§4 Limiti di funzioni e ordini di infinito/esimo

Per le definizioni e teoremi si fa riferimento ad uno qualsiasi dei libri M.Bertsch - R.Dal Passo *Lezioni di Analisi Matematica*, I edizione settembre 1996, ARACNE EDITRICE, via Raffaele Garofalo, 133 A/B 00173 Roma tel.0672672233/22, M.Bertsch - R.Dal Passo *Elementi di Analisi Matematica*, I edizione ottobre 2001, ARACNE EDITRICE

1.4 Dimostrare che se $\lim_{x\to a} g(x)=0$ allora $\frac{1}{1-g(x)}=1+g(x)+o(g)$. Sapendo che $\tan x = x+\frac{1}{3}x^3+o(x^4)$ nell'intorno di $x=0$ trovare $\cot x$ sempre nell'intorno di $x=0$

2.4 Disporre in ordine di infinitesimo crescente le seguenti funzioni rispetto all'infinitesimo campione $\frac{1}{x}$ per $x\to+\infty$[(1.4)]

$$f_1(x)=\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\sin\frac{1}{x},\quad f_2(x)=\arctan\frac{1}{x},\quad f_3(x)=\frac{5x^2-1}{x^3+1}\arctan(x\log x)(1-e^{\sin\frac{1}{x}})$$

3.4 Disporre in ordine decrescente di infinito per $x\to+\infty$ le seguenti funzioni:

$$f_1(x)=x^2\ln x,\quad f_2(x)=\frac{2+\sin x}{1-\cos\frac{1}{x}},\quad f_3(x)=\frac{\sqrt{\sin\frac{1}{x}}}{e^{1/x}-1}(e^{2x}-1)$$

4.4 Disporre in ordine di decrescente di infinito per $x\to 5^-$ le seguenti funzioni:

$$f_1(x)=(5-x)^{-5/2},\quad f_2(x)=(\arcsin(5-x)^3)^{-1/4},\quad f_3(x)=\left(1+\arctan(5-x)^5\right)^{1/(5-x)^6},$$
$$f_4(x)=-\log(1-e^{\frac{x-5}{x^2}}).$$

5.4 Disporre in ordine di infinito crescente per $x\to-\infty$ le seguenti funzioni

$$f_1(x)=\sqrt{x^2+(-x)^{3/2}}+x,\quad f_2(x)=\frac{-x^3+1}{\log(1+e^{x^2})},\quad f_3(x)=[(1-\cos\frac{1}{(-x)^{3/4}})\sin(\sin\frac{1}{|x|})]^{-1}$$

6.4 Disporre in ordine di inifinitesimo crescente $x\to 0$ (precisando l'eventuale ordine)

$$f_1(x)=e^{3x}-\cos x,\quad f_2(x)=\tan(\sin(2x)^2),\quad f_3(x)=\ln|x|^{2x}$$

7.4 Disporre in ordine di inifinitesimo crescente $x\to 0$ (precisando l'eventuale ordine)

$$f_1(x)=x\ln\left((\pi+e^{2x})^4\right),\quad f_2(x)=x\ln^{19}x,\quad f_3(x)=\left((x^2+x)^{1/3}-(x^2-x)^{1/3}\right)x\quad f_4(x)=(x^2+x)^{1/3}+(x^2-x)^{1/3}$$

8.4 Disporre in ordine di inifinitesimo crescente $x\to+\infty$ (precisando l'eventuale ordine)

$$f_1(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{\cos 1/x}{2\sqrt{x+1/x}},\quad f_2(x)=\arctan(3x+1)\sin(1/(x\sqrt{x})),\quad f_3(x)=(\ln x)\sin(1/(x\sqrt{x}))$$

9.4 Disporre in ordine di inifinitesimo crescente $x\to+\infty$ (precisando l'eventuale ordine)

$$f_1(x)=(\sin\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2})\log x,\quad f_2(x)=\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}-\cos\frac{1}{x},\quad f_3(x)=\log(x^4+x^{1/2})-\log(x^4-x^{1/2})$$

10.4 Dare un esempio di funzione f tale che 1) $\lim_{x\to+\infty} x^N f(x)=0 \wedge \lim_{x\to+\infty} e^x f(x)=+\infty$ per ogni intero N; 2) $\lim_{x\to+\infty} x^N f(x)=0 \wedge \lim_{x\to+\infty} e^{ax} f(x)=+\infty$ per ogni $a>0$

(1.4) Le funzioni che seguono possono avere un ordine rispetto ad un infinito/esimo campione secondo la *Definizione di pag.160* ma possono anche non averlo. In questo secondo caso per confrontare due funzioni si fa riferimento alle definizioni di *pag.156* e per ogni intero N 3) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ \wedge \ \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^a} = 0$ per ogni a positivo 4) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ \wedge \ \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\ln^a x} = 0$ per ogni a positivo 5) $\lim_{x\to+\infty} x^N f(x) = 0 \ \wedge \ \lim_{x\to+\infty} e^{ax} f(x) = +\infty \ \wedge \ \lim_{x\to+\infty} e^{x^a} f(x) = +\infty$ per ogni N ed a positivi

SOLUZIONI

1.4 $\cot x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x + o(x)$ **2.4** $f_2 < f_1 < f_3$ **3.4** $f_2 < f_1 < f_3$ **4.4** $f_3 > f_1 > f_2 > f_4$ **5.4** $f_1 < f_2 < f_3$ **6.4** $f_2 > f_1 > f_3$ **7.4** $f_3 = f_1 > f_4 > f_2$ **8.4** $f_1 > f_3 > f_2$ **9.4** $f_2 > f_1$ (circa f_3 vedi la risoluzione)
10.4 $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$, $f(x) = e^{-\sqrt{x}}$, $f(x) = \ln x$, $f(x) = \ln(\ln x)$, $f(x) = e^{-\ln^2 x} = \frac{1}{x^{\ln x}}$

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

1.4 $\frac{1}{1-g(x)} - (1 + g(x)) = \frac{g^2(x)}{1-g}$ e $\lim_{x\to a} \frac{1}{g}\frac{g^2(x)}{1-g} = 0$ che è come dire il risultato.
$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{x+\frac{1}{3}x^3+o(x^4)} = \frac{1}{x}\frac{1}{1+\frac{1}{3}x^2+o(x^3)}$ ed applicando il risultato precedente dove $g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + o(x^3)$ si ottiene $\cot x = \frac{1}{x}\big(1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)\big) = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x + o(x)$

2.4 $f_1(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} \sin\frac{1}{x} = (x\sin\frac{1}{x})\frac{2}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}$. Poiché $\lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = 2$ e $\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x} = 1$ (viene da $\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t} = 1$) ne consegue che l'ordine è 3/2 (si intende la definizione di `pag.160` del libro di testo con $x_o = +\infty$, $\alpha = \frac{3}{2}$, $l = \frac{1}{2}$ e $g(x) = \frac{1}{x}$). Si può in questo caso equivalentemente dire che $f_1(x) \sim \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$. $f_2(x)$: $\lim_{x\to\infty} x\arctan\frac{1}{x} = 1$ (basta cambiare variabile $t = \frac{1}{x}$ ed utilizzare il limite notevole $\lim_{t\to0}\frac{\tan t}{t} = 1$ che a sua volta viene dal limite notevole $\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t} = 1$) e dunque essendo $x\arctan\frac{1}{x} = \frac{\arctan 1/x}{\frac{1}{x}}$ se ne conclude che l'ordine di $f_2(x)$ è 1. f_3 : per $x > 1$ si ha $\lim_{x\to+\infty}\frac{x(5x^2-1)}{x^3+1} = 5$, per cui la prima funzione è infinitesima di ordine uno rispetto a $\frac{1}{x}$. per $x\to\infty$ $\lim_{x\to+\infty}\arctan(x\log x) = \frac{\pi}{2}$.
Per la terza funzione si utilizza il limite notevole $\lim_{z\to0}\frac{e^z-1}{z} = 1$ ponendo $\sin 1/x$ al posto di z e $x\to+\infty$; in altre parole $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\sin 1/x}-1}{\sin 1/x} = 1$. Scrivendo quindi

$$f_3(x) = \frac{5x^2-1}{x^3+1}\arctan(x\log x)(1 - \sin^{1/x}) = \frac{5x^2-1}{x^3+1}\arctan(x\log x)\frac{1-e^{\sin\frac{1}{x}}}{\sin\frac{1}{x}}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\frac{1}{x}$$

si ottiene $\lim_{x\to+\infty}\frac{f_3(x)}{\frac{1}{x^2}} = \frac{5\pi}{2}$. Mettendo assieme i risultati si ha $f_2 < f_1 < f_3$.
Per $\arctan(x\log x)$ *non è applicabile la definizione di pag. 160 del libro nonostante lo sia per* $f_3(x)$. In questo caso si può dire che $\arctan(x\log x) = O(1)$ per $x\to+\infty$ ossia è una quantità limitata per $x\to\infty$.

3.4 $f_1(x)$: è infinita di ordine maggiore di 2 e minore di qualsiasi numero maggiore di 2 rispetto ad x per $x\to+\infty$. Va evidenziato che non ha ordine rispetto all'infinito campione ossia non esiste nessun numero reale positivo a tale che $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\ln x}{x^a} = b \neq 0$ e quindi non è applicabile la Definizione di `pag.160`. Viceversa è applicabile la definizione di `pag.156`. Infatti $f_1(x)$ ha ordine maggiore di due in quanto $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\ln x}{x^2} = +\infty$ e minore di un qualsiasi numero maggiore di 2 essendo $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\ln x}{x^{2+\delta}} = 0$ per ogni $\delta > 0$. $f_2(x)$: si può dire che $2 + \sin x = O(1)$ per $x\to+\infty$ (infatti dalla trigonometria si ha $1 \le 2 + \sin x \le 3$); inoltre $\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$. È di tutta evidenza che $\lim_{x\to+\infty}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = +\infty$ ed è altrettanto evidente che $\lim_{x\to+\infty}\frac{f_3(x)}{f_1(x)} = +\infty$ per cui il risultato è $f_3 > f_1 > f_2$. Per dimostrare che $\lim_{x\to+\infty}\frac{f_3(x)}{f_1(x)} = +\infty$ l'ultima cosa da fare è usare il teorema de l'Hopital. Viceversa bisogna osservare che $\frac{\sqrt{\sin\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}-1}$ è infinita di ordine $\frac{1}{2}$ rispetto all'infinito campione x e che $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}e^{2x}}{x^N} = +\infty$ per ogni intero positivo N. Infatti per quanto riguarda $\frac{\sqrt{\sin\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}-1}$ basta riscriverla come $\sqrt{x\sin\frac{1}{x}}\frac{x}{\sqrt{x}}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}-1}$ e per $x\to+\infty$ il primo e terzo fattore tendono ad uno facendo si che la espressione sia infinita di ordine $\frac{1}{2}$. Per quanto riguarda $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}e^{2x}}{x^N}=+\infty$ è un limite notevole.

4.4 $f_1(x)$ è un infinito di ordine $5/2$ rispetto all'infinito campione $5-x$. $f_2(x)$: è un infinito di ordine $3/4$ rispetto allo steso infinito campione. Infatti da $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=1$ segue che $\lim_{x\to+\infty}\frac{\arcsin x}{x}=1$ (basta cambiare variabile $x=\arcsin t$; il cambio è del tutto lecito in quanto nell'intorno dell'origine $\sin x$ è una funzione monotona crescente e quindi invertibile). Dunque $\lim_{x\to5^-}\frac{(\arcsin(5-x)^3)^{-1/4}}{\frac{1}{(5-x)^{3/4}}}=\lim_{x\to5^-}\frac{(5-x)^{3/4}}{(\arcsin(5-x)^3)^{1/4}}=1$ da cui l'asserto. È chiaro che $\lim_{x\to5^-}\frac{f_1}{f_2}=+\infty$. $f_3(x)$: essa è una forma indeterminata del tipo 1^∞ che riscriviamo come $\exp(\frac{1}{(5-x)^6}\ln(1+\arctan(5-x)^5))$ e ci ricordiamo che $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ e che $\lim_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}=1$ per cui riscriviamo $\frac{\ln(1+\arctan(5-x)^5))}{(5-x)^5}=\frac{\ln(1+\arctan(5-x)^5))}{(\arctan(5-x))^5}\frac{(\arctan(5-x))^5}{(5-x)^5}$ il cui limite per $x\to5^-$ è uno. Dunque si ottiene $\lim_{x\to5^-}\frac{\exp(\frac{1}{(5-x)^6}\ln(1+\arctan(5-x)^5))}{\exp(1/(5-x)}=1$ e se ne conclude che $f_3(x)$ ha, per così dire, "ordine infinito" rispetto a $1/(5-x)$. Si ha $\lim_{x\to5^-}\frac{f_3}{f_1}=+\infty$. $f_4(x)$: da $\lim_{x\to5^-}\frac{e^{\frac{x-5}{x^2}}-1}{\frac{x-5}{x^2}}=1$ segue che $e^{\frac{x-5}{x^2}}=1+\frac{x-5}{x^2}+o(\frac{x-5}{x^2})$ e quindi $\log(1-e^{\frac{x-5}{x^2}})=\log\frac{x-5}{x^2}+o(\frac{x-5}{x^2})$ da cui segue che $\lim_{x\to5^-}\frac{-\log(1-e^{\frac{x-5}{x^2}})}{-\log(5-x)}=1$ ed essendo $\lim_{x\to5^-}\frac{-\log(5-x)}{(5-x)^{3/4}}=+\infty$ ne segue che l'ordine decrescente di infinito è dato da $f_3>f_1>f_2>f_4$.

5.4 Razionalizzando f_1 diventa $\frac{(-x)^{3/2}}{\sqrt{x^2+(-x)^{3/2}}-x}=\frac{(-x)^{3/2}}{-x(\sqrt{1+(-x)^{-1/2}}+1)}=\frac{(-x)^{1/2}}{(\sqrt{1+(-x)^{-1/2}}+1)}$ ed è chiaro che ha ordine $\frac{1}{2}$ rispetto all'infinito campione $-x$. Sarebbe stato un grave errore ragionare nel seguente modo: $\sqrt{x^2+(-x)^{3/2}}$ ha ordine 1 ed anche x per cui la loro somma ha ordine 1 rispetto all'infinito campione. Il punto è che la radice tende a $+\infty$ per $x\to-\infty$ mentre $x\to-\infty$ e quindi i due termini danno contributi di segno opposto. Tale opposizione dei segni si manifesta nel fatto che l'ordine dell'espressione è $\frac{1}{2}$ e non 1. Se dopo la radice ci fosse stato il segno meno allora il ragionamento intuitivo avrebbe condotto al risultato corretto ossia che la somma dei termini avrebbe ordine 1.
Per quanto concerne f_2 scriviamo $\log(1+e^{x^2})=\log e^{x^2}+\log(1+e^{-x^2})=x^2+\log(1+e^{-x^2})$ ed osserviamo che $e^{-x^2}\to0$ per $x\to-\infty$. La funzione diventa $f_2(x)=\frac{x(-1+x^{-3})}{1+x^{-2}\log(1+e^{-x^2})}$ da cui appare evidente che la funzione è infinita con ordine 1 rispetto all'infinito campione $-x$.
Da ultimo è rimasta f_3. La riscriviamo per x negativo nel seguente modo
$[(1-\cos\frac{1}{(-x)^{\frac{3}{4}}})(|x|)^{\frac{3}{2}}]^{-1}\frac{(\sin\frac{1}{|x|})}{\sin(\sin\frac{1}{|x|})]}\frac{1}{|x|\sin\frac{1}{|x|}}|x||x|^{\frac{3}{2}}$ e per $x\to-\infty$ la funzione ha ordine $\frac{5}{2}$.

6.4 $f_1(x)=1+3x+o(x)-1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$ per cui l'ordine di rispetto all'infinitesimo campione x è 1. f_2 : Essendo $\lim_{x\to0}\frac{\tan(\sin(2x)^2)}{4x^2}=1$ l'ordine è 2. f_3 : $f_3(x)=2x\ln|x|$ e quindi non ha ordine rispetto all'infinitesimo campione x. Nonostante ciò si può dire che ha ordine inferiore rispetto ad 1. Quindi la risposta è $f_3<f_1<f_2$

7.4 f_1 : ordine 1 rispetto all'infintesimo campione f_2 : ordine di infintesimo minore di 1 f_3 : $f_3(x)=x\frac{2x^2}{(x^2-x)^{2/3}+(x^2-x)^{1/3}(x^2+x)^{1/3}+(x^2+x)^{2/3}}$ e per $x\to0$ ha ordine $\frac{5}{3}$ f_4 : $f_4(x)=\frac{2x^2}{(x^2-x)^{2/3}-(x^2-x)^{1/3}(x^2+x)^{1/3}+(x^2+x)^{2/3}}$ da cui segue che l'ordine è $\frac{2}{3}$

8.4 f_1 : $\cos\frac{1}{x}=1-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})$ ed inoltre $\sqrt{x+\frac{1}{x}}=\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{x}(1+\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2}))$.

$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = 1 - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})$ da cui segue che $f_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(1 - \frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})$ e dunque ha ordine $\frac{5}{2}$ rispetto all'infinitesimo campione $\frac{1}{x}$. $f_2 :$ ha chiaramente ordine $\frac{3}{2}$ $f_3 :$ ha ordine superiore a $\frac{3}{2}$

9.4 f_1 : $\sin\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})$, $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2}(1 - \frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2}))$ per cui la funzione diventa $(o(\frac{1}{x^2}) + \frac{1}{x^4})\log x$ e non è possibile dire di più a questo livello (confrontare ciò con la f_1 dell'esercizio precedente ed osservare perché in quel caso era stato possibile dirimere la questione. Si può dire che la funzione è infinitesima per $x \to +\infty$ di ordine inferiore a 2 ma certamente superiore a qualsiasi numero inferiore a 2 $f_2 :$ Si lascia al lettore verificare che $f_2 = o(\frac{1}{x^2})$ $f_3 :$ la funzione può scriversi come $\ln x^4 + \ln(1 + \frac{1}{x^{7/2}}) - \ln x^4 - \ln(1 - \frac{1}{x^{7/2}}) = \frac{2}{x^{7/2}} + o(\frac{2}{x^{7/2}})$ per cui è infinitesima di ordine $\frac{7}{2}$. La conclusione è che $f_2 > f_1$ ma nulla si può dire circa la collocazione di f_3 rispetto alle prime due.

10.4 $\lim_{x\to+\infty} x^N e^{-\frac{1}{2}x} = 0$, ma $\lim_{x\to+\infty} e^x e^{-\frac{1}{2}x} = +\infty$. Per la seconda domanda si prenda $f(x) = e^{-\sqrt{x}}$ e si verifichi la richiesta dell'esercizio.

