$ $= x\ln(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arcsin x + C$. Quest'ultimo risultato è formalmente diverso dal precedente. Si spieghi tale apparente contraddizione.

11.8 $\mathcal{I}(\frac{dx}{1+a\cos x})$. Cominciamo da $0 < a < 1$. Si operra la sostituzione $x = 2\arctan t$.

$dx = \frac{2}{1+t^2}dt$ e $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. $I = 2\int \frac{dt}{(1+t^2)+a(1-t^2)} = 2\int \frac{dt}{t^2(1-a)+a+1} = \frac{2}{a+1}\int \frac{dt}{1+t^2\frac{1-a}{1+a}}$ e quindi l'integrale diventa $I = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\arctan(t\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}})$ e tornando alla variabile x si ha $I = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\arctan(\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}}\tan\frac{x}{2})$. Si noti come essenziale sia $1-a>0$ ossia $0<a<1$ (perché pure $a>0$ e non solo $a<1$?).

Sia ora $a>1$. $I = 2\int \frac{dt}{t^2(1-a)+a+1} = 2\int \frac{dt}{a+1-t^2(a-1)} = 2\int \frac{dt}{(\sqrt{a+1}-t\sqrt{a-1})(\sqrt{a+1}+t\sqrt{a-1})}$. Con il metodo dei fratti semplici I diventa

$I = \frac{1}{\sqrt{a+1}}(\int \frac{dt}{\sqrt{a+1}-t\sqrt{a-1}} + \int \frac{dt}{\sqrt{a+1}+t\sqrt{a-1}})$ e tornando alla variabile x

si ottiene $I = \frac{1}{\sqrt{a+1}}\ln\Big(\frac{|a+1+(a-1)\tan^2(\frac{x}{2})+2\tan(\frac{x}{2})\sqrt{a^2-1}|}{|a+1-(a-1)\tan^2(\frac{x}{2})|}\Big)$.

Ora usando un pò di trigonometria si ha $a+1-(a-1)\tan^2(\frac{x}{2}) = a(1-\tan^2(\frac{x}{2}))+1+\tan^2(\frac{x}{2}) = a\frac{\cos x}{\cos^2\frac{x}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1+a\cos x}{\cos^2\frac{x}{2}}$ e quindi $\frac{a+1+(a-1)\tan^2(\frac{x}{2})+2\tan(\frac{x}{2})\sqrt{a^2-1}}{1+a\cos x}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+a\cos x}\Big[a+\cos x+\sqrt{a^2-1}\sin x\Big]$ e quindi l'integrale diventa $I = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\log\Big[\frac{|a+\cos x+\sqrt{a^2-1}\sin x|}{|1+a\cos x|}\Big]$

11.8 $\mathcal{I}(\frac{\sqrt{3-x^2}}{x})$. Con la sostituzione: $x=\sqrt{3}\sin t$ e l'integrale diventa $\sqrt{3}\int dt(\frac{1}{\sin t}-\sin t) = \sqrt{3}\int\frac{dt}{\sin t}+\sqrt{3}\cos t$. $\int dt\frac{1}{\sin t} = \ln|\tan\frac{t}{2}|$ Bisogna ora riscrivere tutto in termini della variabile x. $\cos t = \sqrt{1-\frac{x^2}{3}}$; $\tan\frac{t}{2} = \frac{\sqrt{1-\cos t}}{\sqrt{1+\cos t}} = \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}}}{\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}}}$ e

$\ln|\tan\frac{t}{2}| = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}}{1+\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}} = \frac{1}{2}\ln\frac{2-\frac{x^2}{3}-2\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}}{\frac{x^2}{3}} = \ln\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3-x^2}}{x}$.

Riunendo i due contributi si ottiene $I = \sqrt{3-x^2}+\sqrt{3}\ln\frac{x}{\sqrt{3}+\sqrt{3-x^2}}$

11.8 $\mathcal{I}(\frac{1}{\sin x+\cos x})$ Cambiando variabile $x = 2\arctan t$ l'integrale diventa $\int\frac{2}{1-t^2+2t}$ ed usando i soliti fratti semplici diventa $-2\int\frac{dt}{(t_+-t_-)(t-t_+)} - 2\int\frac{dt}{(t_--t_+)(t-t_-)} = \frac{-2}{t_+-t_-}\ln|t-t_+| - \frac{2}{t_--t_+}\ln|t-t_-|$ dove $t_\pm = 1\pm\sqrt{2}$. Dunque l'integrale è dato da $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{|t-t_-|}{|t-t_+|}$ che nella variabile x si legge come $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{|\tan\frac{x}{2}+\sqrt{2}-1|}{|\tan\frac{x}{2}-\sqrt{2}+1|}$

11.8 $\mathcal{I}(\frac{\sqrt{x^2+x}}{x})$ - Primo modo - Si cambia variabile $t=\frac{1}{2}+x$ ottenendo $\int dx\frac{\sqrt{x^2-\frac{1}{4}}}{x-\frac{1}{2}}$ e poi ancora $x=\frac{1}{2}\cosh t$ che dà $\int dt\frac{\sinh^2 t}{\cosh t-1} = \int dt\frac{\sinh^2 t}{2\sinh^2\frac{t}{2}} = \int dt 2\cosh^2\frac{t}{2} =$

$= 2\int dt\cosh\frac{t}{2}d(2\sinh\frac{t}{2}) = 4\sinh\frac{t}{2}\cosh\frac{t}{2} - 2\int dt\sinh^2\frac{t}{2} = 2\sinh t - 2\int dt(\cosh^2\frac{t}{2}-1) = 2\sinh t+2t-\sinh t-t = \sinh t+t$ e tornando alla variabile x si ha $I = \sqrt{x^2+x}+\frac{1}{2}\ln(2x+1+2\sqrt{x^2+x})$

Secondo modo - Si porta dentro la radice la x (dimenticando per un attimo il segno della x stessa o meglio supponendo x positivo) e si ottiene $I = \int dx\sqrt{1+\frac{1}{x}}$. Ora si cambia variabile $1+\frac{1}{x} = t$ da cui $I = -2\int\frac{t^2dt}{(1-t^2)^2} = -2\int\frac{t^2dt}{(1-t)^2(1+t)^2}$. I soliti fratti semplici danno $\frac{t^2}{(1-t^2)^2} = \frac{1}{4}\frac{t}{(1-t)^2} - \frac{1}{4}\frac{t}{(1+t)^2}$ e quindi l'integrale dà $\frac{1}{2}\frac{1}{t-1} - \frac{1}{2}\ln|1-t| + \frac{1}{2}\frac{1}{t+1} + \frac{1}{2}\ln|1+t|$ che riscritto in termini della variabile x diventa $\sqrt{x^2+x}+\frac{1}{2}\ln(2x+1+2\sqrt{x^2+x})$. È opportuno osservare come essenziale sia scrivere $\int\frac{dt}{t} = \ln|t|$ *e non* $\ln t$; nel qual caso si otterrebbe un risultato errato.

11.8 $\mathcal{I}(\frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}})$ Si scrive l'integrale come $\int d(\sqrt{1+x^2})\arctan$ ed integrando per parti si arriva a

$\arctan(x\sqrt{1+x^2}) - \int\frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}dx = \arctan(x\sqrt{1+x^2}) - \int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$ Nell'integrale ancora rimasto si cambia variabile $x=\sinh t \Rightarrow dx = \cosh t dt$ e nella variabile

t diventa $\int dt \frac{\cosh t}{\cosh t} = t$. L'inversione del cambio di variabili dà $t = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ e quindi l'integrale è è $(\arctan x)\sqrt{1+x^2} - \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

11.8 $\mathcal{I}(\arctan \sqrt{x})$ Il cambio di variabile $\sqrt{x} = t$ fa diventare l'integrale $2\int t \arctan t\, dt =$ $= t^2 \arctan t - \int \frac{t^2\, dt}{1+t^2} = t^2 \arctan t - \int (1 - \frac{1}{1+t^2}) dt = t^2 \arctan t - t + \arctan t$ che riscritto in termini di x diventa $x \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x}$.

11.8 $\mathcal{I}((\arcsin x)^2)$ Si cambia variabile $\arcsin x = t$ e l'integrale diventa $\int t^2 \cos t\, dt = \int t^2 d(\sin t) = t^2 \sin t - 2\int t \sin t\, dt \doteq t^2 \sin t + 2I$. $I = \int t d(\cos t)\, dt = t \cos t - \int \cos t\, dt$ e quindi l'integrale è $t^2 \sin t + 2t \cos t - 2 \sin t$ che nella variabile x è $x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x$

11.8 $\mathcal{I}(x(\arctan x)^2)$ Cambiando variabile $\arctan x = t$ l'integrale diventa $\int \frac{t^2 \sin t}{\cos^3 t}\, dt$ ed integrando per parti si ottiene $\frac{t^2}{2\cos^2 t} - \int \frac{t}{\cos^2 t} dt = \frac{t^2}{2\cos t} - t \tan t + \int \tan t = \frac{t^2}{2\cos t} - t \tan t - \ln \cos t$ ed in x è $\frac{1}{2}(1+x^2) \arctan^2 x - x \arctan x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$

11.8 $\mathcal{I}(\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}})$ Il cambio è $x = \sin t$ per cui l'integrale diventa $\int \sin^2 t\, dt = -\int \sin t d(\cos t) = -\sin t \cos t + \int \cos^2 t\, dt = -\sin t \cos t + t - \int \sin^2 t\, dt$ da cui $\int \sin^2 t\, dt = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2t$ ossia $\frac{1}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2}$

11.8 $\mathcal{I}(\frac{1}{1+\sqrt{1+x}})$ Cambiando $1 + \sqrt{1+x} = t$ l'integrale è $2\int dt(1 - \frac{1}{t}) = 2t - 2\ln|t| = 2\sqrt{1+x} - 2\ln(1+\sqrt{1+x})$

11.8 $\mathcal{I}(\frac{x+1}{x\sqrt{x-2}})$ $\sqrt{x-2} = t$ per cui $2\int dt \frac{t^2+3}{t^2+2} = 2\int dt(1 + \frac{1}{t^2+2}) = 2t + \sqrt{2} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}}$ ossia $2\sqrt{x-2} + \sqrt{2} \arctan \sqrt{\frac{x}{2} - 1}$

11.8 $\mathcal{I}(\frac{1}{x\sqrt{x+1}})$ La sostituzione $\sqrt{x+1} = t$ porta l'integrale in $2\int \frac{dt}{t^2-1} = \ln \frac{|t-1|}{|t+1|}$ e quindi $\ln \frac{||1+x|-1|}{|\sqrt{1+x}+1|}$

11.8 $\mathcal{I}(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}})$ La sostituzione $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = t$ per cui $x = \frac{t^2+1}{t^2-1}$ e $dx\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = -\frac{4dt}{(t^2-1)^2}$ porta l'integrale in $-4\int \frac{dt}{(t^2-1)^2}$ e $\frac{1}{(t^2-1)^2} = \frac{1}{4}(-\frac{1}{(t-1)} + \frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{(t+1)} + \frac{1}{(t+1)^2})$ che dà $\frac{2t}{t^2-1} - \ln \frac{|t+1|}{|t-1|}$ ossia in termini di x $\sqrt{x^2-1} + \ln(x - \sqrt{x^2-1})$

11.8 $\mathcal{I}(\frac{1}{\sqrt{x-x^2}})$ $\sqrt{x} = t$ porta l'integrale in $2\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2\arcsin t = 2\arcsin \sqrt{x}$

11.8 $\mathcal{I}(\frac{x+1}{x(1+xe^x)})$ Sostituendo $1 + xe^x = t$ si ottiene $I = \int \frac{dt}{t(t-1)} = \ln \frac{|t-1|}{|t|} = \ln \frac{|xe^x|}{1+xe^x}$.

11.8 $\mathcal{I}(\frac{x^2-x+1}{\sqrt{(x^2+3)^2}})$ $\frac{x^2-x+1}{\sqrt{(x^2+3)^2}} = 1 + \frac{x-2}{x^2+3}$ e l'integrale diventa $x + \ln(x^2+3) - \frac{2}{3} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}}$

11.8 $\mathcal{I}(\sqrt{\frac{a-x}{x-b}})$ $\sqrt{\frac{a-x}{x-b}} = t$, $dx = dt\frac{2t(b-a)}{(1+t^2)^2}$ e l'integrale diventa $\int 2(b-a)\frac{t^2}{(1+t^2)^2} = 2(b-a)\int (\frac{dt}{1+t^2} - \frac{dt}{(1+t^2)^2}) = 2(b-a)\arctan(\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}) - 2(b-a)\int \frac{dt}{(1+t^2)^2}$; integrando per parti si ottiene $\int \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \int \frac{t^2+1}{(1+t^2)^2} dt - \int \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt = \arctan t + \int\ t\ d(\frac{1}{1+t^2})\frac{1}{2} = \arctan t + \frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\arctan t + \frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2}$. Sostituendo ora a t la sua espressione in funzione di x si ottiene che l'integrale è uguale a $(b-a)\arctan(\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}) + \sqrt{(a-x)(x-b)}$

11.8 $\mathcal{I}(\frac{1-\tan x}{1+\tan x})$ $\tan x = t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ e si ottiene $\int (\frac{dt}{1+t} - \frac{tdt}{1+t^2}) = \ln \frac{|1+t|}{\sqrt{1+t^2}} = \ln|\cos x + \sin x|$

11.8 $\mathcal{I}(\frac{x^7}{(1-x^2)^5})$ Volendo usare i fratti semplici bisogna scrivere $\frac{x^7}{(1-x^2)^5} = \sum_{j=1}^5 \frac{A_j}{(1-x)^j} + \sum_{j=1}^5 \frac{A'_j}{(1+x)^j}$ e trovando i vari coefficienti si arriva al risultato. Integrando per parti si ha $\int x^6\, d(\frac{1}{(1-x^2)^4}) = \frac{1}{8}\frac{x^6}{(1-x^2)^4} - \frac{3}{4}\int dx \frac{x^5}{(1-x^2)^4}$ e procedendo allo stesso modo si arriva a $\frac{1}{8}\frac{x^6}{(1-x^2)^4} - \frac{1}{8}\frac{x^4}{(1-x^2)^3} + \frac{1}{8}\frac{x^2}{(1-x^2)^2} - \frac{1}{8}\frac{1}{(1-x^2)} + C$

Se si sostituisse $x = \sin t$ allora si avrebbe $\int\ dt\ \frac{\tan^7 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{8}\tan^8 t = \frac{1}{8}\frac{x^8}{(1-x^2)^4} + C$

La apparente contraddizione si risolve osservando che $\frac{1}{8}\frac{x^6}{(1-x^2)^4} - \frac{1}{8}\frac{x^4}{(1-x^2)^3} + \frac{1}{8}\frac{x^2}{(1-x^2)^2} - \frac{1}{8}\frac{1}{(1-x^2)} + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}\frac{x^8}{(1-x^2)^4}$ in quanto $(1-x^2)^4 = (1+x)^4(1-x)^4 = \sum_{s=0}^4 \sum_{k=0}^s \binom{4}{k}\binom{4}{s-k}(-)^{s-k}x^s + \sum_{s=5}^8 \sum_{k=s-4}^4 \binom{4}{k}\binom{4}{s-k}(-)^{s-k}x^s$ e calcolando le varie quantità si ottiene il risultato.

11.8 $\mathcal{I}(\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x})$ Sostituendo $\sqrt{1+\frac{2}{x}} = t$ e avendone $dx = -\frac{4t}{(t^2-1)^2}dt$ l'integrale diventa $\int \frac{-4t^2}{(t^2-1)^2}dt = \int (\frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{t-1})dt = \ln\frac{|t+1|}{|t-1|} + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t-1} = \sqrt{x^2+x} + \ln(x+1\sqrt{x^2+x})$

11.8 $\mathcal{I}(\frac{\ln(1+x)-\ln x}{x(x+1)})$ La sostituzione giusta è data da $1+\frac{1}{x} = t$ che trasforma l'integrale in $-\int \frac{\ln t}{t}$ ed integrando per parti si ha $-\int \ln t d(\ln|t|) = -\ln t \ln|t| + \int \frac{\ln|t|}{t}dt$ da cui segue che l'integrale è $-\frac{1}{2}\ln^2 t$ ossia $-\frac{1}{2}\ln^2(1+\frac{1}{x})$.

11.8 $\mathcal{I}(\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x})$ $\quad\mathcal{I}(\frac{x^3-1}{4x^3-x})$ $\quad\mathcal{I}(\frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x})$
si risolvono tutti attraverso l'uso dei fratti semplici.

11.8 $\mathcal{I}(\frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x^2})$ Integrando per parti si ha
$-\frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x} - \int \frac{dx}{\sqrt{2-x-x^2}} - \int \frac{dx}{2x\sqrt{2-x-x^2}}$. Nel primo integrale effettuiamo la sostituzione $\frac{x+2}{1-x} = t^2$ da cui $dx = \frac{6t}{(1+t^2)^2}dt$ e $2-x-x^2 = (x+2)(1-x) = \frac{9t^2}{(1+t^2)^2}$. $-\int \frac{dx}{\sqrt{2-x-x^2}} = -\int \frac{2dt}{1+t^2} = -2\arctan t = -2\arctan\sqrt{\frac{x+2}{1-x}} = -\frac{\pi}{2} - \arcsin(\frac{2x+1}{3})$. Attraverso la stessa sostituzione si ha $-\int \frac{dx}{2x\sqrt{2-x-x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int(\frac{dt}{t+\sqrt{2}} - \frac{dt}{t-\sqrt{2}}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{|t+\sqrt{2}|}{|t-\sqrt{2}|} = -\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{4-x-2\sqrt{2}\sqrt{2-x-x^2}}{3x}$

11.8 $\mathcal{I}(\frac{1}{x^2}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{x-1}}))$ La sostituzione fa si che l'integrale diventi $\int\ dt\ \frac{2t}{(1+t^2)^2}\ln(1+\frac{1}{t}) = -\frac{\ln(1+\frac{1}{t}}{1+t^2} - \int\ dt\ \frac{1}{t(1+t)(1+t^2)}$ e coi fratti semplici si arriva a $-\frac{\ln(1+\frac{1}{t}}{1+t^2} - \ln|t| + \frac{1}{2}\ln|1+t| + \frac{1}{4}\ln(1+t^2) + \frac{1}{2}\arctan t$ e quindi $-\frac{1}{x}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{x-1}}) + \frac{1}{2}\arctan\sqrt{x-1} + \frac{1}{4}\ln\frac{x(1+\sqrt{x-1})^2}{(x-1)^2}$

11.8 $\mathcal{I}((2-x)\ln(x^2+8x+17))$ La sostituzione $4+x=z$ trasforma l'integrale in $\int dz(2-z)\ln(1+z^2) = -\frac{1}{2}(2-z)^2\ln(1+z^2) + \int dz\frac{z(2-z)^2}{1+z^2} = -\frac{1}{2}(2-z)^2\ln(1+z^2) + \int dz(z-4+\frac{3z+4}{1+z^2}) = -\frac{1}{2}(2-z)^2\ln(1+z^2) + \frac{z^2}{2} - 4z + \frac{3}{2}\ln(1+z^2) + 4\arctan z = \frac{1+x}{2}\ln(x^2+8x+17) + 4\arctan(x+4) + \frac{x^2-16}{2}$

11.8 $\mathcal{I}(\frac{\arcsin x}{x^2})$ Integrando per parti si ottiene $-\frac{\arcsin x}{x} + \int \frac{dx}{x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ e la sostituzione $x = \sin t$ dà $\int \frac{dx}{x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dt}{\sin t} = \ln|\tan\frac{t}{2}| = \ln|\tan\frac{1}{2}\arcsin x|$. Essendo $\tan x = \tan 2x \frac{\cos 2x}{1+\cos 2x}$ si ha che l'integrale diventa $-\frac{\arcsin x}{x} + \ln\frac{|1-\sqrt{1-x^2}|}{|x|}$

11.8 $\mathcal{I}(\frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x})$ La sostituzione $x = \arctan t$ implica che l'integrale è $\int \frac{2tdt}{1+t^4}$
ossia $\arctan t^2 = \arctan(\tan x^2)$

11.8 $\mathcal{I}(\frac{1+x^4}{1+x^2})$ Eseguendo la divisione fra polinomi ed usando i fratti semplici si perviene a al risultato.

11.8 $\mathcal{I}(\frac{1}{2x\sqrt{x-1}\arccos(1/\sqrt{x})})$ È chiaramente $\ln\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}$

11.8 $\mathcal{I}(\frac{1}{a+bx^2})$ Se $ab>0$ allora l'equazione $a+bx^2$ non ha soluzioni reali e l'integrale è $\frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\sqrt{\frac{b}{a}}x$ mentre se $ab<0$ l'integrale è $\frac{a}{2|a|\sqrt{-ab}}\ln\frac{|\sqrt{|a|}+\sqrt{|b|}x|}{|\sqrt{|a|}-\sqrt{|b|}x|}$

11.8 $\mathcal{I}(\sqrt{(x-a)(b-x)})$ La sostituzione $\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}=t$, $x=\frac{bt^2+a}{1+t^2}$, $dx=\frac{2(b-a)t}{(1+t^2)^2}$ $\sqrt{(x-a)(b-x)}=\frac{|b-a|t}{1+t^2}$ e l'integrale diventa $2(b-a)|b-a|\int\frac{t^2}{(1+t^2)^3}dt$. L'integrale è dato da $-\frac{t}{4(1+t^2)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{(1+t^2)^2}$. Ora $\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{t}{1+t^2}+2\int\frac{dtt^2}{(1+t^2)^2}=\frac{t}{1+t^2}+2\int\frac{dt}{1+t^2}-2\int\frac{dt}{(1+t^2)^2}$ e quindi $\int\frac{dt}{(1+t^2)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2}+\frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2}$. Alla fine abbiamo ottenuto $\int\frac{t^2}{(1+t^2)^3}dt=-\frac{t}{4(1+t^2)^2}+\frac{1}{8}\arctan t+\frac{1}{8}\frac{t}{1+t^2}$. Sostituendo le varie grandezze si ottiene $\frac{1}{4}(b-a)|b-a|\arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}+\frac{1}{4}\frac{|b-a|}{b-a}\sqrt{(x-a)(b-x)}(2x-b-a)+C$ che è anche uguale a $\frac{1}{8}(b-a)|b-a|\arcsin\frac{2x-b-a}{b-a}+\frac{1}{4}\sqrt{(x-a)(b-x)}(2x-b-a)+C$.

11.8 $\mathcal{I}(\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}})$ La stessa sostituzione precedente produce

$\frac{b-a}{|b-a|}\int\frac{2dt}{1+t^2}=2\frac{b-a}{|b-a|}\arctan t=2\frac{b-a}{|b-a|}\arctan\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{b-x}}+C=\frac{b-a}{|b-a|}\arcsin\frac{2x-b-a}{b-a}+C$

11.8 $\mathcal{I}(\frac{\sqrt{(x+a)}}{\sqrt{(a-x)}})$ La solita sostituzione $\frac{\sqrt{(x+a)}}{\sqrt{(a-x)}}=t$ dà $\mathcal{I}=4a\int\frac{dtt^2}{(1+t^2)^3}=4a(-\int\frac{t}{4(1+t^2)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{(1+t^2)^2}.)$ ed essendo $1+t^2=\frac{2a}{a-x}$ $\frac{t}{1+t^2}=\frac{1}{2a}\sqrt{(a+x)(a-x)}$ $\frac{t}{(1+t^2)^2}=$ $=\frac{1}{4a^2}(a-x)\sqrt{(x+a)(a-x)}$ $\arctan t=\arctan\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}=-\frac{1}{2}\arcsin(-\frac{x}{a})+\frac{\pi}{4}$ e quindi l'integrale è $\frac{1}{4}\arcsin(\frac{x}{a})+\frac{1}{4a}\sqrt{(a+x)(a-x)}-\frac{1}{4a}(a-x)\sqrt{(a+x)(a-x)}$

11.8 $\mathcal{I}(\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}})$ La sostituzione $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=t$ dà $-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{dx}{(x-1)^2}=t$ l'integrale diventa $-4\int\frac{dt}{(1+t^2)^2}$. La solita integrazione per parti produce $-2\frac{t}{(1+t^2)^2}-2\arctan t$ che in termini di x dà $-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-2\arctan\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

11.8 $\mathcal{I}(\frac{1}{(x^5-1)})$ $\frac{1}{t^5-1}=\frac{1}{5(t-1)}+\frac{Bt^3+Ct^2+Dt+E}{t^4+t^3+t^2+t+1}$ $B=-\frac{1}{5}$, $C=-\frac{2}{5}$, $D=-\frac{3}{5}$, $E=-\frac{4}{5}$; $t^4+t^3+t^2+t+1=(t^2+bt+1)(t^2+b't+1)$ con $b=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, $b'=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$. Dunque $\frac{Bt^3+Ct^2+Dt+E}{t^4+t^3+t^2+t+1}=\frac{A't+B'}{t^2+bt+1}+\frac{C't+D'}{t^2+b't+1}$ da cui $A'=\frac{E-C+Bb}{b-b'}$, $B'=\frac{B-D+Eb}{b-b'}$, $C'=\frac{C-E+Bb'}{b-b'}$, $D'=\frac{D-B-Eb'}{b-b'}$,

11.8 $\mathcal{I}(\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{1+x^2}dx)$ Con le due sostituzioni $x=a\sin t$ e $t=\arctan z$ si ottiene $a^2\int\frac{dz}{1+z^2(1+a^2)}$ da cui $I=\frac{a^2}{\sqrt{1+a^2}}\arctan(\sqrt{1+a^2}z)=\frac{a^2}{\sqrt{1+a^2}}\arctan(\frac{\sqrt{1+a^2}x}{\sqrt{a^2-x^2}})$

12.8 $\rho_\pm=\frac{-mk\mp\sqrt{m^2k^2+2mEp^2}}{2mE}=-\frac{k}{2E}\pm\sqrt{\frac{k^2}{4E^2}+\frac{p^2}{2mE}}$ ed osserviamo che $\frac{k^2}{4E^2}+\frac{p^2}{2mE}>0$ essendo reali le radici $\rho_\pm$. Se indichiamo l'integrale come A_ρ otteniamo

$A_\rho=2\int_{\rho_-}^{\rho_+}\frac{d\rho}{\rho}\sqrt{\frac{m^2k^2}{2m|E|}-p^2-\left(\sqrt{2m|E|}\rho-\frac{mk}{\sqrt{2m|E|}}\right)^2}$

Cambiamo ora variabile $\sqrt{2m|E|}\rho-\frac{mk}{\sqrt{2m|E|}}=y$, $d\rho=\frac{dy}{\sqrt{2m|E|}}$, $y_+=\sqrt{2m|E|}\Big(\sqrt{\frac{k^2}{4E^2}+\frac{p^2}{2mE}}\Big)-$

$\frac{mk}{\sqrt{2m|E|}} = \sqrt{\frac{k^2m}{2|E|} - p^2} > 0$ e $y_- = -y_+ < 0$. L'integrale diventa
$A_\rho = 2\int_{y_-}^{y_+} \frac{dy}{\sqrt{2m|E|}\frac{1}{\sqrt{2m|E|}}(y+\frac{mk}{\sqrt{2m|E|}})}\sqrt{\frac{mk^2}{2|E|} - p^2 - y^2} = 2\int_{-y_+}^{y_+} \frac{dy}{(y+\frac{mk}{\sqrt{2m|E|}})}\sqrt{\frac{mk^2}{2|E|} - p^2 - y^2}$
Essendo $\frac{mk^2}{2|E|} - p^2 > 0$ poniamo quest'ultimo uguale a $\overline{y}^2$ e quindi $\overline{y} = \sqrt{\frac{mk^2}{2|E|} - p^2}$ da cui $A_\rho = 2\int_{-\overline{y}}^{\overline{y}} \frac{dy}{y+\frac{mk}{\sqrt{2m|E|}}}\sqrt{\overline{y}-y}\sqrt{\overline{y}+y}$ e cambiando variabile $s^2 = \frac{y+\overline{y}}{\overline{y}-y}$ l'integrale diventa

$$2\int_0^\infty \underbrace{\frac{s\ ds\ 4\overline{y}^2}{\overline{y}(1+s^2)^2}}_{dy} \frac{1}{\overline{y}\frac{s^2-1}{s^2+1}+\frac{mk}{\sqrt{2m|E|}}} \underbrace{\frac{\sqrt{\overline{y}}\sqrt{2}}{\sqrt{1+s^2}}}_{\sqrt{\overline{y}-y}} \underbrace{\frac{s\sqrt{\overline{y}}\sqrt{2}}{\sqrt{1+s^2}}}_{\sqrt{\overline{y}+y}}$$

ossia $16\overline{y}^2\int_0^\infty \frac{s^2\ ds}{(1+s^2)^2}\frac{1}{s^2\overline{y}+\frac{mk}{\sqrt{2m|E|}}+\frac{mk}{\sqrt{2m|E|}}-\overline{y}}$. Con i fratti semplici si ha

$\frac{s^2}{(1+s^2)^2(as^2+b)} = \frac{b}{(a-b)^2}\frac{1}{1+s^2} + \frac{1}{a-b}(1+s^2)^2 - \frac{ab}{(a-b)^2}\frac{1}{as^2+b}$ ed inoltre $\int_0^\infty \frac{ds}{1+s^2} = \frac{\pi}{2}$, $\int_0^\infty \frac{ds}{(1+s^2)^2} = \frac{\pi}{4}$, $\int_0^\infty \frac{ds}{s^2a+b} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}$. In tal modo $\int_0^\infty \frac{s^2}{(1+s^2)^2(as^2+b)} = \frac{\pi}{2(a-b)}(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2$ ed essendo $(a-b)^2 = 4\overline{y}^2$, $b+a = \sqrt{\frac{2mk^2}{|E|}}$, $\sqrt{ab} = \sqrt{p^2} = |p|$ alla fine quello che si ottiene è dato da $A_\rho = -2\pi|p| + 2\pi\sqrt{\frac{mk^2}{2|E|}}$ da cui il risultato

13.8 L'integrale in questione può scriversi come $\int_{\theta_o}^{\pi-\theta_o} d\theta\sqrt{a - \frac{b^2}{\sin^2\theta}} = 2\int_{\theta_o}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\sqrt{a - \frac{b^2}{\sin^2\theta}}$. Il cambio di variabile $\sin^2\theta = t^2$ conduce a $2\int_{\frac{b}{\sqrt{a}}}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\sqrt{a - \frac{b^2}{t^2}}$. L'ulteriore cambio di variabile $\frac{at^2-b^2}{1-t^2} = s^2$ produce $dt = s\frac{a-b^2\sqrt{a+s^2}}{(a+s^2)^2\sqrt{s^2+b^2}}ds$ e l'integrale diventa $2\int_0^{+\infty} ds\frac{s^2(a-b^2)}{(a+s^2)(s^2+b^2)} = \pi(\sqrt{a} - b)$.

È importante notare che eseguire il primo cambio di coordinate $\sin^2\theta = t^2$ sull'integrale $\int_{\theta_o}^{\pi-\theta_o} d\theta\sqrt{a - \frac{b^2}{\sin^2\theta}}$ avrebbe costituito un grave errore. Infatti gli estremi di integrazione sarebbero dati dai valori ottenuti risolvendo le due equazioni $\sin^2\theta_o = t^2$ e $\sin^2(\pi - \theta_o) = t^2$ e quindi lo stesso valore di t da cui discenderebbe che l'integrale nella variabile t ha estremi coincidenti e dunque è nullo. Che sia nullo è chiaramente falso essendo l'integrale di una funzione positiva. L'errore commesso sta nel fatto che se $\theta_o \in [0, \frac{\pi}{2}]$ allora $\pi - \theta_o \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ e nell'intervallo $[0, \pi]$ la funzione non è invertibile. D'altro canto l'operazione di trovare gli estremi di integrazione in t consiste proprio nell'invertire la funzione data. Il modo di uscire da tale intrigo consiste nello spezzare l'integrale, come è stato fatto, con il risultato di dovere invertire $\sin^2\theta$ solamente nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$ dove è monotona crescente.

15.8 Dimostreremo come una funzione non limitata non può essere integrabile. La definizione di integrabilità è a `pagina 352` del libro di testo. Sia data una funzione $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ non limitata superiormente e limitata inferiormente. Se f è illimitata sia superiormente che inferiormente oppure è limitata superiormente ed illimitata inferiormente ci si riduce al caso precedente in virtù della seguente uguaglianza $f = \frac{f+|f|}{2} + \frac{f-|f|}{2} = \max\{0, f\} + \min\{0, f\} \doteq f^+ + f^-$. Infatti se f è integrabile deve essere integrabile tanto f^+ quanto f^- ma f^+ è per l'appunto illimitata superiormente e limitata inferiormente.
Dunque supponiamo che $\forall M > 0\ \exists\ x_{_M} \in [a, b]$ *t.c.* $f(x_{_M}) > M$. Ne discende la seguente affermazione
Proposizione *Per ogni suddivisione $\mathcal{D}$ di $[a, b]$ si ha* $\sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) > 1$
Dimostrazione
È data $\mathcal{D}$ composta da $x_o = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Essendo f non limitata esisterà un sottointervallo di $[a, b]$, diciamo $[x_o, x_1]$, in cui f è non limitata mentre in $[x_1, x_n]$ è limitata sia superiormente che inferiormente e dunque $A < f < B$ per ogni $x \in [x_1, x_n]$. In tal modo è vera

la maggiorazione $\sum_{k=2}^{n}(M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \leq (B - A)(b - x_1) \doteq P$.
Sia $m_1 = \inf_{x_o \leq x \leq x_1} f$ e sia x_{M_1} tale che $f(x_{M_1}) > M_1$ (che esiste per ipotesi di non limitatezza). Allora $\sup_{a \leq x \leq x_1} f - \inf_{a \leq x \leq x_1} f \geq (M_1 - m_1)(x_1 - x_o)$ e prendo M_1 tale che $M_1 > 1 + m_1 + \frac{1+P}{(x_1 - x_o)}$ da cui deriva che $S(\mathcal{D}, f) - s(\mathcal{D}, f) > 1$ e la minorazione non dipende dalla particolare suddivisione ma è vera *per ogni suddivisione*. Da ciò segue che $\inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f) - \sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) \geq 1$ e quindi la funzione non può essere integrabile.∎

16.8 In questo caso si dimostra la seguente
Proposizione *Per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste una suddivisione* $\mathcal{D}_\varepsilon$ *tale che* $0 < S(\mathcal{D}_\varepsilon, f) - s(\mathcal{D}_\varepsilon, f) \leq (|f(a)|(x_1 - a) + |f(b)|(b - x_{n-1}) < \varepsilon$
Dimostrazione
Basta prendere $\max\{(b - x_{n-1}), (x_1 - a)\} < \frac{\varepsilon}{|f(a)|+|f(b)|}$. Infatti $|\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)(x_k - x_{k-1})| \leq |f(a)|(x_1 - a) + |f(b)|(b - x_{n-1}) \leq \max\{(b - x_{n-1}), (x_1 - a)\}(|f(a)| + |f(b)|) \leq \varepsilon$.∎

Dalla proposizione segue che $0 < \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f) - \sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) < S(\mathcal{D}_\varepsilon, f) - s(\mathcal{D}_\varepsilon, f) < \varepsilon$ e quindi la integrabilità di f. Inoltre si ha $|S(\mathcal{D}, f)| \leq (x_1 - a) \sup_{a \leq x \leq x_1} |f(a)| + \sup_{x_{n-1} \leq x \leq b} |f(b)| = (|f(a)|(x_1 - a) + |f(b)|(b - x_{n-1}) < \varepsilon$ e dunque è zero.

17.8 Sia data una suddivisione $(z_1 = a, z_2 \ldots, z_{l-1}, z_l = b)$ $\mathcal{D}$ dell'intervallo $[a, b]$. I punti $x_1, \ldots x_n$ possono cadere all'interno degli intervalli $[z_j, z_{j-1}]$ oppure coincidere con uno degli estremi. Si definiscono come al solito somme inferiori e superiori la cui differenza è $\sum_{i=1}^{l}(M_i - m_i)(z_i - z_{i-1})$. Dividiamo gli l sottointervalli (z_{i-1}, z_i) in due gruppi. Nel primo gruppo, diciamo Z_1, mettiamo quegli intervalli (chiusi) che hanno intersezione vuota con ciascun x_i mentre nel secondo gruppo, diciamo Z_2, mettiamo quegli intervalli che hanno intersezione non vuota con almeno una delle x_i. La sommatoria precedente viene spezzata in $\sum_{[z_i, z_{i-1}] \in Z_1}(M_i - m_i)(z_i - z_{i-1}) + \sum_{[z_i, z_{i-1}] \in Z_2}(M_i - m_i)(z_i - z_{i-1}) \doteq I_1 + I_2$. In ciascuno degli intervalli chiusi appartenenti a Z_1 la funzione è continua e perciò integrabile. Sia ora $\mathcal{M} = \max_{i:[z_i, z_{i-1}] \in Z_2}\{|M_i - m_i|\}$ e supponiamo che $\sum_{[z_i, z_{i-1}] \in Z_2} |z_i - z_{i-1}| \leq \frac{\varepsilon}{n\mathcal{M}}$. La differenza fra somme superiori ed inferiori corrispondente ad I_2 si può dunque stimare in modulo con ε e potendo prendere ε piccolo a piacere si ha la integrabilità. È importante verificare dove sono state usate le ipotesi del problema ossia che la funzione è *continua* eccezion fatta *per un numero finito di punti* e che *esistono i limiti destri e sinistri nei punti di discontinuità.*[(5.8)]. La continuità è stata usata per stabilire la integrabilità negli intervalli chiusi appartenenti a Z_1 e per stabilire la esistenza di $\mathcal{M}$ (per quest'ultima serve pure il fatto che esistano ed abbiano valore finito i limiti nei punti di discontinuità). La finitezza del numero di punti di discontinuità è usata per prendere $\sum_{[z_i, z_{i-1}] \in Z_2} |z_i - z_{i-1}| \leq \frac{\varepsilon}{n\mathcal{M}}$ ed in particolare la n a denominatore. Se infatti n fosse infinito la precedente stima non avrebbbe più senso.

18.8 Infatti se esistesse un punto x_o, in cui g è continua, tale che $g(x_o) \neq 0$ (e quindi $g(x_o) > 0$ necessariamente) allora per la continuità di g esisterebbe un intorno $(x_o - r, x_o + r)$ in cui $g(x) > \frac{1}{2}g(x_o)$ e quindi si avrebbe $\int_a^b dx g(x) \geq 2r\frac{1}{2}g(x_o)$. Se invece x_o è un punto di discontinuità (che corrisponde ad uno dei punti di suddivisione dell'intervallo (a, b)) allora nulla vieta alla funzione di essere non nulla. Inoltre una funzione $f(x)$ nulla tranne un numero finito di punti è una particolare funzione continua a tratti che sappiamo essere integrabile dall'esercizio **17.8**. Ripercorrendo la dimostrazione dell'esercizio citato si vede che ad un certo punto non si può andare avanti se le discontinuità sono numerabili.

19.8 Il risultato segue dall'identità $F(x) = \int_a^x dx(f(x) - < f >) + (x - a) < f >$ dove $< f > = \int_a^{a+T} dx f(x)$ e T è il periodo della funzione f. Il primo addendo è costituito da una

[(5.8)] Ovviamente agli estremi dell'intervallo $[a, b]$ si ha solo limite destro e sinistro rispettivamente funzione periodica. Infatti $\int_a^{x+T} dx(f(x)- < f >) = \int_a^x dx(f(x)- < f >) + \int_x^{x+T} dx(f(x)- < f >) = \int_a^x dx(f(x)- < f >)$ per definizione di periodicità. Il secondo addendo della precedente somma è chiaramente costituito da una funzione lineare.

20.8 Per quanto riguarda la prima domanda basta osservare che $||f(x)|-|f(y)|| \leq |f(x)-f(y)|$ e rifare i conti che si fanno usualmente per dimostrare che una funzione è integrabile secondo Riemann. Viceversa non è vero che se $|f|$ è integrabile allora anche f lo è. Un esempio è dato da

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in [0,1]\backslash\mathbf{Q} \\ 1 & x \in \mathbf{Q} \end{cases} \quad ; \ |f| \equiv 1 \text{ ma } f \text{ non è integrabile secondo Riemann.}$$

Per quanto riguarda la stessa domanda circa una funzione integrabile secondo Riemann in senso improprio la risposta è no. In altre parole se una funzione è integrabile secondo Riemann in senso improprio non è detto che il suo modulo pure lo sia. Un esempio è dato dalla funzione $\frac{\sin x}{x}$ e per verificare quanto detto si possono consultare le pagine `399-401` del libro di testo oppure quanto scritto nella **Proposizione 2.8.1**

21.8*** Si prenda la funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x^2} & x \in [-1,0) \cup (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

si dovrebbe avere $f(x) = f(-1) + \int_{-1}^x g(z)dz$ con g integrabile in $[-1,1]$. Il rapporto incrementale in x della funzione integrale è $\frac{1}{h}\int_x^{x+h} g(z)dz$. In modulo tale espressione è maggiorabile con $\frac{1}{|h|}|\int_x^{x+h} g(z)|dz \leq \sup_{x+\frac{h-|h|}{2} \leq z \leq x+\frac{h+|h|}{2}} |g(z)|$. Essendo integrabile, g è limitata e dunque si può fare $\sup_{x\in[-1,1]} \sup_{h\neq 0} \sup_{x+\frac{h-|h|}{2} \leq z \leq x+\frac{h+|h|}{2}} |g(z)|$ ed ottenere una quantità limitata. Se però si calcola la stessa quantità su f si ottiene
$\sup_{x\in[-1,1]} \sup_{h\neq 0} \frac{1}{|h|}|(f(x+h) - f(x))| = +\infty$ in quanto $\sup_{x\in[-1,1]} |f'(x)| = +\infty$. Infatti quest'ultima implica che $\forall\ M > 0\ \exists\ x_{_M}\ t.c.\ |f'(x_{_M})| > M$ ossia $\lim_{h\to 0} \frac{1}{|h|}|f(x_{_M}+h) - f(x_{_M})| > M$. Se ne ricava che $\sup_{h\neq 0} \frac{1}{|h|}|f(x_{_M}+h) - f(x_{_M})| > M$ e quindi
$\forall\ M > 0\ \exists\ x_{_M}\ t.c.\ \sup_{h\neq 0} \frac{1}{|h|}|f(x_{_M}+h) - f(x_{_M})| > M$ ossia l'insieme $\{y \in \mathbf{R}\colon y = \frac{1}{|h|}|f(x_{_M}+h) - f(x_{_M})|\ h \neq 0,\}$ è non limitato da cui la impossibilità di verificare $f(x) = f(-1) + \int_{-1}^x g(z)dz$ per qualunque g integrabile.
È evidente che il precedente ragionamento non funziona con $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ per $x \neq 0$ in quanto $\sup_{x\in[-1,1]} |f'(x)| < +\infty$ ossia è una quantità limitata. Automaticamente ciò non implica che esista $g(x)$ per cui $f(x) = f(-1) + \int_{-1}^x g(z)dz$ ed infatti bisogna dimostrarlo. L'affermazione che vogliamo provare è che $f(x) = f(-1) + \int_{-1}^x dz(2z\sin\frac{1}{z} - \cos\frac{1}{z})$. La funzione integranda è integrabile essendo una funzione continua fuorché in $z = 0$. L'uguaglianza è evidentemente vera per $x = -1$. La dimostrazione è conclusa non appena facciamo vedere che la derivata della funzione $f(x) - f(-1) - \int_{-1}^x dz(2z\sin\frac{1}{z} - \cos\frac{1}{z})$ è identicamente nulla. Se $x \neq 0$, per il teorema di Torricelli-Barrow, $2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} = \frac{d}{dx}\Big[f(-1) + \int_{-1}^x dz(2z\sin\frac{1}{z} - \cos\frac{1}{z})\Big]|_{x\neq 0}$. In 0 il teorema non può essere applicato in quanto *la funzione integranda non è continua* e bisogna calcolare direttamente $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h dz(2z\sin\frac{1}{z} - \cos\frac{1}{z})$. Per il primo contributo si può procedere così $|\frac{1}{h}\int_0^h dz(2z\sin\frac{1}{z})| \leq \frac{2h^2}{|h|}$ il cui limite dà zero. Per il secondo contributo è necessaria una integrazione per parti (esplicitata nel prossimo esercizio) ottenendo 0 che è esattamente $f'(0)$ e quindi l'uguaglianza di derivate che ci eravamo proposti di dimostrare è completata.
Per la seconda domanda basta prendere una qualsiasi funzione che abbia una discontinuità di salto.

Ben più difficile è rispondere alla domanda: è vero che se una funzione $f\colon[a,b] \to \mathbf{R}$ ammettte derivata limitata in (a,b) allora si ha la relazione $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(y)dy$ per ogni $x \in [a,b]$?

La risposta è no ed il controesempio (celebre) dovuto al matematico Vito Volterra si trova nella prima appendice appendice

22.8 Il fatto stesso che si definisca $F(x) = \int_a^x f(z)dz$ implica che $f(x)$ è limitata e dalla limitatezza segue che F è continua. Infatti supponiamo che $M = \sup_{a\le x\le b}|f(x)|$ (il sup esiste in quanto f è limitata); si ha la maggiorazione $|F(x) - F(x')| = |\int_x^{x'} dx f(x)| \le \int_x^{x'} |f(x)|dx \le \int_x^{x'} \sup_{a\le x\le b}|f(x)|dx = M(x'-x)$ (supponendo $x' > x$) e quindi F è addirittura uniformemente continua. Da ciò segue che `i)` $-$ `v)` $\Longrightarrow$ `vi)`.

`i)` $\Longrightarrow$ `ix)` È il teorema di Torricelli–Barrow

`i)` $\not\Longrightarrow$ `x)` Contrariamente a quanto si possa pensare non è detto che $F'(x)$ (che certamente esiste in tutti i punti di continuità di f) sia continua laddove è continua f. In molti casi $F'(x)$ è continua (ad esempio si pensi $f(x) \equiv 1$). Si prenda però la funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} \le |x| < \frac{1}{n} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ Si dimostri che $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e quindi f è continua in 0 e quindi $F'(0)$ esiste $(F(x) = F(-1) + \int_{-1}^x dz f(z))$ e si ha $F'(0) = f(0) = 0$. Non esiste però $\lim_{x\to 0} F'(x)$ in quanto non esiste un aperto $(-\varepsilon, \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$ tale che $F'(x)$ esiste per ogni $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ e quindi non si può eseguire il limite condizione indispensabile per studiare la continuità della funzione. Il motivo di ciò risiede nel fatto che $f(x)$ ha una successione di discontinuità di prima specie che si accumulano nell'origine.

`ii)` $\not\Longrightarrow$ `ix)` Sia $f(x) = \begin{cases} x & x \in [-1, 0] \\ x+1 & x \in [0, 1] \end{cases}$ In questo caso $f(0^+) \ne f(0^-)$ e la discontinuità è di prima specie. Il `Corollario 6.2 pag.238` impedisce ad $F(x) = -1 + \int_{-1}^x dx f(x)$ di essere derivabile in 0. Infatti $F'(0^+) = f(0^+) \ne f(0^-) = F'(0^-)$ da cui la non derivabilità di F. Dunque dalla discontinuità di f in 0 abbiamo dedotto che la derivata in 0 della funzione integrale non esiste. È vero però anche il contrario ossia f può essere discontinua in un punto e la funzione integrale essere derivabile in quel punto.

Si prenda ad esempio $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ f è discontinua in 0 che per noi è il punto c dell'esercizio ($\lim_{x\to 0} f(x)$ non esiste) e tuttavia $F'(0)$ esiste e vale zero. La dimostrazione è la seguente $F'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^h dz \sin\frac{1}{z}$ che possiamo riscrivere come $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\frac{1}{h}}^{\infty} dz \frac{\sin z}{z^2} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[-\frac{\cos z}{z^2}\Big|_{\frac{1}{h}}^{\infty} + \int_{\frac{1}{h}}^{\infty} dz \frac{-2\sin z}{z^3}\right]$. Il limite della prima parte della parentesi quadra è chiaramente zero. Il secondo integrale si può stimare così: $|\int_{\frac{1}{h}}^{\infty} dz \frac{-2\sin z}{z^3}| \le 2\int_{\frac{1}{h}}^{\infty} dz \frac{1}{z^3} = h^2$. A questo punto è evidente che $\lim_{h\to 0}\frac{1}{|h|}|\int_{\frac{1}{h}}^{\infty} dz \frac{-2\sin z}{z^3}| \le \lim_{h\to 0}\frac{h^2}{|h|} = 0$.

Se si rifacesse lo stesso conto con la funzione $f^2(x) = \begin{cases} \sin^2 x^{-1} & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ si avrebbe $F'(0) = -\frac{1}{2}$ e quindi f^2 non ammette come primitiva l'integrale indefinito. Si può dimostrare che la funzione $f^2(x)$ non è una derivata.

`ii)` $\not\Longrightarrow$ `x)` Non è detto però che se f ha una discontinuità in c la A non ha derivata continua in c. Si prenda una qualsiasi funzione derivabile dappertutto tranne in c dove abbia una discontinuità eliminabile.

`iii)` $\Longrightarrow$ `viii)` Sia $A(x) = \int_a^x f(z)dz$ con $a \le x \le b$. La funzione ha la concavità rivolta verso l'alto se presi due qualsiasi punti dell'asse delle ascisse $x_1 < x_2$, il grafico della funzione A giace al di sotto della corda che ha per estremi i punti $(x_1, A(x_1))$ e $(x_2, A(x_2))$. Tale corda ha equazione $y = A(x_1) + \frac{A(x_2)-A(x_1)}{x_2-x_1}(x - x_1)$ e quindi dobbiamo verificare se per ogni $x_1 \le x \le x_2$ è vera la disuguaglianza $A(x) < A(x_1) + \frac{A(x_2)-A(x_1)}{x_2-x_1}(x - x_1)$ ossia $\frac{A(x)-A(x_1)}{x-x_1} < \frac{A(x_2)-A(x_1)}{x_2-x_1}$.

Quest'ultima disuguaglianza equivale a dire il coefficiente angolare della retta passante per i punti $(x_1, A(x_1))$ e $(x, A(x))$ è minore di quello della retta passante per i punti $(x_1, A(x_1))$ e $(x_2, A(x_2))$. La precedente disuguaglianza implica che $\frac{A(x)-A(x_1)}{x-x_1} < \frac{A(x_2)-A(x)}{x_2-x}$ che in termini di integrali equivalgono a $\frac{\int_{x_1}^{x} dz f(z)}{x-x_1} < \frac{\int_{x}^{x_2} dz f(z)}{x_2-x}$. Ora essendo f crescente si ha $\frac{\int_{x_1}^{x} dz f(z)}{x-x_1} \le \max_{x_1 \le z \le x} f(z) \le f(x) \le \min_{x \le z \le x_2} f(z) \le \frac{\int_{x}^{x_2} dz f(z)}{x_2-x}$ e quindi la disuguaglianza è dimostrata.
`iv)` $\not\Longrightarrow$ `x)` Tale affermazione fa il paio con l'affermazione `i)` $\not\Longrightarrow$ `x)` ed infatti la relativa funzione è derivabile in zero con derivata uguale ad 1. La dimostrazione utilizza il teorema ponte. Sia $\{x_k\}$ una successione tale che $\lim_{k\to+\infty} x_k = 0$. Sia $A_n \doteq \{k \in \mathbf{N} : |x_k| \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})\}$. Costruiamo il rapporto incrementale $\frac{f(x_k)-f(0)}{x_k} = \frac{f(x_k)}{x_k}$; per ogni k esiste un n che dipende da k e che indichiamo con $n(k)$ tale che $k \in A_{n(k)}$. In tal modo il rapporto incrementale si può maggiorare e minorare come $\frac{\frac{1}{n(k)}}{\frac{1}{n(k)+1}} \le \frac{f(x_k)}{x_k} \le \frac{\frac{1}{n(k)}}{\frac{1}{n(k)}}$. È chiaro che per $k \to +\infty$ $n(k) \to +\infty$ e quindi per il teorema del confronto il limite fa 1.
`iv)` $\Longrightarrow$ `ix)` Se esiste $f'(c)$ allora f è continua in c e quindi $A'(c)$ esiste
`v)` $\Longrightarrow$ `ix)` Come `iv)` $\Longrightarrow$ `ix)`
`v)` $\Longrightarrow$ `x)` La continuità di f' in c vuol dire che $\lim_{x\to c} f'(x) = f'(c)$ e quindi f' esiste in un intorno di c e quindi f è continua nello stesso intorno. Dunque l'uguaglianza $A'(x) = f(x)$ è vera in un opportuno intorno di c e quindi essendo f continua anche A' è continua.

23.8 Si dimostra per induzione.

$$I_{2n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sin^{2n+2}(x) = \cos x \sin^{2n} x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} + (2n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \cos^2 x \sin^{2n}(x) =$$

$$= (2n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sin^{2n}(x) - (2n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sin^{2n+2}(x) \doteq (2n+1)(I_{2n} - I_{2n+2})$$

ossia $I_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+1} I_{2n}$ e si può verificare che la relazione $I_{2n} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ soddisfa la relazione (usare l'induzione) $I_0 = \frac{\pi}{2}$. Identico discorso vale per I_{2n+1} e $I_0 = 1$.

24.8 Che $\sin^{2n+1} x \le \sin^{2n} x \le \sin^{2n-1} x$ è evidente in $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$. Integrando si mantengono le disuguaglianze e dunque si arriva a $c_n \le \frac{\pi}{2} \le c_n'$ dove $c_n = \frac{((2n)!!)^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!}$, $c_n' = \frac{(2n)!!(2n-2)!!}{((2n-1)!!)^2}$. Dimostrare che c_n è crescente e c_n' è decrescente e quindi convergono per $n \to +\infty$ essendo limitate entrambe nel senso giusto. Inoltre è facile vedere che $\lim_{n\to+\infty} \frac{c_n'}{c_n} = 1$ da cui segue che $\lim_{n\to+\infty} c_n - c_n' = 0$ e quindi c_n e c_n' convergono entrambe a $\frac{\pi}{2}$ (si raccomanda di verificare ossia rendere evidenti tutte le affermazioni fatte). Quindi da $\lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{\pi}{2}$ segue che

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\ldots 2n)^2}{1\cdot(3\cdot 3)\cdot(5\cdot 5)(7\cdot 7)\ldots(2n-1)^2(2n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2^2}{1\cdot 3}\,\frac{4^2}{3\cdot 5}\,\frac{6^2}{5\cdot 7}\cdots\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2}{4k^2-1} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{4k^2}}$$

25.8 Sia $F_6(x)$ con $0 \le x \le 1$ e sia $G(t) \doteq F_6(e^{-t})$. Se $x \to 0$ allora $t \to +\infty$ mentre se $x \to 1$ allora $t \to 0$; $G(t)$ è una funzione derivabile infinite volte per ogni $t \ge 0$ $G(0) = F_6(1) = \int_0^1 dt(1-\cos\frac{1}{t})$ mentre $\lim_{t\to+\infty} G(t) = 0$. $G'(t) = -e^{-t}F_x(e^{-t}) = -e^{-t}(1-\cos\frac{1}{x})|_{x_k = e^{-t}} = 0$ per $t_k = 2\pi k$. $G''(t) = e^{-t}F_x(e^{-t}) + e^{-2t}F_{xx}(e^{-t})$ e quindi $G''(t_k) = 0$ essendo $F_{xx} = -\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$. $G'''(t) = -e^{-t}F_x(e^{-t}) - 3e^{-2t}F_{xx}(e^{-t}) - e^{-3t}F_{xxx}(e^{-t})$ ed essendo $F_{xxx}(x) = \frac{2}{x^3}\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x^4}\cos\frac{1}{x}$ e quindi $G'''(t_k) = -(2\pi k)^4$ (è negativa come ci aspettiamo). La conclusione è che $G(t)$ degrada verso il valore 0 per $t \to +\infty$ subendo ad ogni valore di t_k una diminuzione di ordinata. "Lo scalino" è orizzontale essendo ivi nulla la derivata seconda e diversa da zero la derivata terza.

È opportuno notare che $\lim_{k\to+\infty}(t_{k+1}-t_k)=0$ (si verifichi ciò). Ha nulla da osservare lo studente/ssa in relazione al fatto che si vuole una funzione monotona decrescente per $t\to+\infty$?

27.8 Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, essendo $f(x)=f(a)+\int_a^x f'(y)dy\ \forall\ x$ si ha $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$. Del resto se la funzione fosse uniformemente continua allora per il `teorema 5.16` esisterebbero due costanti a e b tali che $|f(x)|\le a|x|+b$ e quindi $\frac{|f(x)|}{|x|}\le a+\frac{b}{|x|}$. Ciò implica che il rapporto $\frac{|f(x)|}{|x|}$ è limitato contrariamente a quanto accade con le ipotesi dell'esercizio.

28.8** Cominciamo dal caso $\frac{1}{x^n-1}$ e n pari. Consideriamo la equazione $z^n=1$ dove z è un numero complesso. Sappiamo che tale equazione ha n soluzioni per il teorema fondamentale dell'algebra. Scrivendo z in forma polare $z=e^{i\theta}$ l'equazione diventa $e^{in\theta}=e^{2k\pi}$ con k intero relativo e le soluzioni sono, come è noto, $z_k=e^{\frac{2\pi ik}{n}}$ con $k=0,1,2,\ldots n-1,$. Osserviamo che per $k=0$ si ha $z_0=1$ mentre $z_{\frac{n}{2}}=-1$. Ricordiamo inoltre che per ogni valore di k ve ne è un'altro k' tale che $z_k=\overline{z}_{k'}$. Infatti essendo $Im(z_k)=\sin\frac{2\pi k}{n}$, se $1\le k\le\frac{n}{2}-1$ segue che $\sin\frac{2\pi(n-k)}{n}=-\sin\frac{2\pi k}{n}$ e quindi il risultato. Dall'aver trovato le radici segue che $z^n-1=\prod_{k=0}^{n-1}(z-z_k)$ e quindi $\frac{1}{z^n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{A_k}{(z-z_k)}$ rendendo evidente che ora bisogna trovare i valore di A_k per ogni k. Per trovare tali valori si procede nel seguente modo. Supponiamo di voler trovare A_0. Moltiplichiamo tutto per $z-1$ ottenendo $\frac{z-1}{z^n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(z-1)A_k}{(z-z_k)}$ ossia $\frac{1}{z^{n-1}+z^{n-2}+\ldots+1}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(z-1)A_k}{(z-z_k)}$ e poniamo $z=1$ ottenedo $\frac{1}{n}=A_0$. Se invece si vuole A_1 si procede in modo analogo avendone
$\frac{1}{z^{n-1}+z^{n-2}z_1+z^{n-3}z_1^2+\ldots+z_1^{n-2}z+z_1^{n-1}}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(z-z_1)A_k}{(z-z_k)}$ avendone $A_1=\frac{1}{nz_1^{n-1}}$. A questo punto possiamo scrivere
$\frac{1}{z^n-1}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{z_k^{n-1}}\frac{1}{z-z_k}$ e quindi $\frac{1}{x^n-1}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{z_k^{n-1}}\frac{1}{x-z_k}$. Ora
$\int\frac{dx}{x^n-1}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{z_k^{n-1}}\ln(x-z_k)$. Il calcolo dell'integrale è finito tranne il fatto che bisogna tornare ad una espressione reale essendo reale l'espressione di partenza. Per questo bisogna scrivere $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{z_k^{n-1}}\ln(x-z_k)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}z_k\ln(x-z_k)$ ed osservare che i termini con $k=0$ e $k=\frac{n}{2}$ danno luogo a $\frac{1}{n}\ln\frac{x-1}{x+1}$. Per quanto riguarda gli altri prendiamo $z_k\ln(x-z_k)+z_{k'}\ln(x-z_{k'})$ dove k' è in relazione con k secondo la regola prima trovata e quindi $z_k\ln(x-z_k)+\overline{z}_k\ln(x-\overline{z}_k)$ da cui $a_k(\ln(x-z_k)+\ln(x-\overline{z}_k))+ib_k(\ln(x-z_k)-\ln(x-\overline{z}_k))$ dove $a_k=Re(z_k)=\cos\frac{2\pi k}{n}$ e $b_k=Im(z_k)=\sin\frac{2\pi k}{n}$. $a_k(\ln(x-z_k)+\ln(x-\overline{z}_k))=\cos\frac{2\pi k}{n}\ln(x^2-2x\cos\frac{2\pi k}{n}+1)$ ed è una espressione reale. $ib_k(\ln(x-z_k)-\ln(x-\overline{z}_k))=ib_k\ln\frac{(x-z_k)}{(x-\overline{z}_k)}$ ed inoltre bisogna osservare che il numero complesso $\frac{(x-z_k)}{(x-\overline{z}_k)}$ ha modulo 1 per cui può scriversi come $\frac{(x-z_k)}{(x-\overline{z}_k)}=e^{i\varphi}$ con $\varphi=\arctan\frac{Im(\frac{(x-z_k)}{(x-\overline{z}_k)})}{Re(\frac{(x-z_k)}{(x-\overline{z}_k)})}$ da cui segue che $\varphi=\arctan\frac{2a_kb_k-2b_kx}{x^2-2a_kx+a_k^2-b_k^2}$. In definitiva si ha $\ln\frac{(x-z_k)}{(x-\overline{z}_k)}=i\varphi=i\arctan\frac{2a_kb_k-2b_kx}{x^2-2a_kx+a_k^2-b_k^2}$ e quindi alla fine l'integrale è dato da $\frac{1}{n}\ln\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\cos\frac{2\pi k}{n}\ln(x^2-2x\cos\frac{2\pi k}{n}+1)-\sin\frac{2\pi k}{n}\arctan\frac{2a_kb_k-2b_kx}{x^2-2a_kx+a_k^2-b_k^2}$. La precedente espressione, una volta sostituito ad a_k e b_k i rispettivi valori, dà il risultato finale ma è ancora insoddisfacente in quanto, usando la **3.1.2** 6), essa diventa $\frac{1}{n}\ln\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\cos\frac{2\pi k}{n}\ln(x^2-2x\cos\frac{2\pi k}{n}+1)-2\sin\frac{2\pi k}{n}\arctan\frac{x-\cos\frac{2\pi k}{n}}{\sin\frac{2\pi k}{n}}$ che è il risultato finale a meno di costanti ininfluenti sul calcolo dell'integrale indefinito.

29.8** L'integrale si scrive come $\lim_{A\to+\infty}\lim_{\delta\to0}\int_\delta^A\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$ che riscriviamo come
$\lim_{A\to+\infty}\lim_{\delta\to0}\Big(\int_{\frac{a}{b}\delta}^{\frac{a}{b}A}\frac{f(bx)}{x}dx-\int_\delta^A\frac{f(bx)}{x}dx\Big)$
e quindi $\lim_{A\to+\infty}\lim_{\delta\to0}\Big(-\int_{\frac{a}{b}A}^{\frac{a}{b}\delta}\frac{f(bx)}{x}dx+\int_\delta^{\frac{a}{b}A}\frac{f(bx)}{x}dx\Big)$.
Ora prendiamo A tale che $|f(x)-f(+\infty)|<\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\ln\frac{a}{b}}$ per ogni $x>\max\{aA,bA\}$ ed inoltre δ tale

che $|f(x)-f(0)|<\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\ln\frac{a}{b}}$ per $0\leq x<\min\{a\delta,b\delta\}$
ed inoltre ε è così piccolo che $\max\{\varepsilon,\varepsilon\frac{a}{b}\}<\delta$. In questo modo l'integrale diventa
$\lim_{A\to+\infty}\lim_{\delta\to0}\Big(\int_\delta^{\frac{a}{b}\delta}\frac{-f(bx)+f(0)}{x}dx+\int_A^{\frac{a}{b}A}\frac{f(bx)-f(+\infty)}{x}dx\Big)+$
$+\lim_{A\to+\infty}\lim_{\delta\to0}\Big(\int_A^{\frac{a}{b}A}\frac{f(+\infty)}{x}dx-\int_\delta^{\frac{a}{b}\delta}\frac{f(0)}{x}dx\Big)$
Ora $|\int_\delta^{\frac{a}{b}\delta}\frac{-f(bx)+f(0)}{x}|dx\leq\varepsilon$ per la scelta di δ e dell'integrazione della funzione $\frac{1}{x}$. La stessa cosa accade a $\int_A^{\frac{a}{b}A}\frac{f(bx)-f(+\infty)}{x}dx$ per cui abbiamo che per ogni $\varepsilon>0$ si ha $|\int_0^\infty\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx-(f(\infty)-f(0))\ln\frac{a}{b}|<\varepsilon$ e quindi il risultato.
Per quanto riguarda le applicazioni la prima si risolve osservando che la $f(x)$ della dimostrazione è $f(x)=\arctan x$ e quindi $\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}$. Nel secondo caso per trovare la $f(x)$ si cambia variabile nell'integrale $x^n=t$ e diventa $\int_0^\infty\frac{dt}{t}(e^{-at}-e^{-bt})$ da cui il risultato $\frac{1}{n}\ln\frac{b}{a}$.

30.8** In questo caso abbiamo che l'integrale è dato da $\lim_{\delta\to0}\int_\delta^\infty\frac{dx}{x}(f(ax)-f(bx))$. Per ipotesi gli integrali sono convergenti e quindi li trasformiamo in
$\lim_{\delta\to0}\Big(\int_\delta^\infty\frac{dx}{x}f(bx)-\int_\delta^\infty\frac{dx}{x}f(bx)\Big)=\lim_{\delta\to0}-\int_\delta^{\delta\frac{a}{b}}\frac{dx}{x}f(bx)$
ed usando come prima la continuità nell'origine si ha il risultato $-f(0)\ln\frac{a}{b}$.
La prima applicazione prevede $f(x)=e^{-ax}$ e chiaramente $\int_A^\infty\frac{e^{-x}}{x}dx$ converge per ogni A positivo. Il risultato è $\ln\frac{b}{a}$.
La seconda applicazione prevede $f(x)=\cos x$ e $\int_A^\infty\frac{\cos x}{x}dx$ converge (vedi l'esercizio **2.8****). Il risultato è $\ln\frac{b}{a}$.
Il terzo integrale può essere riscritto come $\sin(ax)-\sin(bx)=\frac{1}{2}(\cos(|a-b|)x-\cos(a+b)x)$ e quindi $f(x)=\cos x$. Le considerazioni dell'esempio precedente ci portano a dire che il risultato è $\frac{1}{2}\ln\frac{a+b}{|a-b|}$
Nel quarto integrale si ha $f(x)=\frac{\sin x}{x}ab$ e quindi il risultato è $ab\ln\frac{b}{a}$.
Il quinto integrale si può riscrivere come $\int_0^\infty\frac{dx}{x}(-\frac{1}{4})\frac{\sin 3x-3\sin x}{x}$ e quindi $f(x)=3\frac{\sin x}{x}$ da cui il risultato $\frac{3}{4}\ln 3$.

31.8 $\int_0^1\frac{t^{4x-3y}-t^{3y-4x}}{\ln t}dt$
Cambiando variabile l'integrale diventa $\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t}(e^{t(4x-3y-1)}-e^{-t(4x-3y+1)})$. Nell'intorno di $t=0$ la funzione è lineare in t e quindi l'integrale converge per ogni valore di x e y. L'integrale converge solo se $4x-3y-1<0$ e $4x-3y+1>0$ e quindi possiamo applicare il risultato precedente con la funzione $f(x)=e^{-x}$ avendone $\ln\frac{1+4x-3y}{1-4x+3y}$.

32.8** Essendo f limitata nell'intervallo chiuso $[\alpha,\beta]$ si dimostra che
$\omega[f;\alpha,\beta]=\sup_{x\in[\alpha,\beta]}f(x)-\inf_{x\in[\alpha,\beta]}f(x)\equiv M-m$.
Usando la notazione del libro, $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \mathcal{D}_\varepsilon\ t.c.\ 0<S(\mathcal{D}_\varepsilon,f)-s(\mathcal{D}_\varepsilon,f)<\varepsilon$ e quindi l'estremo inferiore delle somme integrali deve essere zero. Ora $S(\mathcal{D}_\varepsilon,f)=\sum_{j=1}^n M_j(x_j-x_{j-1})$, $s(\mathcal{D}_\varepsilon,f)=\sum_{j=1}^n m_j(x_j-x_{j-1})$; $S(\mathcal{D}_\varepsilon,f)-s(\mathcal{D}_\varepsilon,f)=\sum_{j=1}^n(M_j-m_j)(x_j-x_{j-1})=\sum_{j=1}^n\omega[f;x_{j-1}x_j](x_j-x_{j-1})$ e quindi l'essere f integrabile è equivalente alla condizione $\inf_{\mathcal{D}}\sum_{j=1}^n\omega[f;x_{j-1},x_j](x_j-x_{j-1})=0$.
Dobbiamo ora mostrare che $\omega[f;\alpha,\beta]=\sup_{x\in[\alpha,\beta]}f(x)-\inf_{x\in[\alpha,\beta]}f(x)\equiv M-m$. Per definizione di estremo superiore ed inferiore $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ x_{M}\ \wedge\ x_m\ t.c.\ f(x_M)>M-\varepsilon,\ f(x_m)<m+\varepsilon$. Ne segue che $f(x_M)-f(x_m)>M-m-2\varepsilon$ e quindi
$\sup_{x,y\in[\alpha,\beta]}|f(x)-f(y)|\geq\sup_{x,y\in[\alpha,\beta]}(f(x)-f(y))\geq M-m=\sup_{x\in[\alpha,\beta]}f(x)-\inf_{x\in[\alpha,\beta]}f(x)$.
Inoltre $f(x)-f(y)<M-m$ per ogni x e y da cui $\sup_{x,y\in[\alpha,\beta]}|f(x)-f(y)|\leq M-m$.

33.8*** Facciamo vedere che se è vero il criterio di Du Bois–Reymond allora f è integrabile secondo Riemann. Sia data f limitata nell'intervallo $[a,b]$ con $F=\sup_{[a,b]}f(x)-\inf_{[a,b]}f(x)$ e sia $(I_1,I_2,\ldots,I_k)$ la famiglia finita di intervalli che viene citata nel criterio. Se $|I_k|$ è la

lunghezza di I_k allora $\sum_{k=1}^n |I_k| < \delta$. Consideriamo una partizione $\mathcal{D}$ di $[a,b]$ in cui indichiamo con Π l'insieme degli intervalli di $\mathcal{D}$ e sia Π_I, il sottoinsieme di Π che contiene $(I_1, I_2, \ldots, I_k)$. La somma delle lunghezze degli elementi (intervalli) di Π_I può essere maggiorata con $\delta+2l$ dove l è la lunghezza dell'intervallo più grande di Π. Imponiamo che $l < \frac{\delta}{2}$ dimodoché $\delta + 2l < 2\delta$.
Procediamo ora per assurdo. Supponiamo che f non sia integrabile e quindi $\inf_{\mathcal{D}} \sum_{j=1}^n \omega[f; x_{j-1}, x_j](x_j - x_{j-1}) = \sigma > 0$ (l'inf esiste essendo la somma positiva). Ciò implica che *per ogni* partizione $\mathcal{D}$ si ha $\sum_{j=1}^n \omega[f; x_{j-1}, x_j](x_j - x_{j-1}) \geq \sigma$ e scegliamo la partizione descritta precedentemente. La somma precedente si spezza quindi nella somma di due contributi. Nel primo l'indice j corre sugli intervalli che fanno parte di Π_I mentre nel secondo corre sugli intervalli che fanno parte di $\Pi \backslash \Pi_I$. Indichiamo con $\sum_{j=1}^{n_1} \omega[f; x_{j-1}, x_j](x_j - x_{j-1})$ il primo contributo e con $\sum_{j=1}^{n_2} \omega[f; x_{j-1}, x_j](x_j - x_{j-1})$ il secondo contributo (chiaramente $n_1+n_2 = n$). Essendo $\sum_{j=1}^{n_1} \omega[f; x_{j-1}, x_j](x_j - x_{j-1}) \leq 2F\delta$ per ipotesi,ne segue che $\sum_{j=1}^{n_2} \omega[f; x_{j-1}, x_j](x_j - x_{j-1}) \geq \sigma - 2F\delta > 0$ per $\delta < \frac{\sigma}{2F}$ che è possibile in quanto δ può essere preso piccolo a piacere. Ne segue immediatamente che per almeno un $j_2 \in (1, 2, \ldots, n_2)$ si ha $\omega[f; x_{j_2-1}, x_{j_2}](x_{j_2} - x_{j_2-1}) \geq \frac{\sigma-2F\delta}{n_2}$ e se $|x_{j_2} - x_{j_2-1}| \leq \min\{l, \frac{b-a}{n_2}\}$ si ottiene $\omega[f; x_{j_2-1}, x_{j_2}] \geq \frac{\sigma-2F\delta}{b-a}$. Quest'ultima minorazione contrasta con l'ipotesi di veridicità del criterio di Du Bois–Reymond non appena $\varepsilon < \frac{\sigma-2F\delta}{b-a}$.
Dove entra il fatto, apparentemente non usato, che nel criterio di Du Bois–Reymond gli intervalli debbano essere in numero finito?
Dimostriamo ora il viceversa ossia l'ipotesi è l'integrabilità e dobbiamo mostrare che il criterio è vero. Anche qui procediamo per assurdo. Supponiamo che il criterio sia falso. Ciò vuol dire che esiste $\varepsilon > 0$ ed esiste $\delta > 0$ tale che *qualunque sia l'insieme finito di intervalli che contengono l'insieme dei punti c per i quali* $\omega[f; c] \geq \varepsilon$, la somma delle lunghezze è superiore a δ.
Sia ξ un punto tale che $\omega[f; \xi] \geq \varepsilon$. Per definizione qualunque sia l'intervallo $[\alpha, \beta] \ni \xi$, si ha $\omega[f; \alpha, \beta] \geq \varepsilon$. Consideriamo ora una certa partizione $\mathcal{D}$ dell'intervallo $[a,b]$ e sia Π l'insieme degli intervalli che di essa fanno parte. Sia inoltre Π' il sottoinsieme di Π che contiene i punti che hanno oscillazione maggiore di ε. Abbiamo $\sum_{j=1}^n \omega[f; x_{j-1}, x_j](x_j - x_{j-1}) \geq \sum_{j\ t.c. [x_{j-1}, x_j] \in \Pi'} \omega[f; x_{j-1}, x_j](x_j - x_{j-1}) \geq \varepsilon\delta$ e quindi l'inf della domma non potrà mai essere zero.
Anche in questo caso dove entra la finitezza del numero degli intervalli? R.: Sia nel primo che nel secondo caso entra nel fatto che le somme di Riemann sono fatte su di un *numero finito* di intervalli che nel limite diventano infiniti (come numero e non certo come lunghezza). Prima del passaggio al limite o il che è lo stesso, prima di passare all'inf delle somme integrali, si ha un numero finito di intervalli ogni volta.

34.8*** Facciamo uso del criterio precedentemente dimostrato. Un punto di discontinuità c di f è per definizione un punto in cui l'oscillazione della funzione è diversa da zero. Ordiniamo tali discontinuità nel seguente modo: nel primo gruppo A_1 mettiamo quelle la cui oscillazione è maggiore od uguale ad 1; nel secondo gruppo A_2 quelle la cui oscillazione è maggiore od uguale a $\frac{1}{2}$ e via dicendo (chiaramente $A_2 \supset A_1$.) Se la funzione è integrabile secondo Riemann, per il criterio precedente, ciascun gruppo A_j è contenuto all'interno di una quantità finita, detta I_J, di intervalli la cui lunghezza è $\delta_j = \frac{1}{j}$. Chiaramante $I \doteq \cup_{j=1}^\infty I_j$ contiene tutte le discontinuità. Inoltre la lunghezza della somma degli intervalli $\cup_{j=1}^n I_j$ è minore od uguale alla misura di I_n che è $\frac{1}{n}$. Ne segue che comunque prendo δ la misura di I è minore di δ.
Supponiamo ora che sia verificato il criterio di Lebesgue. Dobbiamo concludere che la funzione è integrabile e quindi che $\inf_{\mathcal{D}} \sum_{j=1}^n \omega[f; x_{j-1}, x_j](x_j - x_{j-1}) = 0$ ossia il criterio di Du Bois–Reymond.
Supponiamo che sia falso il criterio di Du Bois–Reymond; vuol dire che esiste $\varepsilon > 0$ ed esiste $\delta > 0$ tale che *qualunque sia l'insieme finito di intervalli che contengono insieme dei punti c per i quali* $\omega[f; c] \geq \varepsilon$ la somma delle lunghezze è superiore a δ. Ma allora suddividiamo le discontinuità di f in due gruppi. Nel primo gruppo ci sono le discontinuità con oscillazione maggiore od uguale

a ε e nel secondo quelle con oscillazione minore di ε. Il primo gruppo consiste proprio dei punti c la cui oscillazione è maggiore od uguale a ε. Il fatto che qualunque sia l'insieme finito di intervalli che lo contiene la somma delle misure dei suoi intervalli è maggiore di δ significa che qualunque sia l'insieme, finito o numerabile, che contiene le discontinuità, la somma delle misure dei suoi intervalli è maggiore di δ e questo contraddice il criterio di Lebesgue.

35.8*** Per ogni punto razionale in $\frac{p}{q}\in[0,1]$, eccezion fatta per i punti 0 e 1, costruiamo l'intervallo aperto $(\frac{p}{q}-\frac{\delta}{2q^3},\frac{p}{q}+\frac{\delta}{2q^3})$. L'insieme di tali intervalli è chiaramente numerabile e la somma della loro lunghezza è maggiorabile da $\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{q-1}\frac{\delta}{q^3}$ che è una serie convergente proporzionale a δ che può essere preso piccolo a piacere. Dunque il criterio di Lebesgue è verificato e la funzione è integrabile secondo Riemann.
Per la funzione di Dirichlet il discorso precedente non può essere portato avanti in quanto i punti intorno ai quali costruire l'intervallo piccolo sono tutti i punti di $[0,1]$. Qualunque sia l'intervallo costruito intorno a ciascun punto, l'unione di tali intervalli copre tutto l'intervallo e quindi la somma delle loro misure è non inferiore a 1.
Va detto che se si conoscesse soltanto la misura di Peano–Jordan le cose sarebbero un pò diverse. Come noto, in tal caso un insieme ha misura nulla se $\forall\,\varepsilon>0$ può essere ricoperto da una famiglia *finita* di intervalli aperti la somma delle cui lunghezze ha misura minore di ε. Si dice che una funzione è *generalmente regolare* se l'insieme dei suoi punti di discontinuità ha misura di Peano–Jordan nulla. Ebbene in tal caso la funzione dell'esercizio **6.5**** non sarebbe integrabile secondo Riemann.

36.8 La funzione integranda, grazie al fatto che $t>1$, è continua sull'insieme $[0,\frac{\pi}{2}]\times(1,+\infty)$. La sua derivata rispetto a t è data da $\frac{2t}{t^2-\sin^2 x}$ che è anch'essa continua sullo stesso insieme. Possiamo applicare il `Teorema 8.10` sull'insieme $[0,\frac{\pi}{2}]\times[t_o,t_1]$ con $t_o>1$ avendone $I'(t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2t\,dx}{t^2-\sin^2 x}$ (con $I(t)$ ho indicato l'integrale da calcolare). Ora cambiamo variabile $x=\arctan y$ ed otteniamo $2t\int_0^{+\infty}\frac{dy}{y^2(t^2-1)+t^2}=\frac{\pi}{\sqrt{t^2-1}}$. Dunque fino ad ora abbiamo ottenuto il risultato per cui $\frac{dI(t)}{dt}=\frac{\pi}{\sqrt{t^2-1}}$. Ora integriamo rispetto alla variabile t ottenendo $\int dt\frac{dI(t)}{dt}=\int\frac{\pi}{\sqrt{t^2-1}}$. da cui $I(t)=\int\frac{\pi}{\sqrt{t^2-1}}+C$. Per svolgere l'integrale $\int\frac{\pi}{\sqrt{t^2-1}}$ si cambia variabile $t=\cosh z$ e l'integrale diventa $\pi\int dz=z+C'=\pi(\cosh t)^{(-1)}+C'=\pi\ln(t+\sqrt{t^2-1})+C'$ e quindi, alla fine si ha $I(t)=\pi\ln(t+\sqrt{t^2-1})+C''$ $(C''=C+C')$. L'ultimo passaggio riguarda il calcolo della costante C''. Essa va calcolata in quanto l'integrale, essendo definito, non ha costanti pendenti. C'' è un numero che non dipende da t e se noi sapessimo calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\ln(t_*^2-\sin^2 x)$ per un qualche $t_*\in[t_o,t_1]$ avremmo $C''=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\ln(t_*^2-\sin^2 x)-\pi\ln(t_*+\sqrt{t_*^2-1})$. Il punto però è proprio che non sappiamo calcolare l'integrale non avendo la primitiva.
Per trovare C'' eseguiamo il seguente calcolo: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx[\ln t^2+\ln(1-\frac{\sin^2 x}{t^2})]=\pi\ln t+\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\ln(1-\frac{\sin^2 x}{t^2})=\pi\ln(t+t\sqrt{1-\frac{1}{t^2}})+C''=\pi\ln 2t+\pi\ln(1+O(\frac{1}{t}))+C''$.
Nell'integrale definiamo la variabile $\tau=\frac{1}{t}$ ed osserviamo che la funzione $\ln(1-\tau^2\sin^2 x)$ soddisfa le condizioni del `Teorema 8.10` in $[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\tau_o]$ e quindi possiamo passare al limite per $\tau\to 0$ ottenendo $\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\ln 1=0$. Quindi si ottiene $\pi\ln t+C''=\pi\ln 2t$ ossia $C''=-\pi\ln 2$. Alla fine l'integrale è dato da $I(t)=\pi\ln\frac{t+\sqrt{t^2-1}}{2}$.

37.8** Sia $F(a)\overset{\text{def}}{=}\int_0^{+\infty}dxe^{-ax}\frac{\sin x}{x}$. Vogliamo dimostrare che $F(a)$ è continua in $[0,+\infty)$ e quindi $F(0)=F(\lim_{a\to 0})\overset{\text{def}}{=}\int_0^{+\infty}dx\frac{\sin x}{x}=\lim_{a\to 0}F(a)$. Per la continuità di F è sufficiente la uniforme convergenza **Teorema 2.8**. Spezziamo $F(a)$ come $F_1(a)+F_2(a)=\int_0^1 dxe^{-ax}\frac{\sin x}{x}+\int_1^{+\infty}dxe^{-ax}\frac{\sin x}{x}$. La funzione $e^{-ax}\frac{\sin x}{x}$, in $[0,1]$ ammette la maggiorante integrabile $|\frac{\sin x}{x}|$ e quindi vale il **Corollario 1.8**. Purtroppo la stessa cosa non vale nell'intervallo $[1,+\infty)$ in quanto

$\int_1^\infty dx|\frac{\sin x}{x}| = +\infty$ (vedi esercizio **2.8****) e quindi bisogna agire diversamente. Si potrebbe dire che $|e^{-ax}\frac{\sin x}{x}| \leq \frac{e^{-ax}}{x}$ ma $\int_1^\infty dx\frac{e^{-ax}}{x}$ converge solamente se $a \geq a_o > 0$ per cui la funzione $F(a)$ è definita da un integrale uniformemente convergente solo se a è strettamente positivo mentre noi abbiamo necessità di avvicinarci tanto quanto vogliamo ad $a = 0$. Integrando per parti si ottiene $F_2(a) = e^{-a}\cos 1 - \int_1^\infty dx \cos x\big(a\frac{e^{-ax}}{x} + \frac{e^{-ax}}{x^2}\big)$; $\frac{e^{-ax}}{x^2} \leq x^{-2}$ e $\int_1^\infty dx x^{-2} < \infty$. Per $a\frac{e^{-ax}}{x}$ possiamo dire che $ae^{-ax} \leq \frac{1}{x}e^{-1}$ per cui $a\frac{e^{-ax}}{x} \leq e^{-1}x^{-2}$ il cui integrale è convergente. Come si vede le maggiranti integrabili ottenute non dipendono da a ed essendo $e^{-a}\cos 1$ certamente continua ne segue che la funzione $F(a)$ è continua in $[0, +\infty)$. Ora rimane da calcolare $F(a)$ per $a > 0$ e poi fare il limite. Si ha l'uguaglianza $-\int_0^\infty dx \sin x e^{-ax} = \int_0^\infty \frac{d}{da}e^{-ax}\frac{\sin x}{x}$. Vogliamo portare la derivata fuori dall'integrale e per questo facciamo uso del **Teorema 4.8** le cui ipotesi sono certamente verificate nell'intervallo di a $[a_o, +\infty)$ con $a_o > 0$. Infatti $\frac{d}{da}e^{-ax}\frac{\sin x}{x}$ è continua in $(x, a) \in \mathbf{R} \times [0, +\infty)$. $-\int_0^\infty dx \sin x e^{-ax}$ converge uniformemente nell'intervallo $[a_o, +\infty)$ $a_o > 0$ ed inoltre $\int_0^\infty dx\frac{\sin x}{x}$ è convergente.Allora si può applicare il **Teorema 4.8** ed ottenere $\int_0^\infty \frac{d}{da}e^{-ax}\frac{\sin x}{x} = \frac{d}{da}\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{1+a^2}$ ossia $F'(a) = -\frac{1}{1+a^2}$ da cui $F(a) = C - \arctan a$. $\lim_{a\to+\infty} F(a) = 0$ e quindi $C = \frac{\pi}{2}$ e d'altro canto $F(0) = C$ da cui il risultato.

38.8** Useremo il criterio della maggiorante integrabile dimostrando che $|\frac{\cos\alpha x - \cos\beta x}{x^2}| \leq g(x)$ dove $g(x) = \frac{2}{x^2}$ se $x \geq 1$ e $g(x) = 2$ se $x \leq 1$. La prima parte della disuguaglianza è evidente. Per la seconda sviluppiamo il coseno avendone $\cos\alpha x = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2x^2 + O(x^4)$ per cui $\frac{\cos\alpha x - \cos\beta x}{x^2} = \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2) + O(x^2) < 2$ per $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \beta \leq 1$ e $0 \leq t \leq 1$. Dunque l'integrale è uniformemente convergente.

$\int_0^{+\infty} dx\frac{\cos\alpha x - \cos\beta x}{x^2} = \int_0^{+\infty} dx \int_\alpha^\beta dy\frac{\sin xy}{x}$. Se $0 < \alpha \leq 1$, $0 < \beta \leq 1$ l'integrale $\int_0^{+\infty} dx\frac{\sin xy}{x}$ è uniformemente convergente e quindi per il **Teorema 5.8** si può scambiare l'integrazione avendo $\int_\alpha^\beta dy\big\{\int_0^{+\infty} dx\frac{\sin xy}{x}\big\} = \frac{\pi}{2}(\beta - \alpha)$.

Come ulteriore sviluppo si può notare come, essendo $\int_0^{+\infty} |\frac{\cos\alpha x - \cos\beta x}{x^2}|dx$ uniformemente convergente per $0 \leq \alpha \leq 1$ $0 \leq \beta \leq 1$ si può passare al limite $\alpha \to 0$ dentro l'integrale ottenendo $\int_0^{+\infty} dy\frac{1 - \cos\beta y}{y^2} = 2\int_0^{+\infty} dy\frac{\sin^2\frac{\beta y}{2}}{y^2} = \frac{\pi\beta}{2}$.

39.8 Basta invertire l'ordine di integrazione e trovare le primitive (si usa il Teorema che non è stato neppure enunciato ed usato nella dimostrazione del **Teorema 5.8** sullo scambio dell'ordine di integrazione negli integrali doppi di Riemann per funzioni continue (*non impropri*)).

40.8*** R.: Sia data la funzione distanza da C ossia per ogni punto $t \in Dom(f)$ sia $\rho(t, C) = \inf_{\xi\in C} |\xi - t|$ (che è un minimo essendo C compatto). Si costruisca poi la funzione $f(x) = \int_0^x \rho(t, C)dt$. Essendo la distanza una funzione continua (vedi l'esercizio **44.5**) la funzione f è derivabile per il teorema fondamentale del calcolo pag.363. La sua derivata vale $f'(x) = \rho(x, C)$ che vale zero se $x \in C$ mentre se $x \notin C$ allora $F' > 0$ (strettamente). Se ne trae la conclusione che $f(x)$ ha un insieme infinito, non–numerabile, di punti di flesso ascendente. Tali punti stanno sull'asse delle ascisse. Corrispondentemente a tali punti sull'asse delle x vi sono i punti dell'asse delle y cui appartiene $f(x)$. La proprietà 3) di C ci dice che è non denso in alcun punto e quindi se prendiamo due diversi punti x ed x' per i quali $x < x'$, $f'(x) = 0$ e $f'(x') = 0$ certamente esiste un intervallo aperto $I \subset (x, x')$ tale che $I \cap C = \emptyset$. Inoltre si ha $|f(x) - f(x')| \geq \int_I \rho(t, C)dt > 0$. Se ne conclude che la funzione f è iniettiva e quindi l'insieme $T(f)$ è non–numerabile[(4.8)]

41.8** Sappiamo che se la funzione è integrabile allora vale il criterio di integrabilità di Lebesgue (vedi esercizio **34.8*****). Supponiamo che l'insieme $\overline{Cont(f)} \neq \mathbf{R}$ e quindi $\mathbf{R}\backslash\overline{Cont(f)}$ è un insieme non vuoto, aperto, e tutto costituito da punti in cui la funzione è discontinua. Esiste dunque un punto $p \in \mathbf{R}\backslash\overline{Cont(f)}$ ed un intervallo aperto U tale che $U \subset \mathbf{R}\backslash\overline{Cont(f)}$.

(4.8) Per i lettori interessati l'insieme C è *l'insieme di Cantor*. Si veda pure l'Appendice 1 e 2

La lunghezza dell'intervallo è $2r$ ed in esso non cadono punti di $Cont(f)$ per cui non si può soddisfare il criterio di Lebesgue.

42.8** Il fatto che la funzione sia monotona implica che esiste $\lim_{x\to 0^+} f(x) = l \in \mathbf{R}^*$. Se $x^\alpha f(x)$ fosse limitata nell'insieme $(0,a)$ con $0 < a < 1$ allora l'affermazione sarebbe vera. Supponiamo quindi che $x^\alpha f(x)$ è illimitata. Supponiamo $l \in \mathbf{R}^+$ (finito). Dunque si ha $\frac{l}{2} < f(x) < \frac{3}{2}l$ per $0 < x < \delta_{\frac{l}{2}}$ e quindi $x^\alpha \frac{l}{2} < x^\alpha f(x) < \frac{3}{2}lx^\alpha$. L'esistenza dell'integrale $\int_0^1 x^\alpha f(x)dx$ implica che $\int_0^1 \frac{l}{2}x^\alpha$ converge e quindi $\alpha > -1$. Ne segue che $\alpha+1 > 0$ da cui $\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha+1}f(x) = 0$ essendo f limitata nell'intorno di 0.
Supponiamo ora che $l = +\infty$. La funzione $x^{\alpha+1}f(x)$ ammette limite per $x \to 0^+$ in quanto è il prodotto di due funzioni ciascuna delle quali ammette limite. Vogliamo far vedere che tale limite è zero. Supponiamo quindi che $\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha+1}f(x) = l' \neq 0$. Ne segue che esiste $\delta_{\frac{l'}{2}}$ tale che $0 < x < \delta_{\frac{l'}{2}}$ implica $x^{\alpha+1}f(x) > \frac{l'}{2}$ e quindi $x^\alpha f(x) > \frac{l'}{2x}$ ma ciò impedirebbe la convergenza dell'integrale.

43.8** Sia dato l'intervallo $I = (a,x)$ con $a < x < b$. Consideriamo la partizione P di I data da $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots x_n = x$ e la somma $\sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = f(x) - f(a)$. Per il Teorema di Lagrange si ha $\sum_{i=k}^n f'(t_k)(x_k - x_{k-1}) = f(x) - f(a)$ con $x_{k-1} < t_k < x_k$. Essendo $f'(x)$ una funzione integrabile, è limitata e quindi si può scrivere $\sum_{i=k}^n m_k(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{i=k}^n f'(t_k)(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{i=k}^n M_k(x_k - x_{k-1})$ dove $m_k = \inf_{x_{k-1}<x<x_k} f'(x)$ e $M_k = \sup_{x_{k-1}<x<x_k} f'(x)$. Della disuguaglianza, a sinistra prendiamo l'estremo superiore rispetto a tutte le partizioni e a destra l'estremo inferiore. Ciascuno dei due è pari a $\int_a^x dtf'(t)$ e quindi $f(x) - f(a) = \int_a^x dtf'(t)$.

44.8** Cominciamo dalla funzione **6.5****. Gli esercizi **32.8****, **33.8*****, **34.8***** ci dicono che essa è integrabile secondo Riemann e verifica il *Criterio di Du Bois–Reymond* e quindi $\forall\, \varepsilon > 0\ \forall\, \delta > 0\ \{x \in Dom(f) : \omega[f;x] \ge \delta\} \subset \cup_{i=1}^n I_i$, I_i intervallo tale che $\sum_{i=1}^n |I_i| < \varepsilon$.

Consideriamo l'insieme dei razionali per i quali $\frac{1}{q} \ge \delta$ ossia $q \le \frac{1}{\delta}$. In corrispondenza a ciascun numero ritagliamo un intervallo centrato di lunghezza $\varepsilon\frac{1}{q^3}$ e chiamiamo S l'insieme di tali intervalli. Costruiamo le somme di Riemann facendo in modo che gli intervalli del gruppo S facciamo parte della collezione di intervalli con i quali si effettua la partizione dell'intervallo $[0,1]$. Cerchiamo una partizione $\mathcal{D}$ tale che $\inf_{\mathcal{D}} \sum_{j=1}^n \omega[f;x_{j-1},x_j](x_j - x_{j-1}) = 0$ (vedi l'esercizio **32.8****). Quando j corre lungo gli indici relativi agli intervalli dell'insieme S abbiamo che la parte di somma $\sum_{j=1}^n \omega[f;x_{j-1},x_j](x_j - x_{j-1})$ si stima con $\sum_{q=1}^{1/\delta}\sum_{p=0}^{q} \frac{\delta}{q^3} \cdot 1 \le \sum_{q=1}^{1/\delta} \delta\frac{q+1}{q^3} \le C\delta$. Il numero 1 deriva dal fatto che negli intervalli dell'insieme S l'oscillazione della funzione è maggiorata da 1. La rimanente parte di $\sum_{j=1}^n \omega[f;x_{j-1},x_j](x_j - x_{j-1})$ si stima con δ moltiplicata per la lunghezza dell'intervallo ossia 1 dove $\omega[f;x_{j-1},x_j] \le \delta$ negli intervalli che non fanno parte del gruppo S. La somma dà $\delta(C+1)$ che è piccola a piacere essendo δ piccolo a piacere.

Perché il ragionamento non funziona se si considerasse la funzione $\chi_{\mathbf{Q}}$?

Dunque $\int_0^x dyf(y) \equiv 0$ e quindi la derivata è identivamente nulla. Che fosse nulla nei punti dove f è continua lo sapevamo dal Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale essendo $f(y)$ continua in $[0,1]\backslash\mathbf{Q}$. In $\mathbf{Q}$ il Teorema non dice nulla e bisognava fare il calcolo.

Per l'altra funzione dell'esercizio **63.5***** il discorso è analogo.

47.8** Dal fatto che $\int_0^{+\infty} dxf(x) = +\infty$ e dal criterio di Cauchy segue che $\forall\ x'\ \exists\ \varepsilon > 0 \colon\ \forall\ n\ \exists\ m,m' > n\ :\ \sum_{k=m}^{m'} \int_{kx'-\frac{x'}{2}}^{kx'+\frac{x'}{2}} dxf(x) \ge \varepsilon$. Inoltre essendo $f \ge 0$ si ha $\sum_{k=m}^{m_1} \int_{kx'-\frac{x'}{2}}^{kx'+\frac{x'}{2}} dxf(x) \ge \varepsilon$ per ogni $m_1 > m'$. Supponiamo che non esista alcun x_o che soddisfi la relazione $\sum_{k=1}^{+\infty} f(kx_o) = +\infty$. Vuol dire che $\overline{x} \in (0,+\infty) \ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{+\infty} f(k\overline{x}) < +\infty$.

Chiaramente se $\sum_{k=1}^{+\infty} f(k\overline{x}) \neq +\infty$ allora è convergente grazie al fatto che la funzione è positiva. Anche in questo caso usiamo la proprietà di Cauchy e quindi $\forall\ \varepsilon' > 0\ \exists\ n_{\varepsilon'} :\ n_1, n_2 > n_{\varepsilon'} \ \Rightarrow\ \sum_{k=n_1}^{n_2} f(k\overline{x}) < \varepsilon'$. A questo punto prendiamo $n = n_{\varepsilon'}$, $m = n_1$, $m' = n_2$ e quindi otteniamo $\sum_{k=m}^{m'} \int_{kx'-\frac{x'}{2}}^{kx'+\frac{x'}{2}} dx f(x) = (\sum_{k=m}^{m'} \int_{kx'-\frac{x'}{2}}^{kx'+\frac{x'}{2}} dx f(x) - \sum_{k=m}^{m'} f(kx')) + \sum_{k=m}^{m'} f(kx')$. Essendo uniformememnte continua nell'intervallo $[kx' - \frac{x'}{2}, kx' + \frac{x'}{2}]$, si può prendere x' così piccolo che $|\sum_{k=m}^{m'} \int_{kx'-\frac{x'}{2}}^{kx'+\frac{x'}{2}} dx f(x) - \sum_{k=m}^{m'} f(kx'))| < \overline{\varepsilon}$ per cui, dato ε, prendiamo $\overline{\varepsilon} + \varepsilon' < \varepsilon$ e cadiamo in contraddizione.

48.8** Integrando per parti si ha $\int_0^{+\infty} f dx = xf|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} xf' dx$ e quindi l'unica cosa da dimostrare è che esista $\lim_{x\to+\infty} xf(x)$.

Supponiamo che $\int_0^{+\infty} f dx < +\infty$ e dimostriamo che $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$. Infatti dalla convergenza dell'integrale si ha $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ x_\varepsilon > 0 :\ x_2 > x_1 \geq x_\varepsilon \ \Rightarrow\ \int_{x_1}^{x_2} f dx < \varepsilon$ e quindi, data la monotonia di f, $(x_2 - x_1)f(x_2) \leq (x_2 - x_1)\inf_{x_1\leq x\leq x_2} f(x) \leq \int_{x_1}^{x_2} f dx < \varepsilon$ da cui il risultato.

1) Si prende una funzione nulla dappertutto tranne intorno ai naturali dove il profilo della funzione è dato da un triangolo i cui vertici sono $(k - \delta_k, 0)$, $(k + 2\delta_k, 0)$, (k, y_k) e $\delta_k \sim 1/k$, $y_k \sim 1/\sqrt{k}$, . In tal caso la funzione è derivabile dappertutto tranne nei vertici dei triangoli. Per averla derivabile basta modificarla leggermente nell'intorno dei vertici del triangolo in modo da mantenere le caratteristiche. Infatti la funzione tende a zero in modo non monotono. $\int^{+\infty} f dx = \sum_k 3\delta_k y_k \sim \sum_k k^{-3/2}$. $\int^{+\infty} xf' dx = \sum_k \int_{k-\delta_k}^{k} x\frac{y_k}{\delta_k} dx + \int_k^{k+2\delta_k} x\frac{y_k}{2\delta_k} dx \sim \sum_k k y_k = +\infty$

2) La funzione è costante nell'intervallo $(p_k, p_{k+1} - \delta_k)$ e vale y_k dove $p_k = \ln\ln k$, $y_k = 1/\sqrt{\ln k}$. Nell'intervallo $(p_{k+1} - \delta_k, p_{k+1})$ la funzione è lineare decrescente, la pendenza è $\frac{y_k - y_{k+1}}{\delta_k}$ e connette i punti di coordinate $(p_{k+1} - \delta_k, y_k)$ con il punto (p_{k+1}, y_{k+1}). $\int^{+\infty} f dx \sim \sum_k y_k(1 - \delta_k)(\ln\ln(k+1) - \ln\ln(k))$ mentre $\int^{+\infty} xf' dx \sim \sum_k \int_{p_{k+1}-\delta_k}^{p_{k+1}} x\frac{y_k - y_{k+1}}{\delta_k} dx \sim \sum_k p_{k+1}(y_k - y_{k+1}) = \sum_k \ln\ln(k+1)(\frac{1}{\sqrt{\ln k}} - \frac{1}{\sqrt{\ln(k+1)}})$ e la prima somma diverge mentre la seconda converge.

49.8*** Nell'esercizio **21.8***** è stato dimostrato come la funzione $f(x) = \begin{cases} \cos x^{-1} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ sia la derivata di $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Supponiamo ora che $f^2 = (F')^2$ sia la derivata di una qualche funzione $h(x)$ e definiamo $G(x) \stackrel{\text{def}}{=} 2h(x) - 2F(x/2)$. La derivata è $G'(x) = \begin{cases} 2\cos^2(x^{-1}) - \cos((2x)^{-1}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ e quindi $G'(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Ne segue che $G'(x)$, avendo una discontinuità di salto, non verifica la proprietà dei valori intermedi il che è assurdo.

Nel primo articolo richiamato vi è una generale interessante dimostrazione che si trova negli articoli: 1) A.M.Bruckner `Derivatives: Why they elude classification`, Math. Mag. vol.49 (1976), 5–11 2) A.M.Bruckner, J.Marik, C.E.Weil `Some Aspects of Products of Derivatives`, American Mathematical Monthly, vol.99, Issue 2 (Feb.., 1992), 134–145].

Supponiamo che $f:[0,1] \to \mathbf{R}$ e f^2 siano derivate. Ne segue che la funzione $G(x)$ tale che $G' = f^2$ ha derivata non negativa e quindi è monotona non decrescente. Per un noto teorema di Lebesgue (la derivata di una funzione monotona non decrescente è sommabile) $G' = f^2$ è integrabile secondo Lebesgue e quindi anche f lo è . Basta dunque trovare una funzione F la cui derivata f non è integrabile secondo Lebesgue. Il prototipo di tali funzioni è $F(x) = x^2 \sin x^{-2}$ la cui derivata non è integrabile secondo Lebesgue nell'intorno dell'origine (si veda l'**Appendice 1**).

52.8* Per $\dfrac{1}{n+1} < x \le \dfrac{1}{n}$ si ha $n \le \dfrac{1}{x} < n+1$ e quindi $[\dfrac{1}{x}] = n$. Dunque $\displaystyle\int_0^1 \{\frac{1}{x}\}dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} (\frac{1}{x}-k)dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n \Bigg(\big(\ln(k+1)-\ln k\big) - k(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})\Bigg) = \lim_{n\to+\infty}\Big(\ln(n+1)-n+\sum_{k=1}^n\frac{k}{k+1}\Big) = \lim_{n\to+\infty}\Big(\ln(n+1)-n+n-\sum_{k=1}^n\frac{1}{k+1}\Big) = \lim_{n\to+\infty}\Big(\ln(n+1)-\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}+1\Big) = \ln(n+1)+1-(\ln(n+1)+\gamma_{n+1})\Big) = 1-\gamma$

• Per il secondo integrale conviene osservare che, detta $f(x) = \{\dfrac{1}{x}\}\{\dfrac{1}{1-x}\}$, si ha $f(\dfrac{1}{2}-x) = f(\dfrac{1}{2}+x)$ e quindi $\displaystyle\int_0^1 f(x) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = 2\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^n\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}}(\frac{1}{x}-k)\big(\frac{1}{1-x}-1\big)dx = 2\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^n\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}}(\frac{1-k}{1-x}+k\big)dx = 2\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^n\Big((1-k)\big(\ln(1-\frac{1}{k+1})-\ln(1+\frac{1}{k})\big)+k\big(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\big)\Big)$.

A parte il limite, le somme sono date da

$$2\sum_{k=2}^n(1-k)\big(\ln k-\ln(k+1)-\ln k+\ln k\big)+\frac{1}{k+1}\Big) =$$

$$= 2\sum_{k=2}^n\Big(k\ln(k+1)-(k-1)\ln k-\ln(k+1)\Big)-2\sum_{k=2}^n\Big(k\ln k-(k-1)\ln(k-1)-\ln k+2\frac{1}{k+1}\Big) =$$

$$= 2\Big(n\ln(n+1)-\ln 2-\sum_{k=2}^n\ln(k+1)-n\ln n+\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^n\ln k\Big)+\sum_{k=2}^n\frac{1}{k+1}\Big) =$$

$$= 2\Big(n\ln(n+1)-n\ln n-\ln 2-\ln(n+1)+\ln 2+2\sum_{k=2}^n\frac{1}{k}-2(1+\frac{1}{2})\Big) =$$

$= 2n\ln(n+1)-2n\ln n-2\ln(n+1)+2\ln(n+1)+2\gamma_{n+1}-3 = 2n\ln(1+\dfrac{1}{n})+2\gamma_{n+1}-3$ e nel limite si ottiene $2\gamma-1$

53.8* Detta $f_0(x) = 1-x$, per la concavità si ha $f(x) \ge f_0(x)$ per ogni $0 \le x \le 1$. Inoltre $(\int_0^1 f_0(x)dx)^2 - 2\int_0^1 x^2 f_0(x) = \frac{1}{4} - 2(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) = \frac{1}{12}$ e quindi la relazione da dimostrare diventa $2\int_0^1 x^2(f(x)-f_0(x))dx \le (\int_0^1 dxf(x))^2 - \int_0^1 dxf_0(x))^2$. Facciamo vedere ora che: 1) $2\int_0^1 x^2(f(x)-f_0(x))dx \le \int_0^1 dx(f(x)-f(x_0))$, 2) $1 \le \int_0^1 dx(f(x)+f_0(x))$. 1) + 2) implicano il risultato in quanto si hanno le disuguaglianze $2\int_0^1 x^2(f(x)-f_0(x))dx \le \int_0^1 dx(f(x)-f(x_0)) \le (\int_0^1 dxf(x))^2 - \int_0^1 dxf_0(x))^2$.
La 2) è immediata dalla definizione di f_0 e dal fatto che $f(x)$ è concava. La 1) è equivalente a $2\int_0^1 dxx^2 f(x) + \frac{1}{3} \le \int_0^1 dxf(x)$. Sia $q(x)$ la corda che congiunge i punti $(0,1)$ e $(1,f(1))$. È immediato verificare che $\int_0^1 dx(q(x)-2x^2q(x)) = \frac{1}{3}$ e quindi la relazione da dimostrare diventa $\int_0^1 dx(2x^2-1)(f(x)-q(x)) \le 0$. La funzione $f(x)-q(x)$ è positiva per $x \ne 0,1$, vale zero per $x = 0,1$ ed è concava. Ne segue che $\int_0^1 dx(2x^2-1)(f(x)-q(x)) \le \int_0^1 dx(2x^2-1)F(x) < 0$ dove $F(x) = \begin{cases} y_0\sqrt{2}x & 0 \le x \le 1/\sqrt{2} \\ y_0 & 1/\sqrt{2} \le x \le 1\end{cases}$ y_0 è il massimo della funzione nell'intervallo $[0,1]$. La maggiorazione è vera in quanto, nell'intervallo $(0,1/\sqrt{2})$ si ha $(2x^2-1)F(x) \ge (2x^2-1)f(x)$ per la concavità e viceversa nell'intervallo $(1/\sqrt{2},1)$ sempre per la concavità .

54.8** L'insieme dei punti in cui una qualsiasi funzione $f\colon[0,1]\to\mathbf{R}$ ammette limite si può scrivere come $H \stackrel{\rm def}{=} \cap_{k=1}^\infty \cup_{n=k}^\infty \{x \in [\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}]\colon\ y,z \in (x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n})\backslash\{x\} \Rightarrow |f(y)-f(x)| < \frac{1}{k}\}$.

Per ipotesi sappiamo che $[0,1]=H$ ed inoltre è chiaro che $A_{n,k} \stackrel{\rm def}{=} \cup_{n=k}^{\infty} \{x\in[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}]:\ y,z\in (x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n})\backslash\{x\} \Rightarrow |f(y)-f(x)|<\frac{1}{k}\} = [\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}]$. Supponiamo che la funzione non sia integrabile secondo Riemann. Sulla base del risultato dell'esercizio **33.8*****, vuol dire che esiste ε_0 tale che l'insieme dei punti in cui la oscillazione della funzione è maggiore o uguale a ε_0, detto M, non è nulla (nel senso di Peano–Jordan). Sia λ la misura di M. Poiché la la misura di M è pari alla misura di $\overset{\circ}{M}$, vuol dire vi è un insieme aperto contenuto in M, detto $\mathcal{O}$, di misura λ e costituito tutto da punti la cui oscillazione della funzione f è maggiore o uguale a ε_0. Sia ora $\xi\in A_{n,k}\cap\mathcal{O}$ (l'intersezione c'è se n è grande abbastanza). Prendiamo due punti ξ_1, ξ_2 e $\xi_3=\frac{\xi_1+\xi_2}{2}$ appartenenti tutti a $(\xi,\xi+\frac{1}{n})\cap\mathcal{O}$. Se k è abbastanza grande l'oscillazione della funzione in ξ_3 è minore o uguale a $1/k$ ma ξ_1, ξ_2 possono essere scelti in modo tale che la loro oscillazione sia maggiore o uguale a ε_0 e questo è impossibile non appena $1/k$ è più piccolo si ε_0. In questo caso si è usato il criterio di Du Bois–Reymond

Il ragionamento dell'autore, invece, fà uso del criterio di Lebesgue ed è molto più semplice. Sia $A\in[0,1]$ l'insieme dei punti in cui f è continua e A^c l'insieme in cui è discontinua. Per ipotesi le discontinuità sono solo di salto. Si definisca la funzione $F(x)\doteq\begin{cases} f(x) & x\in A \\ \lim\limits_{y\to x} f(y) & x\in A^c\end{cases}$.

Naturalmente $F(x)$ è continua. Sia $g(x)\stackrel{\rm def}{=}f(x)-F(x)$. Nei punti in cui è continua, $g(x)$ vale zero. Nei punti in cui è discontinua, il limite di g è zero. Sia $A_n\stackrel{\rm def}{=}\{x\in[0,1]:\ g(x)\geq 1/n\}$. Se A_n è infinito, allora A_n ammette almeno un punto di accumulazione, diciamo p. Abbiamo $|g(p)|=|(g(p)-g(x_n))+g(x_n)|\geq|g(x_n)|-|g(p)-g(x_n)|\geq\frac{1}{n}-\varepsilon$. Infatti $\lim_{n\to\infty} g(x_n)-g(p)=0$ per ipotesi e $g(x_n)\geq 1/n$ pure per ipotesi. Ne segue che $g(p)\geq 1/n$ e questo è impossibile in quanto, nei punti in cui ammette limite, $g(x)$ vale zero. La contraddizione si risolve dicendo che A_n è finito per ogni n e quindi ha *misura di Lebesgue* nulla.