§3 Successioni

Per le definizioni e teoremi si fa riferimento ad uno qualsiasi dei libri M.Bertsch - R.Dal Passo *Lezioni di Analisi Matematica*, I edizione settembre 1996, ARACNE EDITRICE, via Raffaele Garofalo, 133 A/B 00173 Roma tel.0672672233/22, M.Bertsch - R.Dal Passo *Elementi di Analisi Matematica*, I edizione ottobre 2001, ARACNE EDITRICE

Trovare il limite, qualora esista, delle seguenti successioni. Per quelle contrassegnate da un asterisco in alto "trovare N in funzione di ε" (oppure, cosa più frequente, una sua stima). Nel seguito al posto di N è stata usata la notazione ν_ε.

1.3 $a_n^* = \frac{n^2}{n^2+1}$, $a_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n}$, $a_n^* = (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}$, $a_n^* = \sqrt{n-1} - \sqrt{n}$,

2.3 $a_n = \frac{n^\alpha}{1+2+3+\ldots n}$ $\alpha \in \mathbf{R}_+$, $a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}$, $a_n = \sqrt{n}\sin\frac{1}{n^\alpha}$ $\alpha \in \mathbf{R}_+$,

3.3 $a_n^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n k^{\frac{1}{k}}$, $a_n = n^{\frac{1}{n}}(n+1)^{\frac{1}{n+1}}(n+2)^{\frac{1}{n+2}}\ldots(2n)^{\frac{1}{2n}}$, $a_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)k}$

4.3 $a_n^* = \sin 2\pi\sqrt{n^2+\sqrt{n}}$, $a_n = \frac{1+3+5+\ldots 2n+1}{1+2+3+\ldots n}$, $a_n = (1+\frac{3}{n^2+n^4})^n$

5.3 Si definiscono per ricorrenza le seguenti successioni $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$, $a_0 = 1$; $c_{n+1} = \arctan c_n$, $c_1 = 1$; $b_{n+1} = b_n^{b_n}$, $b_o = \frac{1}{4}$ $x_k = \frac{x_{k-1}}{2} + \frac{1}{x_{k-1}}$, $k \geq 1$, $x_0 = 1$; $x_k = x_{k-1}(\frac{3}{2} - x_{k-1}^2)$, $x_0 = \frac{1}{2}$. Dimostrare che convergono e trovarne il limite per $n \to \infty$.

6.3 Dimostrare che non esiste il limite delle seguenti successioni
$a_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$, $a_n = \frac{(-)^n}{n} + \frac{1-(-)^n}{2}$,

7.3 Data la successione $a_n = 0,999\ldots 9$ (n volte) dimostrare che il limite della successione è 1 e che si può dimostrare in almeno due modi

8.3*** Come applicazione del Teorema di Bolzano-Weierstrass e dopo la definizione di sottosuccessione si dimostri:

Chiamiamo $\mathbf{T}$ la circonferenza di raggio 1 e consideriamo l'applicazione di $\mathbf{T}$ in se stesso data da $\theta_0 \to \theta_0 + k\omega$ dove $\theta_0 \in \mathbf{T}$ ed $\omega \in \mathbf{R}$ sono dati e dove k varia in $\mathbf{Z}$ (un disegno aiuta certamente la comprensione). Ciò che si ottiene è una successione $\{a_k\} = \{\theta_o + k\omega\}$ di elementi che appartengono a $\mathbf{T}$. Dimostrare (facile) che se $\frac{\omega}{2\pi} \in \mathbf{Q}$ allora l'insieme $A = \{\theta \in \mathbf{T} | \theta = \theta_0 + k\omega, k \in \mathbf{Z}\}$ è costituito da un insieme finito di punti (comunemente detto "orbita periodica"). Viceversa se $\frac{\omega}{2\pi} \notin \mathbf{Q}$ allora l'insieme A è costituito da un insieme infinito di punti e per giunta è denso(1.3) in $\mathbf{T}$ (comunemente detto "orbita quasi-periodica")

9.3*** Sia data la successione a_n costituita dalle prime cifre del numero 2^n ossia
$\{a_n\} = 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4, 8, 1, \ldots$. Sapendo che $\log_{10} 2$ è un numero irrazionale ed usando in modo opportuno il risultato dell'esercizio precedente dimostrare che ogni cifra, zero esclusa, compare nella successione. Si ha qualche ragionevole motivo per ritenere che il numero 7 compaia con più frequenza del numero 8?(2.3)

(1.3) La definizione di densità a cui si fa riferimento è quella contenuta *a pagina 32 del libro di testo* e relativa alla densità di $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{R}$. Trasponendo al nostro caso bisogna pensare che $\mathbf{R}$ è $\mathbf{T}$ mentre $\mathbf{Q}$ è $\mathbf{A}$. In questo caso, essendo $\mathbf{T}$ privo di punti isolati, tale definizione è equivalente a quella contenuta a *pag.114 del libro di testo*

(2.3) Questo esercizio è tratto dal libro di V.I.Arnold *Equazioni Differenziali Ordinarie*, Edizioni Mir pag.182. Anche se il libro tratta argomenti superiori, problemi come i due precedenti richiedono concetti che sono alla portata di

10.3 Dire se convergono le seguenti successioni
$a_n = n^{\frac{1}{n^2}}(n+1)^{\frac{1}{(n+1)^2}}(n+2)^{\frac{1}{(n+2)^2}}\dots(2n)^{\frac{1}{(2n)^2}}$,
$a_n = n^{\frac{1}{n+\ln^a n}}(n+1)^{\frac{1}{(n+1)+\ln^a(n+1)}}(n+2)^{\frac{1}{(n+2)+\ln^a(n+2)}}\dots(2n)^{\frac{1}{(2n)+\ln^a(2n)}}, \quad a \in \mathbf{R}^+$
$a_n = n^{\frac{1}{n\ln n}}(n+1)^{\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}}(n+2)^{\frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}}\dots(2n)^{\frac{1}{(2n)\ln(2n)}}$

11.3 Si definisce permutazione di $\mathbf{N}$ una applicazione iniettiva e suriettiva di $\mathbf{N}$ in se stesso ossia $P(k)$: $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ tale che $k \neq h \Rightarrow P(k) \neq P(h)$ ed inoltre $Im\ P = \mathbf{N}$. Se a_k è una successione, indichiamo con $a_{P(1)}, a_{P(2)}, a_{P(3)}, \dots, a_{P(k)}$ la permutazione della successione secondo la applicazione $k \to P(k)$. Dimostrare che se una successione è convergente ogni sua permutazione converge allo stesso limite. Segue la convergenza di una successione dalla convergenza di una sua permutazione? Se non è vero dare un esempio che evidenzi ciò.

Data la successione $\{a_n\}$ si definiscono due nuove successioni a partire da $\{a_n\}$, $b_{_N} = \sup_{n\geq N} a_n$ e $c_{_N} = \inf_{n\geq N} a_n$[(3.3)] *Si definisce "limite superiore della successione a_n" (in $\mathbf{R}^*$) e si indica con* $\limsup a_n$ *oppure con* $\overline{\lim} a_n$, *la quantità* $\inf_{_N} b_{_N}$. *Inoltre si definisce "limite inferiore della successione a_n" (sempre in $\mathbf{R}^*$) e si indica con* $\liminf a_n$ *oppure con* $\underline{\lim} a_n$, *la quantità* $\sup_{_N} b_{_N}$.
Tali definizioni di $\limsup a_n$ e $\liminf a_n$ sono per semplicità indicate con $def1$. Si può dare una seconda definizione che consiste in: data $\{a_n\}$, se esiste un numero α tale che esiste una sottosuccessione $\{a_{n_k}\} \subset \{a_n\}$ che converge ad α ed ogni altra sottosuccesione $\{a_{n'_k}\}$ converge ad un numero non superiore ad α allora α è detto "limite superiore di a_n". La definizione di "limite inferiore di a_n" procede analogamente ossia β è limite inferiore di a_n se esiste una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ che converge ad β ed ogni altra sottosuccesione $\{a_{n'_k}\}$ converge ad un numero non inferiore a β. Questa seconda definizione è detta $def2$.

12.3 Dimostrare che $def1$ e $def2$ sono equivalenti

13.3 Dimostrare che se una successione $\{a_n\}$ converge in $\mathbf{R}^*$ allora $\limsup a_n = \liminf a_n = \lim a_n$ e che viceversa se $\limsup a_n = \liminf a_n$ allora la successione converge ed il suo limite coincide con il limite superiore (che è uguale al limite inferiore).

14.3 Si dimostri che in $\mathbf{R}^*$ le successioni $b_{_N}$ e $c_{_N}$ ammettono sempre limite e che se a_n è limitata superiormente allora $\overline{\lim} a_n$ è finito mentre se a_n è limitata inferiormente allora $\underline{\lim} a_n$ è finito. Dare un esempio di successione per la quale $\underline{\lim} a_n \neq \overline{\lim} a_n$ (e che chiaramente non converge).

15.3 Date due successioni a_n e b_n si dimostri che $\underline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n \leq \overline{\lim}(a_n+b_n) \leq \overline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n$ e $\underline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n \geq \underline{\lim}(a_n+b_n) \geq \underline{\lim} a_n + \underline{\lim} b_n$. Dare almeno un esempio in cui le disuguaglianze sono strette.

16.3 Dimostrare che se una successione a_n è convergente allora per ogni successione b_n si ha $\overline{\lim}(a_n+b_n) = \overline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n$

17.3 Data una successione a_n, se per ogni successione b_n si ha $\overline{\lim}(a_n+b_n) = \overline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n$ allora a_n converge.

18.3 Dimostrare che se $\overline{\lim} a_n \geq 0$ e $\overline{\lim} b_n \geq 0$ allora $\overline{\lim}(a_n b_n) \leq \overline{\lim} a_n \overline{\lim} b_n$ ed indicare

---

studenti del primo anno di corso. Lo stesso problema può trovarsi anche a pag. 282 del libro *Metodi matematici della meccanica classica* Editori Riuniti dello stesso autore. La dimostrazione dell'esercizio precedente può ritrovarsi nel libro di V.I.Arnold – A.Avez *Ergodic Problems of Classical Mechanics* Addison–Wesley Publishing Company pag.115 (The Jacobi Theorem)

[(3.3)] A volte vengono omesse le parentesi graffe per indicare le successioni almeno un esempio in cui la disuguaglianza è stretta. Dimostrare inoltre che se a_n converge allora $\overline{\lim} a_n b_n = \overline{\lim} a_n \overline{\lim} b_n$.

19.3 È data la successione $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = \frac{1}{2}(a+b), \ldots, a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$. Si trovi $\lim_{n\to+\infty} a_n$ (4.3)

20.3 Sia $\alpha > 0$, $a_o > 0$, e $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{\alpha}{a_n})$. Dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{\alpha}$

21.3 Siano $a > 0$ e $b > 0$; poniamo $x_1 = a$, $y_1 = b, \ldots, x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$, $y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$. Dimostrare che i numeri x_n e y_n hanno limite comune.

22.3 Siano dati i numeri $p_i > 0$ $i = 1, \ldots, m$ e sia $\max\{p_1, \ldots, p_m\} = p_1$.
Allora $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\sum_{k=1}^m p_k^n} = p_1$

23.3** Dati due sottoinsiemi A e B di $\mathbf{R}$ si definisce $A + B = \{z \in \mathbf{R} \mid z = x + x',\ x \in A,\ x' \in B\}$. Dimostrare o confutare attraverso un controesempio le seguenti affermazioni:
1) Se A è aperto allora $A + B$ è aperto 2) Se A è chiuso e B è compatto allora $A + B$ è chiuso 3) Se A è compatto e B è compatto allora $A + B$ è compatto 4) Se A è chiuso e B è chiuso allora $A + B$ è chiuso (5.3)

24.3* Dimostrare che la proprietà dei numeri reali contenuta nel `Teorema 1.2 pag.30` (completezza) è equivalente al `Teorema 4.19 pag.180`

25.3*** Dimostrare che non esiste una funzione $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ tale che $(f \circ f)(n) = n + 1987$ (6.3)

26.3* Si definisca la successione $\{S_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$. Si dimostri che la successione converge al numero $e = \lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$

27.3 Dato un insieme $A \subset \mathbf{R}^n$, si dica se in generale A' è chiuso, aperto, né chiuso né aperto

28.3 Dato un insieme $A \subset \mathbf{R}$ si definisca per induzione l'insieme $A^{(n)}$ come il derivato dell'insieme $A^{(n-1)}$. Si dia un esempio di insieme per il quale $A^{(n)} = \emptyset$ ma $A^{(n-1)} \neq \emptyset$ (si intende $A' \stackrel{\text{def}}{=} A^{(1)}$)

29.3 Dimostrare oppure confutare con un controesempio l'affermazione per cui se A è numerabile allora A' è numerabile.

30.3 Quale dei seguenti insiemi può essere il derivato di un altro insieme?
$A_1 = (0, 1)$, $A_2 = [0, 1]$, $A_3 = [0, 1] \cup \{2\}$, $A_4 = \mathbf{R}$

31.3 Dimostrare che è numerabile un insieme per il quale $A^{(n)}$ è numerabile per un dato n

32.3 Si dice *punto di condensazione* di un insieme non numerabile A un punto (non necessariamente appartenente ad A) tale che ogni suo intorno contiene una quantità non numerabile di punti di A. Dimostrare che ogni insieme non numerabile A ha dei punti di condensazione; più precisamente tutti i suoi punti sono di condensazione tranne al più una quantità numerabile di punti.

(4.3) La soluzione è stata trovata attraverso l'uso dell'algebra lineare

(5.3) si veda l'esercizio N.25 pag.102 del libro "W.Rudin: *The principle of mathematical analysis* third edition McGraw–Hill Book Company"

(6.3) Questo problema è stato dato alle olimpiadi internazionali di matematica svoltesi a Cuba nel 1987

33.3** Dato $E = \{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathbf{R}$ si dica chi è l'insieme $\cap_{k\geq 1} \cup_{n\geq k} (x_n - \frac{1}{k}, x_n + \frac{1}{k})$ e l'insieme l'insieme $\cap_{k\geq 1} \cup_{n\geq 1} (x_n - \frac{1}{k}, x_n + \frac{1}{k})$

34.3* Data una qualsiasi successione di numeri positivi $\{a_k\}$ si ha: se $\lim \frac{a_{k+1}}{a_k}$ esiste allora esiste $\lim a_k^{1/k}$ e $\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim a_k^{1/k}$. Dare un esempio in cui esiste $\lim \frac{a_{k+1}}{a_k}$ ma non esiste $\lim a_k^{1/k}$ Dimostrare che $\underline{\lim}\ \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \underline{\lim}\ a_k^{1/k}$, $\ \overline{\lim}\ a_k^{1/k} \leq \overline{\lim}\ \frac{a_{k+1}}{a_k}$

35.3 Sia $\{a_k\}$ una successione crescente ossia $a_k > a_{k+1}$ e sia C un sottoinsieme compatto di $\mathbf{R}$ tale che $\sin(a_k x) \to 0$ per ogni $x \in C$. Ad esempio si prenda $C = \{1\}$ e $a_k = k\pi$. Dimostrare che la convergenza di $\{a_k x\}$ è uniforme oppure trovare un controesempio [da G.Shapiro *On a Convergence Problem*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol.6, No.6. (Dec.,1955),p.910]

SOLUZIONI

§3

1.3 $L = 1$, $L = 0$, $L = 3$, $L = 0$ **2.3** $L = +\infty$ se $\alpha > 2$, $L = 2$ se $\alpha = 2$, $L = 1$ se $0 \leq \alpha < 2$, $L = 0$, $L = 0$, se $\alpha > \frac{1}{2}$, $L = 1$, se $\alpha = \frac{1}{2}$, $L = +\infty$, se $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$. **3.3** $L = 1$, $L = +\infty$, $L = 1$ **4.3** $L = 0$, $L = 2$, $L = 1$ **5.3** $L = 2$, $L = 0$, $L = 1$, $L = \sqrt{2}$, $L = \frac{1}{\sqrt{2}}$ **10.3** $L = 1$, $L = +\infty$ $\sqrt{e} \leq L \leq e$ **11.3** Si **14.3** $a_n = (-)^n$ **15.3** Per quanto riguarda la prima parte dell'esercizio si prenda $a_n = (-)^n$ mentre $b_n = n - 2[\frac{n}{2}]$. Si ha $\underline{\lim} a_n = -1$, $\overline{\lim} a_n = +1$, $\underline{\lim} b_n = 0$, $\overline{\lim} b_n = +1$, da cui le disuguaglianze strette $(0 < 1 < 2)$. Per la seconda parte si prenda $b_n = (-)^n$ mentre $a_n = n - 2[\frac{n}{2}]$ $(1 > 0 > -1)$. **18.3** $a_n = (-)^n$ $b_n = (-)^{n+1}$ **19.3** $L = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b$, **23.3**** 1) 2) e 3) sono vere. 4) è falsa. Si prenda ad esempio $A = \{-k\}$ e $B = \{k + \frac{1}{2k}\}$ dove $k \in \mathbf{N}\setminus\{0\}$ **27.3** A' è chiuso **28.3** $A = \{\frac{1}{n}\}$ per cui $A' = \{0\}$ e quindi $A^{(2)} = \emptyset$ **29.3** È falsa. Ad esempio $A = \mathbf{Q}$ è numerabile ma $\mathbf{Q}' = \mathbf{R}$ che certamente è non numerabile. **30.3** A_2, A_3, A_4. A_2 è il derivato di se stesso, A_3 è il derivato, ad esempio, dell'insieme $A_3 \cup \{2 + \frac{1}{n}\}$ mentre A_4 è il derivato di $\mathbf{Q}$. A_1 non è chiuso e quindi non può essere il derivato di nulla. **33.3**** Il primo è E' ossia l'insieme dei punti di accumulazione ed il secondo è E' più l'insieme dei punti isolati di E.

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

1.3 - Primo del gruppo - Trasformando la successione nel seguente modo si ha $a_n = \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}$ e mandando n all'infinito si capisce che il limite molto probabilmente è uno. Ora impostiamo i calcoli per dimostrare che effettivamente il limite della successione fa uno. *Come si può constatare, concettualmente i passaggi sono due: il primo consiste nel "capire quale deve essere il risultato" ed il secondo nel dimostrare che il risultato è effettivamente quello che si è in un primo momento capito.* Nella pratica della risoluzione degli esercizi, accade quasi sempre così ossia prima si individua il risultato (che a questo livello è una congettura) e poi si dimostra che la congettura è vera. Non bisogna pensare che il secondo passaggio sia superfluo perché troppo spesso l'intuito che si applica nel capire quale risultato aspettarsi da un esercizio conduce all'errore.

Dunque dobbaimo far vedere che $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon\ t.c.\ n > n_\varepsilon \Rightarrow |\frac{n^2}{1+n^2} - 1| < \varepsilon$. Quest'ultima disequazione che ha per incognita numeri interi diventa $\frac{1}{1+n^2} < \varepsilon$ ossia $n^2\varepsilon + \varepsilon > 1$. Ora se $\varepsilon > 1$ allora è vera per ogni intero n e quindi $n_\varepsilon = 0$. Se viceversa $\varepsilon < 1$ allora la disequazione è verifcata per $n > \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}} \doteq N(\varepsilon)$ e quindi $n_\varepsilon = [N(\varepsilon)]$. Notare che se nella definizione di limite si prendesse $n \geq n_\varepsilon$ allora n_ε sarebbe uguale a $1 + [N(\varepsilon)]$.

1.3 - Secondo del gruppo - $a_n = -\frac{2n+1}{n(n+1)} = -\frac{2n+1}{n}\frac{1}{n+1}$ e $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n} = 2$ mentre $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$. Applicando il `Teorema 4.4` iii) opportunamente riscritto per le successioni si ha che $L = 0$.

1.3 - Terzo del gruppo - $a_n = \exp(\frac{1}{n}\ln(3^n(1+(\frac{2}{3})^n)))$ e quindi $a_n = \exp(\frac{1}{n}(n\ln 3 + \ln(1+(\frac{2}{3})^n))) = \exp(\ln 3 + \frac{1}{n}\ln(1+(\frac{2}{3})^n))$ e nel limite si ha $L = 3$. Troviamo ora ν_ε.
Primo passo: $\lim_{n\to+\infty} e^{q(n)} = e^q$. $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu_\varepsilon\ t.c.\ n > \nu_\varepsilon \Rightarrow |e^{q(n)} - e^q| < \varepsilon$. Nel nostro caso $q(n) = \ln 3 + \frac{1}{n}\ln(1+(\frac{2}{3})^n),\quad q = \ln 3$ e $e^{q(n)} > e^q$.
$e^{q(n)} - e^q = 3(e^{\frac{1}{n}\ln(1+(\frac{2}{3})^n))} - 1) = 3(e^{p(n)} - 1) < \varepsilon$ implica che $0 < p(n) < \ln(1+\frac{\varepsilon}{3})$ e dunque bisogna verificare quest'ultima relazione. $p(n) = \frac{1}{n}\ln(1+(\frac{2}{3})^n))$ ed essendo $(\frac{2}{3})^n \le 1$ si ha $p(n) \le \frac{1}{n}\ln 2$ dato che $\ln n$ è crescente in n. Basta dunque che $\frac{1}{n}\ln 2 \le \frac{\ln(1+\varepsilon}{3})$ ossia $n > \frac{\ln 2}{\ln(1+\frac{\varepsilon}{3})}$. Alla fine si ha $\nu_\varepsilon = \left[\frac{\ln 2}{\ln(1+\frac{\varepsilon}{3})}\right]$

1.3 - Quarto del gruppo - Bisogna razionalizzare la frazione ottenendo $|\frac{(\sqrt{n-1}-\sqrt{n})(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}| = \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$ e quindi risolvere la disequazione $\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} < \varepsilon$ ossia $\sqrt{n-1}+\sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon}$. Un minimo di algebra dà $2\sqrt{n^2+n} > \frac{1}{\varepsilon} - 2n - 1$. Ora separiamo i due casi $\varepsilon > 1$ e $\varepsilon < 1$. Nel primo caso $\frac{1}{\varepsilon} - 2n - 1 < -2n$ e quindi, essendo negativo la disequazione è certamente verificata per ogni intero ≥ 1 per cui $n_\varepsilon = 0$. Ora consideriamo il secondo caso ossia $\varepsilon < 1$ ma $\frac{1}{\varepsilon} - 2n - 1 < 0$ per cui $n > \frac{1}{2}(\frac{1}{\varepsilon} - 1)$. La disequazione è certamente verificata per ogni intero maggiore di $N_1(\varepsilon) = [\frac{1}{2}(\frac{1}{\varepsilon} - 1)]$. Riunendo si ha $N(\varepsilon) = 0$ per $\varepsilon > 1$, $n_\varepsilon = N_1(\varepsilon)$ per $\varepsilon < 1$. Come si vede è necessario un minimo di lavoro per arrivare alla conclusione. Riprendiamo ora dalla disequazione $\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} < \varepsilon$ e scriviamo $\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} \le \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$. Se risolvessimo quest'ultima disequazione otterremmo $\hat{N}(\varepsilon) = [\frac{1}{\varepsilon^2}] \ge N(\varepsilon)$ per ogni valore di ε. La lezione che si trae da tale esempio è che a volte, maggiorando opportunamente, si hanno da fare dei conti molto più facili anche se, di n_ε, si ottiene una stima al posto del valore esatto.

2.3 - Primo del gruppo - Ricordando che $\sum_{k=1}^n k = \frac{n^2+n}{2}$ si ha $a_n = \frac{2n^\alpha}{n^2+n}$. Se $\alpha > 2$, essendo $a_n \ge \frac{2n^\alpha}{2n^2}$, la successione diverge a $+\infty$. Se $\alpha = 2$ la minorazione, pur essendo ugualmente valida non ci dice alcunché circa la convergenza. Possiamo operare facendo $a_n = \frac{2}{1+\frac{1}{n}}$ il cui limite è 2. Se $\alpha < 2$ allora $0 \le a_n \le \frac{n^\alpha}{n^2}$ ed il limite è zero.

2.3 - Secondo del gruppo - $a_n = \frac{2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}} = \frac{2n}{n(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}})}$ il cui limite è $L = 1$

2.3 - Terzo del gruppo - Essendo α positivo, $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \sin\frac{1}{n^\alpha} = 1$ e quindi si può scrivere $a_n = n^{\frac{1}{2}-\alpha} n^\alpha \sin\frac{1}{n^\alpha}$ il cui limite è $L = 0$ se $\alpha > \frac{1}{2}$, $L = 1$ se $\alpha = \frac{1}{2}$, e $L = +\infty$ se $\alpha < \frac{1}{2}$.

3.3 - Primo del gruppo - È sbagliato dire che il limite fa 0 in quanto $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}k^{\frac{1}{k}} = 0$ per ogni k. In questo caso infatti si applica erroneamente il teorema: *La somma dei limiti è uguale al limite della sommma.* La parola *somma* che compare nel teorema si riferisce ad una somma finita di funzioni ossia ad una somma di un numero determinato fin dall'inizio di funzioni. Viceversa nell'esercizio il numero di funzioni a cui si voule (erroneamente) applicare il teorema tende a più infinito per $n \to +\infty$. Il teorema citato dunque non può essere applicato ed infatti il limite è 1. La dimostrazione procede nel seguente modo: si dimostra che se a_n è una successione che tende ad un limite l allora $b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k$ tende anche essa allo stesso limite (chiaramente b_n è un'altra successione diversa dalla precedente). Per ipotesi $\forall\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che $n > n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$. Vogliamo far vedere che $\forall\ \varepsilon_1 > 0\ \exists\ N_{\varepsilon_1}\ t.c.\ n > N_{\varepsilon_1} \Rightarrow |b_n - l| < \varepsilon_1$.
Ora $b_n - l = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n(a_k - l) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_\varepsilon}(a_k - l) + \frac{1}{n}\sum_{k=n_\varepsilon+1}^n(a_k - l)$ (n_ε è esttamente quello che compare nel limite di a_n). $|b_n - l| \le \max_{1\le k\le n_\varepsilon}|a_k - l|\frac{n_\varepsilon}{n} + \varepsilon\frac{n-n_\varepsilon}{n}$. Se indichiamo con

$M_\varepsilon = \max_{1\le k\le n_\varepsilon} |a_k - l|$ abbiamo $|b_n - l| < \frac{M_\varepsilon n_\varepsilon}{n} + \varepsilon$ e vogliamo che sia $\frac{M_\varepsilon n_\varepsilon}{n} + \varepsilon < \varepsilon_1$. Dato quindi ε_1 prendiamo $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{4}$. Inoltre sia n tale che $\frac{M_{\frac{\varepsilon_1}{4}} n_{\frac{\varepsilon_1}{4}}}{n} \le \frac{\varepsilon_1}{4}$ ossia $n > \frac{4}{\varepsilon_1} M_{\frac{\varepsilon_1}{4}} n_{\frac{\varepsilon_1}{4}}$. In questo modo abbiamo $|b_n - l| \le \frac{\varepsilon_1}{2} < \varepsilon_1$ e $N_{\varepsilon_1} = \left[\frac{4}{\varepsilon_1} M_{\frac{\varepsilon_1}{4}} n_{\frac{\varepsilon_1}{4}}\right]$

3.3 - Secondo del gruppo - In questo caso è sbagliato usare il teorema secondo cui *Il prodotto dei limiti è uguale al limite del prodotto* e le regioni sono le stesse di prima. Usando erroneamente il teorema si sarebbe indotti a dire che il limite è 1 mentre è $+\infty$. In questo caso basta far vedere per induzione che $k^{\frac{1}{k}} > (k+1)^{\frac{1}{k+1}}$ se $k \ge 3$. Infatti la disuguaglianza da dimostrare si riduce facilmente a $k \ge (1+\frac{1}{k})^k$ ed essendo $(1+\frac{1}{k})^k \le 3$ segue il risultato. Orbene possiamo scrivere $a_n > n(2n)^{\frac{1}{2n}}$ e quindi il limite diverge a più infinito. La relazione $k \ge (1+\frac{1}{k})^k$ segue da $k^{\frac{1}{k}} > (k+1)^{\frac{1}{k+1}}$ dopo avere elevato a sinistra e a destra alle potenze k e $k+1$ ed avere ottenuto quindi $k^{k+1} \ge (k+1)^k$.

3.3 - Terzo del gruppo - Scrivendo $\frac{1}{k(k-1)} = -\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1}$ si ottiene $a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ e dunque il limite è $L = \frac{1}{2}$.

4.3 - Primo del gruppo - La successione si può riscrivere come $a_n = \sin[2\pi n(\sqrt{1+n^{-\frac{3}{2}}} - 1 + 1)] =$
$= \sin 2\pi n \cos[2\pi n(\sqrt{1+n^{-\frac{3}{2}}} - 1)] + \cos 2\pi n \sin[2\pi n(\sqrt{1+n^{-\frac{3}{2}}} - 1)]$
e quindi $\sin[2\pi n(\sqrt{1+n^{-\frac{3}{2}}} - 1)]$. Inoltre si ha $|\sin[2\pi n(\sqrt{1+n^{-\frac{3}{2}}} - 1)]| \le 2\pi n(\sqrt{1+n^{-\frac{3}{2}}} - 1) =$ $\frac{2\pi n^{-\frac{1}{2}}}{1+\sqrt{1+n^{-\frac{3}{2}}}} \le 2\pi n^{-\frac{1}{2}} < \varepsilon$ e quindi $\nu_\varepsilon = \left(\frac{2\pi}{\varepsilon}\right)^2$ (chiaramente è una stima)

4.3 - Secondo del gruppo - Il denominatore è $\frac{1}{2}n(n+1)$ mentre il numeratore è $(2n+1)(n+1) - n(n+1)$ (sommare i numeri pari compresi fra 2 e $2n\ldots$) per cui si ottiene $a_n = \frac{(n+1)}{\frac{1}{2}n}$ per cui $L = 2$

4.3 - Terzo del gruppo - $a_n = \left((1+\frac{3}{n^2+n^4})^{n^2+n^4}\right)^{\frac{n}{n^2+n^4}}$ e nel limite si ottiene $e^{3\frac{n}{n^2+n^4}}$ da cui $L = 1$

5.3 - Primo del gruppo - Dimostriamo che $a_n < 2$ per ogni n. Si usa l'induzione: $a_o = 1$. Supponiamo ora che $a_n < 2$; $a_{n+1}^2 = 2 + a_n < 4$ e quindi $a_{n+1} < 2$. Da ciò segue che 2 è un maggiorante della successione. Facciamo vedere ora che la successione è monotona crescente per $a_n < 2$. Infatti la condizione di essere monotona crescente è data da $2 + a_n > a_n^2$ che è vera esattamente per $-1 < a_n < 2$. Quindi la successione converge all'estremo superiore che certamente esiste essendo limitata. Sia L tale estremo (per ora sconosciuto). Nel limite $n \to \infty$ deve aversi $L = \sqrt{2+L}$ da cui segue $L = 2$ come unica radice accettabile della equazione in L. È abbastanza chiaro che per verificare se la successione abbia una qualche possibilità di convergere si imposta subito il conto che abbiamo fatto per ultimo. Infatti se l'equazione $L = \sqrt{2+L}$ non ammettesse radici reali allora certamente la successione non potrebbe convergere.

5.3 - Secondo del gruppo - Si ripete pari pari lo stesso argomento di prima solo che ora bisogna dimostrare che la successione è monotona decrescente limitata inferiormente. Infatti per induzione dimostriamo che $c_n \ge 0$ per ogni n. Supponiamo che $c_o = 1$, e $c_n > 0$; $c_{n+1} = \arctan c_n > 0$ e quindi ogni elemento della succesione è positivo. Che la successione è monotona decrescente deriva dal fatto che $\arctan c_n < c_n$ e quindi converge all'inf che esiste. Per sapere chi è il limite ossia l'inf basta fare $L = \arctan L$ che ha come unica soluzione $L = 0$.

5.3 - Terzo del gruppo - Per induzione si dimostra che b_n è positiva per ogni n e monotona crescente. Infatti se $b_n > 0$ allora $b_n^{b_n}$ anchésso è positivo e poiché $b_o = \frac{1}{4}$ allora $b_n > 0$ per ogni

n. Per quel che riguarda la monotonia si ha che $b_n^{b_n} > b_n$ se e solo se $(b_n - 1)\ln b_n > 0$ e questo è vero, essendo $\ln x < 0$ per $0 < x < 1$, per ogni b_n. Dunque essendo b_n monotona crescente ci basta far vedere che è limitata. Anche questo si ottiene per induzione in quanto $b_n^{b_n} < 1$ è equivalente a $b_n \ln b_n < 0$ e quindi se $b_n < 1$ si ha il risultato. Essendo $b_o < 1$ la successione è limitata. A questo punto sappiamo che converge e per trovare il limite basta fare $L^L = L$ ossia $(L-1)\ln L = 0$ solamente per $L = 1$.

5.3 - Quarto del gruppo - Innanzitutto verifichiamo che la equazione $L = \frac{L}{2} + \frac{1}{L}$ ammette le soluzioni $L = \pm\sqrt{2}$. $x_1 = \frac{3}{2} > \sqrt{2}$ per cui la successione potrebbe essere monotona decrescente (per lo meno definitivamente). La disequazione $x_{k+1} < x_k$ diventa $\frac{1}{x_k} < \frac{1}{2}x_k$ ossia $x_k^2 > 2$. A questo punto procediamo per induzione ossia dimostriamo che $x_k^2 > 2$ per ogni k. Chiaramente si ha $x_1^2 > 2$. Usando la definizione $x_k^2 > 2$ diventa $\frac{(x_{k-1}^2-2)^2}{4x_{k-1}^2} > 0$ che è vera per ipotesi induttiva. Dunque la successione è monotona decrescente e quindi converge essendo limitata dal basso.

6.3 - Primo del gruppo - Basta dimostrare che esistono due sottosuccessioni per le quali i limiti esistono ma sono diversi. Sia $n_k = 2k+1$ e $m_k = 4k$; $a_{n_k} \equiv 1$ mentre $a_{m_k} = 1 + \frac{k}{k+1} \to 2$ e quindi la successione non può ammettere limite.

6.3 - Secondo del gruppo - Vale lo stesso discorso di prima dove $n_k = 2k$ e $m_k = 2k+1$. $a_{n_k} = \frac{1}{2k} \to 0$ mentre $a_{m_k} = 1 + \frac{-1}{2k+1} \to 1$

7.3 Scrivendo $a_n \doteq 0,999\ldots$ (n volte 9) come $\sum_{k=1}^n \frac{9}{(10)^k} = \sum_{k=0}^n \frac{9}{(10)^k} - 9$ ed applicando la formula da dimostrarsi per induzione $\sum_{k=0}^n x^k = (1-x^{n+1})(1-x)^{-1}$, si ha $0,999\ldots = 9(1-\frac{1}{10^{n+1}})(1-\frac{1}{10})^{-1} - 9 = a_n$. Ora mandiamo n all'infinito ottenendo $\frac{9}{1-\frac{1}{10}} - 9 = 1$ che è il risultato. Come detto c'è un secondo modo. Consiste nel verificare che a_n è una successione monotona crescente limitata e quindi converge al suo estremo superiore (che certamente esiste per la completezza dei numeri reali); a questo punto non rimane che far vedere come l'estremo superiore sia dato dal numero 1.
Che a_n sia monotona crescente ($a_n < a_{n+1}$) e limitata ($a_n < 1$ ma anche $a_n < 2$ e così via) è ovvio. Dimostriamo che da ciò segue la convergenza al $\sup\{a_n\}$ che chiameremo s per ora. Per definizione di sup, $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon$ *t.c.* $s - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \le s$. Ma allora, data la monotonia di a_n, per tutte gli interi $n > n_\varepsilon$ si ha $s - \varepsilon < a_n < s$ che è esattamente la definizione di esistenza del limite della successione. Non rimane che mostrare che 1 è il $\sup\{a_n\}$. Si dimostra per assurdo. Supponiamo che il sup sia un numero $s < 1$ tale che $1 - s = \delta > 0$. Ciò implica che $a_n < s$ per ogni n. Si cade in contraddizione non appena si mostra che la distanza fra a_n e 1 può essere resa piccola a piacere (in particolare più piccola di δ) a patto di prendere n sufficientemente grande. Infatti $1 - a_n = \frac{9}{10^{n+1}} + \frac{9}{10^{n+2}} + \frac{9}{10^{n+3}} + \ldots\ldots < \frac{9}{10^n}$ e quest'ultima è per l'appunto una quantità che con n grande diventa piccola quanto si vuole.

8.3 L'insieme dei punti della circonferenza toccati dalla successione a_k è detto "orbita". Se ω è razionale rispetto a 2π ossia $\omega = 2\pi\frac{p}{q}$ l'orbita è detta periodica poiché dopo q iterate si ha $a_q = \theta_o + 2\pi p$ che è come dire che il punto è tornato al punto di partenza. Viceversa se ω è irrazionale rispetto a 2π ossia $\frac{\omega}{2\pi} \in \mathbf{Q}^c$ allora l'orbita non torna mai al punto iniziale ed in generale non tocca mai un punto della circonferenza più di una volta. In tal caso l'orbita è detta quasi-periodica ed il motivo della denominazione sta nel fatto che essendo l'orbita densa sulla circonferenza essa passa vicino ad ogni punto tanto quanto si vuole "quasi da essere periodica". Oltre alla applicazione del teotema di Bolzano-Weierstrass ed alla applicazione fatta nell'esercizio successivo, tale problema è il più semplice che si possa pensare nella famiglia dei problemi cosiddetti dei "moti quasi-periodici". Non è certo questa la sede per approfondire (sia pure molto superficialmente) tale questione. È utile però dire che la "teoria dei moti quasi-periodici" è fonte di attiva ricerca matematica applicata e non. Inoltre, volendo enunciare almeno un argomento dove trova la sua naturale applicazione si può dire che la teoria dei moti planetari poggia letteralmente sulle teoria dei moti quasi periodici che scaturiscono dalle equazioni differenziali della gravitazione universale di Newton.

Dimostrazione Con $\frac{\omega}{2\pi}$ irrazionale la successione a_n costituisce un insieme infinito ed ovviamente limitato in $\mathbf{R}^2$ e quindi per il teorema di Bolzano-Weierstrass ammette un punto di accumulazione che indichiamo con p. Ciò implica che esiste una sottosuccessione a_{n_k} convergente a p (si ricordi che dire che una successione ammette un punto di accumulazione, diciamo p, non implica che la succesione converga a p. Ovviamente se converge, p è anche l'unico punto di accumulazione ma non il viceversa). Dunque $\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = p$ e quindi segue che $\forall\ \varepsilon > 0$ esiste k_ε tale che se $k > k_\varepsilon$ e $k' > k_\varepsilon$ si ha $|a_{n_k} - a_{n_{k'}}| < \varepsilon$. Fissiamo ora $k_o > k_\varepsilon$, $k_1 > k_\varepsilon$ e consideriamo una nuova successione data da $b_N = \theta_o + (a_{n_{k_o}} - a_{n_{k_1}})N = \theta_o + N\omega(n_{k_o} - n_{k_1})$. Per costruzione $|b_N - b_{N+1}| < \varepsilon$ e questo implica che la successione b_N verifica la proprietà $a < b_{N(a,b)} < b$ per un qualche $N(a,b)$ non appena $b - a \geq \varepsilon$. Se si prende ε più piccolo bisogna prendere due diversi k_o e k_1 ma in ogni caso si ottiene lo stesso risultato. Ora poiché la successione b_N è una sottosuccessione della successione originaria a_n ne consegue che a_n è densa sulla circonferenza.

9.3 Il numero 2^n comincia con 7 se e solo se esiste un intero N tale che $7\cdot 10^N \leq 2^n < 8\cdot 10^N$ (naturalmente N cambia con n). Definiamo ora un nuovo insieme detto delle *classi di equivalenza*: sia $[x] \doteq \{x' \in \mathbf{R}|\ \exists k \in \mathbf{Z}\ t.c.\ x' = x + k,\ \ x \in [0,1]\}$; $[x]$ è detta *classe di equivalenza di x*. La sua corrispondenza con $\mathbf{R}$ non è certamente 1-ad-1 nel senso che ad ogni punto di $\mathbf{R}$ certamente corrisponde un solo punto nell'insieme delle classi di equivalenza ma ad ogni punto del nuovo insieme corrispondono infiniti punti di $\mathbf{R}$. L'insieme delle classi di equivalenza ora descritto si indica con $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ ed i suoi punti sono in corrispondenza biunivoca con i punti della circonferenza di raggio $\frac{1}{2\pi}$. Infatti il punto della circonferenza di angolo misurato in radianti θ_o corrisponde agli infiniti punti (tutti aventi la stessa posizione sulla circonferenza) che hanno angolo $\theta_o + 2\pi k$ per un qualche intero k. I concetti e definizioni espresse nelle poche righe precedenti sono molto meno astruse di quanto possa apparire al lettore neofita. Il concetto di insieme delle classi di equivalenza viene dall'esperienza quotidiana. Infatti non esiste la 25^a ora di un determinato giorno. Dopo la 24^a ora si ricomincia dalla prima e quindi si può dire che la conta delle ore è organizzata in insieme di classi che consta di 24 elementi. La prima ora, chiamiamola $1'$ del giorno successivo verifica la relazione $1' = 1 + 24$ e quindi è nella stessa classe di equivalenza della ora 1 che è la prima ora del primo giorno in cui si è cominciato a contare.

Applichiamo ora il logaritmo in base 10 alla relazione $7\cdot 10^N \leq 2^n < 8\cdot 10^N$ (ricordiamo che essendo il logaritmo una funzione crescente non cambia il verso delle disuguaglianze) ottenendo $\log 7 + N \leq n\log 2 < \log 8 + N$. Consideriamo le classi di equivalenza in $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ di $[\log 7]$ e $[\log 8]$ ossia consideriamo la circonferenza di raggio $\frac{1}{2\pi}$ e prendiamo i punti di essa che corrispondono agli archi $\log 7$ e $\log 8$. I numeri $\log 7 + N$ corrispondono, per quanto detto sulle classi di equivalenza, allo stesso punto $\log 7$ sulla circonferenza e lo stesso per $\log 8 + N$. Stesso trattamento riserviamo ai valori $n\log 2$ per cui graficamente dobbiamo immaginare che il punto $\theta_o = 0$ si muove ogni volta percorrendo un arco di circonferenza di lunghezza $\log 2$ e quindi, con riferimento all'esercizio precedente, si ha $\omega = \log 2 \ \Rightarrow\ \theta_n = n\log 2$. Assumendo ora che $\log 2$ è un numero irrazionale, la successione $\{\theta_n\}$ è densa sulla circonferenza dall'esercizio precedente (il lettore attento avrà notato che ivi era richiesto che $\frac{\omega}{2\pi}$ fosse irrazionale e non ω solamente ma non avà altresì mancato di notare che in questo caso la circonferenza è lunga 1 mentre nell'esercizio precedente 2π). Essendo la successione $\{\theta_n\}$ densa certamente entrerà infinite volte dentro l'arco di circonferenza compreso fra i punti $\log 7$ e $\log 8$ che è come dire che esistono infiniti punti del tipo 2^n la cui prima cifra comincia per 7. Tale ragionamento mostra anche come qualsiasi cifra, 0 escluso, fa parte della successione dei primi numeri di 2^n e la densità suggerisce inoltre (pur senza poterlo dimostrare) che il numero 7 compare più frequentemente del numero 8 essendo $\log 9 - \log 8 < \log 8 - \log 7$.

10.3 - Primo del gruppo - Dalla seguente relazione $n^{\frac{n+1}{4n^2}} < a_n < (2n)^{\frac{n+1}{n^2}}$, per il teorema del confronto, segue che il limite fa $L = 1$. Infatti $\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{4n}} = \lim_{n\to+\infty} \exp(\frac{n+1}{4n^2}\ln n) = 1$ ed analogamente per la maggiorazione.

10.3 - Secondo del gruppo - Si può minorare con $a_n \geq n^{\frac{n+1}{2n+\ln^a 2n}} \to +\infty$ as $n \to +\infty$. Quindi il limite non esiste per ogni a.

10.3 - Terzo del gruppo - $n^{\frac{n+1}{2n\ln 2n}} < a_n < (2n)^{\frac{n+1}{n\ln n}}$ per cui $e^{\frac{1}{2}} < a_n < e^4$. Facciamo vedere ora che la successione è monotona decrescente: $a_n \geq a_{n+1}$. Dobbiamo far vedere che $\frac{1}{n\ln n} \geq \frac{1}{(2n+1)\ln(2n+1)} + \frac{1}{(2n+2)\ln(2n+2)}$ ossia $\frac{n\ln n}{(2n+1)\ln(2n+1)} + \frac{n\ln n}{(2n+2)\ln(2n+2)} \leq \frac{1}{2}$. Dalla disuguaglianza $\frac{n\ln n}{(2n+1)\ln(2n+1)} \leq \frac{1}{2}$, conseguenza di $n^{2n} \leq (2n+1)^{2n+1}$, segue il risultato. Dunque la successione è monotona decrescente limitata inferiormente e quindi converge ad un valore L sconosciuto ma tale che $\sqrt{e} \leq L \leq e$.

10.3 - Terzo del gruppo - $\ln a_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$ e si consideri la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$. Si ha $\frac{1}{k} < \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x}$ e quindi $a_n < \sum_{k=n}^{2n} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x} = \int_{n-1}^{2n} \frac{dx}{x}$.

11.3 L'ipotesi è che $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon\ t.c.\ n > n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$ con $l \in \mathbf{R}^*$. Supponiamo ora che esista una permutazione P per cui $a_{P(k)}$ non converge a l. Dunque $\exists\ \varepsilon > 0\ t.c. \forall k\ \exists\ k_\varepsilon > k\ t.c.\ |a_{P(k_\varepsilon)} - l| \geq \varepsilon$. Considerando allora la sottosuccessione $\{a_{P(k_\varepsilon)}\} \subset \{a_n\}$ si può dire che essa non converge ad l ma questo costituisce un assurdo in virtù della convergenza della successione a_n.
La risposta alla domanda è si ossia se una permutazione dei termini di una successione converge allora converge anche la successione. Supponiamo infatti che la successione non converga al limite l cui converge la successione permutata $a_{P(k)}$. Ciò vuol dire che $\exists\ \varepsilon > 0\ t.c.\ \forall\ n\ \exists\ n_\varepsilon > n\ t.c.\ |a_{n_\varepsilon} - l| \geq \varepsilon$. Consideriamo ora una successione $\{k\}$ non limitata di interi e quindi una successione di interi $\{k_\varepsilon\}$ anch'essa non limitata (che quest'ultima sia non limitata è conseguenza della definizione di k_ε. Data $\{k_\varepsilon\}$, attraverso la permutazione $P(k)$ esiste un'altra successione $\{k'_\varepsilon\}$ tale che per ogni elemento $j \in \{k'_\varepsilon\}$ esiste ed è unico l'elemento $i \in \{k_\varepsilon\}$ tale che $P(i) = j$. Ma allora $\forall\ n\ \exists\ i_\varepsilon > n\ t.c. |a_{P(i_\varepsilon)} - l| > \varepsilon$ che è come dire che la successione permutata non converge.

12.3 Dimostriamo che $def1 \Rightarrow def2$. Se $S = +\infty$ allora $b_{N_\varepsilon} = +\infty$ e quindi $\forall\ M > 0\ \exists\ a_n\ t.c.\ n_M \geq N \wedge a_{n_M} > M$. Prendo ora una famiglia di numeri $\{M_k\}$ tale che $M_k \to +\infty$ ed in corrispondenza ad essi avrò una sottosuccessione $\{a_{n_M}\}$ di $\{a_n\}$ che converge a $+\infty$. Chiaramente ogni altra sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ se converge, converge ad un numero non superiore ad S.
Se S è il limite superiore di a_n allora per definizione $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ b_{N_\varepsilon}\ t.c.\ S \leq b_{N_\varepsilon} \leq S + \varepsilon$. Ma $b_{N_\varepsilon} = \sup_{n\geq N_\varepsilon} a_n$ e quindi per definizione $\forall\ \varepsilon^{(1)} > 0\ \exists\ \hat{N}_{\varepsilon^{(1)}}\ t.c.\ b_{N_\varepsilon} - \varepsilon^{(1)} < a_{\hat{N}_{\varepsilon^{(1)}}} \leq b_{N_\varepsilon}$. Dato ε possono accadere due cose. La prima è che $b_{N_\varepsilon} = S$. In tal caso prendiamo $\varepsilon^{(1)} = \varepsilon$ e dunque $S - \varepsilon < a_{\hat{N}_{\varepsilon^{(1)}}} \leq S$. Il secondo caso è che $b_{N_\varepsilon} > S$, $b_{N_\varepsilon} - S < \varepsilon$. In tal caso prendiamo ugualmente $\varepsilon^{(1)} = \varepsilon$ e quindi si ha ugualmente che $a_{\hat{N}_{\varepsilon^{(1)}}} - S < \varepsilon$. Se ora si prende una successione $\varepsilon_k \to 0$ si ottiene una successione $a_{\hat{N}_{\varepsilon^{(1)}}}$ che converge per costruzione ad S. Dunque abbiamo dimostrato la prima parte di $def2$ ossia che esiste una sottosuccessione di $\{a_n\}$ che converge ad S.
Supponiamo ora che esista una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ che converge ad un valore $S' > S$ ($S' - S \doteq d$). Prendiamo $\varepsilon = \frac{d}{2}$ e per ipotesi sappiamo che $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ k_\varepsilon\ t.c.\ |x_{n_{k_\varepsilon}} - S'| < \varepsilon$. Ciò implica che $x_{n_{k_\varepsilon}} - S \geq \varepsilon$. Ma allora ne segue che $b_{n_{k_\varepsilon}} - S \geq \varepsilon$ (per definizione di $\sup_{n\geq n_{k_\varepsilon}} a_n$) ma ciò è impossibile perché vorrebbe dire che l'inf della successione $\{b_N\}$ è maggiore di S e questo è in contraddizione con l'ipotesi. Di conseguenza non può aversi $S' > S$.

Dimostriamo ora che $def2 \Rightarrow def1$. È data la successione $\{a_n\}$ e supponiamo che esista una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ tale che $a_{n_k} \to S$ ed ogni altra sottosuccessione, se converge, converge ad un numero $S' \leq S$. Costruiamo b_N nel modo descritto prima. È evidente che $b_N \geq b_{N+1}$ ossia la successione $\{b_N\}$ è non crescente. Poiché vi è la convergenza di a_{n_k} $\{b_N\}$ è limitata inferiormente e quindi converge all'estremo inferioreche indichiamo con I. Dobbiamo far vedere ora che $I = S$. Supponiamo che sia $I < S$ e $S - I = d > 0$. Sia $\varepsilon = \frac{d}{2}$; per definizione di estremo inferiore esiste b_{N_ε} tale che $I \leq b_{N_\varepsilon} < I - \varepsilon$. In tal caso $I \leq a_n < I - \varepsilon \ \forall \ n > b_{N_\varepsilon}$. Ciò impedirebbe però di avere S come limite della sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$.
Supponiamo allora che $I > S$ e $I - S = d$. Per definizione di estremo inferiore $b_N \geq I$ ed inoltre $\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ N_\varepsilon \ t.c. \ b_N - \varepsilon \leq a_{N_\varepsilon} < b_N$. Se ora prendo una successione decrescente $\{\varepsilon_k\}$ tale che $\varepsilon \to 0$ e $\varepsilon_1 = \frac{d}{2}$ ottengo una sottosuccessione $\{a_{N_\varepsilon}\}$ che convergerebbe ad un numero maggiore di S (precisamente I) e ciò è in contraddizione con l'ipotesi. Ciò conclude la dimostrazione dell'esercizio.
Si ripeta l'analogo discorso che ci vuole per il limite inferiore.

13.3 Supponiamo che la successione $\{a_n\}$ converga ad un numero $L \neq \pm\infty$. Facciamo vedere che $\overline{\lim} a_n$ esiste. La convergenza di a_n implica che $\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ n_\varepsilon \ t.c. \ n > n_\varepsilon \ \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$ e quindi la successione è limitata. Ciò vuol dire che b_N è limitato per ogni N ed anche c_N è limitato per ogni N. Di conseguenza $\overline{\lim} a_n$ e $\underline{\lim} a_n$ esistono (segue dal fatto che un insieme in $\mathbf{R}$ limitato superiormente(inferiormente) ammette estremo superiore ed inferiore.
Dimostriamo ora che $\overline{\lim} a_n$ coincide con il limite della successione. Se $\overline{\lim} a_n = L' > L$ allora, per definizione di estremo inferiore, $\forall N \ b_N \geq L' > L$ e quindi, per definizione di estremo superiore, si trova un valore a_n tale che $n \geq N$ e tale che $L' \geq a_n > L' - \varepsilon$, $\varepsilon < d = \frac{1}{2}(L' - L)$. Poiché però la successione converge ad L è necessario che $|L - a_n| < \varepsilon^{(1)}$ *per ogni* $n \geq N_\varepsilon$. Prendendo $\varepsilon^{(1)} < \frac{1}{2}(L' - L)$ si cade in contraddizione.
Dunque abbiamo dimostrato che se la successione converge ad L allora $\overline{\lim} a_n = L$. Una identica dimostrazione nella forma consente di dimostrare che il $\underline{\lim} a_n$ esiste ed è uguale ad L.
Della successione $(-)^n$ chiaramente il limite superiore è 1 (dimostrarlo applicando la definizione) mentre il limite inferiore è -1.

14.3 b_N è monotona non crescente mentre c_N è monotona non decrescente e quindi convergono in $\mathbf{R}^*$. Si deve notare che $b_N > -\infty$ per ogni N mentre $c_N < +\infty$ sempre per ogni N.
Supponiamo ora che a_n è limitata superiormente ossia $S = \sup_n a_n$; è evidente che $b_N \leq S$ e quindi b_N converge ad un numero finito che non è $+\infty$. Altrettanto dicasi per c_N.

15.3 Per definizione di estremo superiore ed inferiore si ha le disuguaglianze $\sup_{n \geq N}(a_n + b_n) \geq \sup_{n \geq N} b_n + \inf_{n \geq N} a_n$ ed inoltre usando il fatto che la successione $\inf_{n \geq N} a_n$ è monotona crescente si ha $\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ N_\varepsilon \ t.c. \ N \geq N_\varepsilon \Rightarrow \inf_{n \geq N_\varepsilon} a_n > A - \varepsilon$. Da queste due disuguaglianze si ricava che $\sup_{n \geq N \geq N_\varepsilon}(a_n + b_n) \geq \sup_{n \geq N \geq N_\varepsilon} b_n + A - \varepsilon$. Ora essendo $\sup_{n \geq N}(a_n + b_n)$ una successione monotona decrescente così come $\sup_{n \geq N} b_n$ se ne ricava che $\inf_N \sup_{n \geq N}(a_n + b_n) = \inf_{N \geq N_\varepsilon} \sup_{n \geq N \geq N_\varepsilon}(a_n + b_n)$ e che $\inf_N \sup_{n \geq N} b_n = \inf_{N \geq N_\varepsilon} \sup_{n \geq N \geq N_\varepsilon} b_n$ per cui $\inf_N \sup_{n \geq N}(a_n + b_n) \geq \inf_N \sup_{n \geq N} b_n + A - \varepsilon$ e questo per ogni $\varepsilon > 0$. Se ne conclude che $\inf_N \sup_{n \geq N}(a_n + b_n) \geq \inf_N \sup_{n \geq N} b_n + \sup_N \inf_{n \geq N} a_n$ ossia la tesi.
L'altra parte dell'esercizio è lasciata allo studente/ssa diligente e volenteroso/a.

16.3 Dimostriamo che $\overline{\lim}(a_n + b_n) \geq \overline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n$ e $\overline{\lim}(a_n + b_n) \leq \overline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n$. La parte con $\leq$ è contenuta nell'esercizio precedente. Facciamo vedere solo la parte con $\geq$. Sia $L = \lim_{n \to \infty} a_n$ e quindi ci riduciamo a $\overline{\lim}(a_n + b_n) \geq L + \overline{\lim} b_n$. Dalla convergenza di a_n abbiamo che $\forall \ n \geq n_\varepsilon$ si ha $a_n + b_n \geq L - \varepsilon + b_n$ e quindi $\sup_{n \geq n_\varepsilon}(a_n + b_n) \geq L - \varepsilon + \sup_{n \geq n_\varepsilon} b_n$. Essendo $\sup_{n \geq n'} c_n$ una successione decrescente per *qualsiasi* successione $\{c_n\}$ si ha $\inf_{n' \geq n_o} \sup_{n \geq n'} c_n = \inf_{n'} \sup_{n \geq n'} c_n$ e quindi posso dire che $\inf_N \sup_{n \geq N}(a_n + b_n) = \inf_{N \geq n_\varepsilon} \sup_{n \geq N}(a_n + b_n) \geq$

$L-\varepsilon+\inf_{N\geq n_\varepsilon}\sup_{n\geq N} b_n = L-\varepsilon+\inf_N\sup_{n\geq N} b_n$ da cui il risultato.

17.3 Dimostriamo per assurdo. Se a_n non convergesse allora $\overline{\lim} a_n = L > \underline{\lim} a_n = l$. Sia ora $b_n=-a_n$; si dimostra facilmente che $\overline{\lim} b_n = \overline{\lim}(-a_n) = -\underline{\lim} a_n = -l$ e quindi $\overline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n = L-l\neq 0$. Del resto si ha $\overline{\lim}(b_n+a_n)=0$ e si cade in contraddizione.

18.3 Per definizione si ha che $a_nb_n\leq A_{_N}B_{_N}$ per $n\geq N$ ed inoltre $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\ N_\varepsilon$ *t.c.* $A_{N_\varepsilon}B_{N_\varepsilon}<(A+\varepsilon)(B+\varepsilon)=AB+\varepsilon(A+B)+\varepsilon^2\equiv AB+\varepsilon'$. Essendo poi le successioni $A_{_N}$ e $B_{_N}$ monotone non crescenti ne consegue che $A_{_N}B_{_N}<(A+\varepsilon)(B+\varepsilon)=AB+\varepsilon(A+B)+\varepsilon^2\ \forall\ N\geq N_\varepsilon$.
Definendo ora $\sup_{n\geq N} a_nb_n \doteq C_{_N}$ si ha $C_{_N}\leq(\sup_{n\geq N} a_n)(\sup_{n\geq N} b_n)=A_{_N}B_{_N}<AB+\varepsilon'$ $\forall\ N\geq N_\varepsilon$. Ne consegue che $\inf_{_N} C_{_N}=\overline{\lim}(a_nb_n)\leq AB$.
Supponiamo ora che $\lim_{n\to+\infty} a_n=L>0$. Bisogna far vedere che $\overline{\lim} a_n\overline{\lim} b_n = L\overline{\lim} b_n\leq\overline{\lim}(b_na_n)$. Sappiamo per ipotesi che $\forall\,\varepsilon\ \exists\ N_\varepsilon$ *t.c.* $n\geq N_\varepsilon\Rightarrow Lb_n<b_n(a_n+\varepsilon)$. Da ciò segue che $\sup_{n\geq N_\varepsilon} Lb_n\leq\sup_{n\geq N_\varepsilon}(b_na_n+\varepsilon b_n)\leq\sup_{n\geq N_\varepsilon} b_na_n+\varepsilon\sup_{n\geq N_\varepsilon} b_n$. Essendo $\sup_{n\geq N} x_n$ una successione decrescente in N si ha $\inf_{N\geq N_\varepsilon}\sup_{n\geq N} b_na_n=\inf_N\sup_{n\geq N} b_na_n$ da cui $\overline{\lim} Lb_n\leq\overline{\lim} a_nb_n+\varepsilon\overline{\lim} b_n$ ed essendo ε arbitrario se ne conclude che $\overline{\lim} Lb_n\leq\overline{\lim} a_nb_n$.

19.3 Supponiamo che $a<b$. Sono da osservare le seguenti disuguaglianze $x_1<x_{2n-1}<x_{2n+1}<x_{2n}<x_{2n-2}<x_2$ dalle quali risulta che x_{2n} è una sottosuccessione non crescente mentre x_{2n-1} è non decrescente. Essendo ambedue limitate convergono. Inoltre essendo $x_{2n}-x_{2n-1}=\frac12(x_{2n-1}-x_{2n-3})$ si ha che ambedue le sottosuccessioni convergono allo stesso limite.
Per trovare tale limite consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x_{2n}=\dfrac12(x_{2n-1}+x_{2n-2}) \\ x_{2n-1}=\dfrac12(x_{2n-2}+x_{2n-3})\end{cases} \text{che riscriviamo come} \begin{cases} x_{2n}=\dfrac34 x_{2n-1}+\dfrac14 x_{2n-3} \\ x_{2n-1}=\dfrac12(x_{2n-2}+x_{2n-3})\end{cases}$$

Ora pensiamo la coppia (x_{2n},x_{2n-1}) come un vettore di $\mathbf{R}^2$ ed il precedente sistema si riscrive come

$$\begin{pmatrix} x_{2n} \\ x_{2n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{2n-2} \\ x_{2n-3}\end{pmatrix}$$

Scrivendo in questo modo la successione possiamo dire che x_k si ottiene dalla applicazione successiva al vettore $\begin{pmatrix} b \\ a\end{pmatrix}$ della matrice scritta. Quest'ultima ha autovalori $\lambda_1=1$ e $\lambda_2=\frac14$ (del primo valore si era certi; perché?[(7.3)]) ai quali corrispondo gli autovettori $\underline{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1\end{pmatrix}$ e $\underline{w}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2\end{pmatrix}$ che sono linearmente indipendenti e quindi formano una base nello spazio dei vettori. Il vettore $\begin{pmatrix} b \\ a\end{pmatrix}$ lo scomponiamo secondo la base ottenendo

$\begin{pmatrix} b \\ a\end{pmatrix}=\xi\begin{pmatrix} 1 \\ 1\end{pmatrix}+\eta\begin{pmatrix} 1 \\ -2\end{pmatrix}$ e si ha $\begin{pmatrix} x_{2n} \\ x_{2n-1}\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} b \\ a\end{pmatrix}$ con $\xi=\frac13(a+2b)$ e $\eta=\frac{b-a}{3}$.
Ora usiamo la scomposizione secondo la base per ottenere
$A^n\begin{pmatrix} b \\ a\end{pmatrix}=\xi(\lambda_1)^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1\end{pmatrix}+\eta(\lambda_2)^n\begin{pmatrix} 1 \\ -2\end{pmatrix}$ e quindi $\lim_{n\to+\infty} A^n\begin{pmatrix} b \\ a\end{pmatrix}=\xi\begin{pmatrix} 1 \\ 1\end{pmatrix}$; essendo $\lim_{n\to+\infty} x_{2n}=\lim_{n\to+\infty} x_{2n-1}$ se ne conclude che tale limite è $\frac13(a+2b)$.

20.3 $a_o=\sqrt{\alpha}\Rightarrow a_n=\sqrt{\alpha}\ \forall\ n$ e quindi il limite è $\sqrt{\alpha}$
Dalla disuguaglianza $\frac12(a_n+\frac{\alpha}{a_n})\geq\sqrt{\alpha}$ ossia $(a_n-\sqrt{\alpha})^2\geq 0$ segue che $a_1\geq\sqrt{\alpha}$ qualunque sia il valore di a_o.

(7.3) perché se $a{=}b$ allora $a_n{=}a\ \forall\ n$

Per induzione dimostriamo che la successione è monotona non crescente per $n \geq 1$. Infatti $a_{n+1} \leq a_n$ è equivalente a $\frac{\alpha}{a_n} \leq a_n$ ossia $a_n \geq \sqrt{\alpha}$ che è esattamente quanto trovato prima. Dunque $\{a_n\}$ è monotona non crescente limitata dal basso e quindi converge. Trovarne il limite è ora immediato.

21.3 La relazione $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$ implica che $x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n$. Da tali relazioni si conclude che x_n è monotona non decrescente e limitata dall'alto e quindi converge. y_n è monotona non crescente e limitata dal basso e quindi converge ma potrebbe convergere ad un valore diverso da quello cui converge x_n. Scriviamo quindi $y_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(y_n - x_n) \leq \frac{1}{2}(y_n - x_{n-1}) = \frac{1}{4}(y_{n-1} - x_{n-1}) \leq \frac{1}{4}(y_{n-1} - x_{n-2})$ e proseguendo così si arriva $y_{n+1} - x_n \leq \frac{1}{2^n}(y_1 - x_1)$ e per $n \to +\infty$ la differenza tende a zero da cui il risultato (non si mancherà di osservare che $y_{n+1} - x_n \to 0$ è equivalente a $y_n - x_n \to 0$.)

22.3 Supponiamo che $p_1 = p_2 = \ldots = p_r = p_1$ (eventualmente $r = 1$).
$\lim_{n\to+\infty} \Big(\sum_{k=1}^m p_k^n\Big)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} p_1 \Big(r + \sum_{k=r+1}^m (\frac{p_k}{p_1})^n\Big)^{\frac{1}{n}}$.

È chiaro che $\lim_{n\to+\infty} (\frac{p_k}{p_1})^n = 0$. Inoltre riscriviamo $\Big(r + \sum_{k=r+1}^m (\frac{p_k}{p_1})^n\Big)^{\frac{1}{n}} = \exp(\frac{1}{n}\ln(r + \sum_{k=r+1}^m (\frac{p_k}{p_1})^n))$ e per $n \to +\infty$ tende ad 1 da cui il risultato.

23.3** 1) $A + B = \cup_{x' \in B}(A + x')$ dove $A + x = \{z \in \mathbf{R} \mid z = x + x',\ x' \in B\}$ ossia è unione di insiemi aperti (gli insiemi $x + A$) e dunque è aperto

2) Vogliamo far vedere che se $\{z_k\}$ è una successione di $A+B$ convergente a z allora $z \in A+B$ (i punti di accumulazione di $A+B$ stanno in esso). Facciamo vedere che dalla successione z_k si può estrarre una sottosuccessione z_{n_k} convergente ad un punto di $A+B$. Essendo per ipotesi z_k convergente, essa convergerà allo stesso punto di $A+B$ (si usa il fatto che se una successione è convergente allora tutte le sottosuccessioni convergono allo stesso limite).
Per definizione di $A+B$ $\{z_k\} = \{x_k + x'_k\}$ ed essendo B compatto dalla successione $\{x'_k\}$ si può estrarre una sottosuccesione $\{x'_{n_k}\}$ convergente ad un numero $\xi' \in B$ (si tenga presente che sebbene z_k sia convergente, non è detto che x'_k sia convergente). Consideriamo ora la sottosuccesione $\{z_{n_k}\} = x_{n_k} + x'_{n_k}$, che riscriviamo come $\{x_{n_k}\} = z_{n_k} - x'_{n_k}$. $\{z_{n_k}\}$ converge a ζ essendo sottosuccessione di una successione convergente; x'_{n_k}, converge per costruzione e quindi x_{n_k} converge essendo la differenza. Sia $\xi = \lim_{k\to+\infty} x_{n_k}$: essendo A chiuso per ipotesi si può certamente dire che $\xi \in A$. Dall'uguaglianza $\xi = \zeta - \xi'$ e dal fatto che $\xi \in A$ e $\xi' \in B$ segue che $\zeta \in A + B$ da cui la tesi.

3) Dobbiamo far vedere che se z_k è una successione di $A+B$ allora da essa si può estrarre una sottosuccesione convergente ad un punto di $A+B$. $z_k = x_k + x'_k$; da $\{x_k\}$ si può estrarre una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ convergente a $x \in A$. Consideriamo ora la sottosuccesione $\{x'_{n_k}\}$; essendo nel compatto B essa conterrà una sottosuccesione $\{x'_{n_k}\} \supset \{x'_{n'_k}$ (ossia $\{n_k\} \supset \{n'_k\}$) e $x'_{n'_k} \to x' \in B$. Ma $\{x_{n'_k}\}$ essendo sottosuccessione di una successione $\{x_{n_k}\}\}$ convergente, convergerà anchśsa ed allo stesso limite. Ne consegue che $\{x_{n_k} + x'_{n_k}\}$ converge ad un punto di $A+B$ da cui la tesi.

4) In questo caso si tratta di trovare un controesempio all'affermazione del testo ossia di confutare l'affermazione stessa. È chiaro che qualunque sia la soluzione prescelta deve contemplare il fatto che tanto A quanto B sono insiemi non limitati. In caso contrario vale il punto 2 ed $A+B$ sarebbe chiuso. A voler mimare la dimostrazione del punto 2 ci si ferma quando li si dice *ed essendo B compatto dalla successione $\{x'_k\}$ si può estrarre una sottosuccesione $\{x'_{n_k}\}$ convergente ad un numero $\xi' \in B$*. Infatti in questo caso B è solo chiuso e non compatto.
Tornando alla soluzione data si deve osservare che tanto A quanto B sono insiemi chiusi (privi

di punti di accumulazione) tali che $0 \notin A+B$. Di $A+B$ fa però parte l'insieme dei punti $x_k = \frac{1}{2k}$ che hanno proprio 0 quale punto di accumulazione. Quindi l'insieme non può essere chiuso non essendo $(A+B)' \subset A+B$.

24.3* Facciamo vedere che il `Teorema di pag.30` implica quello di `pag.180`. L'ipotesi è che ogni insieme limitato $E \subset \mathbf{R}$ ammette estremo superiore S ed inferiore I. Sia data ora una successione $\{a_n\}$ che sappiamo essere di Cauchy. Vogliamo dimostrare che converge.
Siano $I_N \doteq \inf_{k\geq N} a_k$ e $S_N \doteq \sup_{k\geq N} a_k$. Tali numeri esistono in quanto una successione di Cauchy costituisce essa stessa un insieme limitato (vedi `Lemma 4.14 pag.176`) e quindi ammette sup ed inf secondo la ipotesi. Chiaramente si hanno le relazioni d'ordine $I_N \leq I_{N+1}$, $S_N \geq S_{N+1}$, $I_K \leq S_J$ per ogni K e J per definizione. La successione $\{I_N\}$ è limitata superiormente e quindi ammette estremo superiore che chiameremo I. La successione $\{S_N\}$ è limitata inferiormente e quindi ammette estremo inferiore che chiameremo S. Consideriamo la successione di intervalli chiusi $[I_N, S_N]$. Per costruzione si ha $[I_{N+1}, S_{N+1}] \subset [I_N, S_N]$ e quindi $\cap_{N\geq 0}[I_N, S_N] = [I, S] \neq \emptyset$. Inoltre essendo la successione $\{a_k\}$ di Cauchy ne segue che esistono intervalli di lunghezza piccola a piacere. Abbiamo quindi una successione di intervalli inclusi l'uno nell'altro che verifica le due proprietà:
1) ha intersezione non vuota [(8.3)]
2) per ogni ε piccolo a piacere esiste un intervallo di lunghezza minore di ε
Ne segue che l'intersezione si riduce ad un punto detto p. Mostriamo ora che la successione converge a p. Dal fatto che esistono intervalli piccoli a piacere segue che $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_\varepsilon$ *t.c.* $[I_{N_\varepsilon}, S_{N_\varepsilon}]$ ha lunghezza minore di ε. Ma allora segue che per ogni $k \geq N_\varepsilon$ e $q \geq N_\varepsilon$ si ha $|a_k - a_q| < \varepsilon$ ed essendo $p \in [I_{N_\varepsilon}, S_{N_\varepsilon}]$ segue che $k \geq N_\varepsilon$ implica $|a_k - p| < \varepsilon$ ossia la convergenza della successione a p.

Facciamo vedere ora l'affermazione inversa ossia supponiamo che ogni successione di Cauchy di numeri reali converga. Dobbiamo dimostrare come da ciò segue che ogni insieme limitato ammette estremo superiore ed inferiore. Sia dunque $E \subset \mathbf{R}$ un insieme limitato che ammette un maggiorante ed un minorante. Sia M tale maggiorante (per i minoranti il discorso è analogo) e quindi $x \leq M$ per ogni $x \in E$. Possiamo escludere che ci sia un elemento particolare x di E per cui $x = M$ in quanto M diventerebbe automaticamente il massimo di M e quindi anche il sup. Abbiamo dunque $x < M$ per ogni $x \in E$. Supponiamo che E non abbia estremo superiore; ciò implica che per ogni maggiorante M ne esiste un altro M' per cui $M' < M$. Se l'insieme dei maggioranti avesse estremo inferiore (detto I) tale inf sarebbe immediatamente l'estremo superiore di E. Sia dunque M_1 un maggiorante di E che supponiamo limitato superiormente ed inferiormente e quindi contenuto nell'intervallo $(N, M]$. Se E non è limitato inferiormente consideriamo lo stesso un intervallo $(N, M] \cap E \neq \emptyset$ che certamente esiste. Dividiamo l'insieme $(N, M] \supset E$ nelle due parti $U_1 = (N, m_1]$ e $V_1 = (m_1, M_1)$. La loro unione è tutto $(N, M_1]$. $U_1 \cap E \neq \emptyset \ \vee \ V_1 \cap E \neq \emptyset$ e prendiamo il sottoinsieme che contiene punti di E. Se tutti e due contengono punti di E allora prendiamo V_1. È chiaro che m_1 non è un maggiorante di E mentre M_1 lo è. Se invece V_1 non contiene punti di E allora prendiamo U_1 e quindi m_1 diventa maggiorante di E mentre N chiaramente non è maggiorante. Proseguendo allo stesso modo si ottiene una successione di intervalli della forma $(a_k, b_k]$ in cui i b_k sono tutti maggioranti mentre gli a_k non sono maggioranti. Poiché $b_k - a_k \to 0$ per $k \to +\infty$ la successione $\{b_k\}$ è di Caychy e quindi converge. Il limite di tale successione, detto l, verifica $l \leq b_k$ per ogni k (la successione dei b_k è monotona non crescente) ed inoltre è esso stesso un maggiorante e quindi è l'inf dei maggioranti da cui la tesi.

25.3*** Dalla relazione $(f\circ f)(n) = n+R$ con R intero segue che $(f(f\circ f))(n) = f(n+R)$ da cui

(8.3) Si dimostri tale fatto. Si costruisca inoltre una successione di intervalli aperti inclusi uno nell'altro che abbiano intersezione nulla

$f(n+R) = f(n)+R$. Se ora dividiamo $\mathbf{N}$ in R classi di equivalenza modulo R e si indica ciascuna classe con $[\cdot]$ si ha $\mathbf{N}_R \stackrel{\text{def}}{=} ([0],[1],[2],\ldots,[R-1])$. La relazione $f(n+R) = f(n)+R$ si può riscrivere come $[f([n])] = f(n)$. Definiamo quindi la funzione $\xi\colon \{0,1,2,\ldots,R-1\} \to \{0,1,2,\ldots,R-1\}$ come quella funzione tale che $\xi(n) \doteq [f([n])]$. Evidentemente si ha $\xi\circ\xi(n) = [f([\xi(n)])] = [f([f([n])])] = [f(f(n))] = [n+R] = [n]$ e quindi $\xi\circ\xi(n) = n$ ossia nell'insieme $\{0,1,2,\ldots,R-1\}$ l'applicazione due volte di ξ è l'identità. Dalla relazione $f(n+R) = f(n)+R$ segue inoltre che $f(n+kR) = f(n)+kR$ e quindi l'insieme degli $f(n)$ per $n\in\mathbf{N}$ è ottenibile dall'insieme $(f(0), f(1), f(2),\ldots,f(R-1))$ semplicemente sommando i valori interi multipli di R. Ora si ha $f(0) = p_0 + N_0R$, $f(1) = p_1 + N_1R$, $f(2) = p_2 + N_2R$, dove $p_j\in\mathbf{N}$, $0\le p_0\le R-1$, $N_j\in\mathbf{N}$ e quindi $\xi(j) = p_j$, $0\le p_j\le R-1$. Di conseguenza ξ è tale che il suo quadrato è l'identità all'interno dell'insieme $\{0,1,2,\ldots,R-1\}$. Essendo $R = 1987$ un numero dispari ne segue che esiste un intero $j_o\in\{0,1,2,\ldots,R-1\}$ tale che $\xi(j_o) = j_o$ ma questo è impossibile in quanto vorrebbe dire che $\xi(j) = j$ ossia $f(j) = f(\xi(j)) = f([f([j])]) = f(f(j)) = j+R$ e quindi verrebbe che $f(j) = j+R$ e riapplicando f si avrebbe $f(f(j)) = j+R = f(j+R) = f(j)+R$ e quindi $f(j) = j$ da cui la contraddizione. Si sarà notato che l'unica cosa che importa di 1987 è che sia dispari. Se invece ci fosse stato 1988 od un qualunque altro numero pari allora la funzione sarebbe esistita e data da $f(n) = n+\frac{R}{2}$

26.3* Come prima cosa facciamo vedere che la successione $\{S_n\}$ converge. Essendo costituita dalla somma di termini tutti positivi si ha $S_n < S_{n+1}$ ossia è monotona crescente strettamente e quindi ci basta far vedere che è limitata. Per questo facciamo vedere che $\frac{1}{k!}\le\frac{1}{2^k}$ per $k\ge 2$. Usando l'induzione si ha che $\frac{1}{k+1}\frac{1}{2^k}\le\frac{1}{2^{k+1}}$ per $k\ge 1$ per cui è vera. Del resto si ha $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}$ per cui $\lim_{n\to\infty} S_n$ è una quantità finita. Detta $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ si dimostra che $a_n\le S_n\le a_{n+1}$ per $n\ge 3$ e quindi converge esattamente al numero e. $(1+\frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}$ e $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\le\frac{1}{k!}$ per ogni $0\le k\le n$. Infatti $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}\le\frac{1}{k!}$. Dunque la disuguaglianza $a_n\le S_n$ è dimostrata. Veniamo ora alla seconda ossia $S_n\le a_{n+1}$. Impostando un calcolo basato sulla induzione si arriva a $(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}+\frac{1}{(n+1)!}\le(1+\frac{1}{n+2})^{n+2}$ che possiamo riscrivere come $1+\frac{1}{a_{n+1}}\frac{1}{(n+1)!}\le\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$. $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = (1+\frac{1}{n+2})(1-\frac{1}{(n+2)^2}) = 1+\frac{1}{n+2}(1-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{(n+2)^2})\ge 1+\frac{1}{2}\frac{1}{(n+2)}$ per $n\ge 2$. Inoltre si ha $1+\frac{1}{a_{n+1}}\frac{1}{(n+1)!}\le 1+\frac{1}{(n+1)!}$ essendo $a_n\ge 1$. Dunque alla fine ci basta far vedere che $1+\frac{1}{2}\frac{1}{(n+2)}\ge 1+\frac{1}{(n+1)!}$ e questo è vero per $n\ge 3$ (si veda pure pag. 63 della referenza citata nella nota (5.3)

27.3 Sia $p = \lim_{n\to+\infty} x_n$ dove $x_n\in A'$. Dobbiamo far vedere che $p\in A'$. Per definizione $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\, n_\varepsilon\ : n\ge n_\varepsilon\ \Rightarrow\ |p-x_n|<\varepsilon$. Sia d la distanza fra x_n e la frontiera della palla aperta di raggio ε e centro p. All'interno della palla aperta $B(x_n;\frac{d}{2})$ cade certamente un punto di A essendo $x_n\in A'$. Dunque All'interno della palla aperta $B(p;\varepsilon)$ cade almeno un punto di A da cui $p\in A'$ ossia la tesi

28.3 Naturalmente si può continuare con l'indice n. Prendiamo la successione $\{2^{-k}\}$ che ha come unico punto di accumulazione lo zero. All'interno dell'intervallo $[2^{-k-1},2^{-k}]$ costruiamo la successione $\{2^{-k}-2^{-k-j_k-2}\}$ che per ciascun k ha il punto 2^{-k} quale punto di accumulazione per $j_k\to+\infty$. Quindi il derivato di dell'insieme $\{2^{-k}-2^{-k-j_k-2}\}$ è l'insieme $\{2^{-k}\}$ il cui derivato è lo zero il cui derivato è vuoto.

31.3 $x\in A$ implica che $x\in A'$ oppure x è un punto isolato. Basta far vedere che l'insieme dei punti isolati è numerabile. Sia $x\in A$ isolato e sia (a,b) un itervallo aperto con estremi razionali tale che $a<x<b$ e tale che *non contenga altri punti di A*. Poiché l'insieme degli intervalli con estremi razionali è numerabile, è numerabile l'insieme dei punti isolati da cui la tesi

32.3 $A = (A'\cap A)\cup\tilde{A}$ dove $\tilde{A}$ è l'insieme dei punti isolati. Sappiamo già che $\tilde{A}$ è numerabile. $A'\cap A = (A_c\cap A)\cup((A'\cap A)\backslash A_c)$ dove $A_c\cap A$ è l'insieme dei punti di condensazione che appartengono ad A. Se facciamo vedere che $((A'\cap A)\backslash A_c)$ è numerabile abbiamo ottenuto il risultato essendo per ipotesi A non–numerabile. Sia $p\in(A'\cap A)\backslash A_c$ e quindi esiste un intorno sferico U di p il cui raggio è un numero razionale tale che $U\cap A$ contiene solo una quantità numerabile di punti di A. *All'interno di $U\cap A$ può esserci una quantità al più numerabile di punti di* $(A'\cap A)\backslash A_c$ in quanto se così non fosse si violerebbe la condizione per cui $U\cap A$ è numerabile. Poiché i razionali sono numerabili ne segue che che $(A'\cap A)\backslash A_c$ è numerabile e quindi la tesi

33.3** $\cap_{k\geq 1}\cup_{n\geq k}(x_n-\frac{1}{k},x_n+\frac{1}{k})=A$; $y\in A$ se $\forall\ k\geq 1\ \exists\ n_k\geq k\ :\ y\in(x_{n_k}-\frac{1}{k^2},x_{n_k}+\frac{1}{k^2})$; ne segue che esiste una successione x_{n_k} tale che $x_{n_k}\neq x_{n_{k'}}$ per $k\neq k'$ e quindi la successione $\{x_{n_k}\}$, composta da elementi tutti diversi tra loro, converge a y ossia $y\in E'$. Viceversa supponiamo che $y\in E'$. Dobbiamo far vedere che $y\in A$. Dalla definizione di punto di accumulazione si ha che esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ (composta tutta da punti distinti) (eventualmente tutta la successione se quest'ultima converge) tale che $x_{n_k}\to y$ e quindi $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ k_\varepsilon : k>k_\varepsilon\ \Rightarrow\ |x_{n_k}-y|<\varepsilon$. Prendiamo la successione $\{\varepsilon_k\}=\{\frac{1}{k}\}$. In corrispondenza a k_o vi è un $x_{n_{k_o}}$ tale che $x_{n_{k_o}}\in(y-\frac{1}{k_o},y+\frac{1}{k_o})$ e quindi $y\in(x_{n_{k_o}}-\frac{1}{k_o},x_{n_{k_o}}+\frac{1}{k_o})$. Ripetendo la procedura si ottiene il risultato.

La seconda domanda ha soluzione ovvia.

34.3** Sia $L=\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ e supponiamo che L è finito. Per definizione sappiamo che $k>k_\varepsilon\ \Rightarrow\ a_k(L-\varepsilon)<a_{k+1}<(L+\varepsilon)a_k$ da cui segue $a_{n-1}(L-\varepsilon)^2<a_{n+1}<(L+\varepsilon)^2a_{n-1}$ con $n-1>k_\varepsilon$ e quindi $a_{k_\varepsilon}(L-\varepsilon)^{n-k_\varepsilon}<a_n<(L+\varepsilon)^{n-k_\varepsilon}a_{k_\varepsilon}$ che è come dire $\lim\limits_{k\to+\infty}a_k^{1/k}=L$.
Se $L=+\infty$ allora $k>k_\varepsilon\ \Rightarrow\ a_{k+1}>Ma_k$ e quindi $a_n>M^{n-k_\varepsilon}a_{k_\varepsilon}$ da cui $\lim\limits_{k\to+\infty}a_k^{1/k}=+\infty$.
Naturalmente se esiste $\lim\limits_{k\to+\infty}a_k^{1/k}$ non è detto che esista $\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$. Si prenda la successione

$$a_k=\begin{cases}1 & k\neq n^2\\ 1/2 & k=n^2\end{cases}$$

• Sia $L=\overline{\lim}a_k^{1/k}$ e quindi $L=\inf\limits_n\sup\limits_{k>n}a_k^{1/k}$. Sia $L_n=\sup\limits_{k>n}a_k^{1/k}$. Per definizione $a_k^{1/k}\leq L_n$ per ogni $k>n$ e inoltre $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ k_\varepsilon : L_n-\varepsilon<a_{k_\varepsilon}^{1/k_\varepsilon}\leq L_n$. Ne segue che $\dfrac{a_{k_\varepsilon+1}}{a_{k_\varepsilon}}\leq\dfrac{L_n^{k_\varepsilon+1}}{(L_n-\varepsilon)^{k_\varepsilon}}=L_n\Big(\dfrac{L_n}{L_n-\varepsilon}\Big)^{k_\varepsilon}$. Ne segue che $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ k_\varepsilon : \dfrac{a_{k_\varepsilon+1}}{a_{k_\varepsilon}}\leq L_n\Big(\dfrac{L_n}{L_n-\varepsilon}\Big)^{k_\varepsilon}$ e quindi $\sup\limits_{k>n}\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\geq L_n$ e quindi $\inf\limits_n\sup\limits_{k>n}\dfrac{a_{k_\varepsilon+1}}{a_{k_\varepsilon}}\geq L$.
• Sia $l=\underline{\lim}a_k^{1/k}$ e quindi $l=\sup\limits_n\inf\limits_{k>n}a_k^{1/k}$. Sia $l_n=\inf\limits_{k>n}a_k^{1/k}$. Per definizione $a_k^{1/k}\geq l_n$ per ogni $k>n$ e inoltre $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ k_\varepsilon : l_n\leq a_{k_\varepsilon}^{1/k_\varepsilon}\leq l_n+\varepsilon$. Ne segue che $\dfrac{a_{k_\varepsilon+1}}{a_{k_\varepsilon}}\geq l_n\Big(\dfrac{l_n}{l_n+\varepsilon}\Big)^{k_\varepsilon}$. Ne segue che $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ k_\varepsilon : \dfrac{a_{k_\varepsilon+1}}{a_{k_\varepsilon}}\geq l_n\Big(\dfrac{l_n}{l_n+\varepsilon}\Big)^{k_\varepsilon}$ e quindi $\inf\limits_{k>n}\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\leq l_n$ e quindi $\sup\limits_n\inf\limits_{k>n}\dfrac{a_{k_\varepsilon+1}}{a_{k_\varepsilon}}\leq l$.

35.3 La convergenza non è uniforme. Si prenda come C l'insieme numerabile di punti dato da $C=\{\pi 2^{-k}\}\cup\{0\}$ e $a_k=2^k$. È chiaro che a_kx è un multiplo intero di π da un certo k in poi. D'altra parte, essendo $\sin(\frac{\pi}{2^{k+1}}2^k)\equiv 1$, la convergenza non può essere uniforme.