§5.1 Polinomi di Taylor, limiti di funzioni, ordini di infinito/esimo

1.5.1 Disporre in ordine di infinito crescente per $x \to +\infty$ le seguenti funzioni e qualora esista trovarne l'ordine rispetto all'infinito campione x

$f_1(x) = \frac{\log(x^2+1)-\log(x)}{\log(2x)}(x^2+x\sin x-\cos x)\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+1}-x}$, $f_2(x) = \log(\pi+e^{2x})^4$, $f_3(x) = x\log^{19} x$, $f_4(x) = x^{\sqrt{21}\cos\frac{1}{x}}$, $f_5(x) = \log(e^{x^6}+x)$, $f_6(x) = \log(xe^x+2)$, $f_7(x) = (x^2+x^{1/3})(\ln(1+\frac{1}{\sqrt{x}}) - \sin(\frac{1}{\sqrt{x}}+e^{-3x}))$, $f_8(x) = ((x^2+x)^{1/3}-(x^2-x)^{1/3})x$, $f_9(x) = x^{\sqrt{5}\sin\frac{\pi x-1}{2x+1}}$, $f_{10}(x) = \log\tan\frac{\pi x+1}{2x+1}$, $f_{11}(x) = x^{\log[e(1-\frac{1}{x})]}$, $f_{12}(x) = x^{\log[e(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{\log x}})]}$

2.5.1 Trovare i seguenti limiti
$\lim_{x\to\pm\infty} x(x^3-x)^{1/3}-x^2$, $\lim_{x\to\pm\infty} x^3[(x^3-x)^{1/3}-x]+\frac{1}{3}x^2$ $\lim_{x\to\pm\infty}(x^3-x^2)^{1/3}-x$,

$\lim_{x\to 0}(e^x-\sin x-\frac{x^2}{2})^{x/1-\cos x^2}$, $\lim_{x\to 0}(e^{x^2}-\cos x-\frac{3}{2}x^2+1)^{1/(x-\sin x)^{4/3}}$,

$\lim_{x\to 0}(e^x-\sin x-x+\log(1+x))^{\frac{x}{2\cos x+x^2-2}}$, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\sin x^4}{\cos x+\frac{1}{2}\tan^2 x}\right)^{1/((1+x^4)^{1/8}-1)}$,

$\lim_{x\to 0}(e^{x^2}-\cos x-\frac{3}{2}x^2+1)^{-x/\log(1+\frac{11}{12}x^5)}$, $\lim_{x\to 0}(e^x-\sin x-\frac{x^2}{2})^{2/(1-\cos x^2)^{\frac{3}{4}}}$,

$\lim_{x\to 0^+}(2e^{1/2\log x}-2-\frac{1}{\log x})\log^2 x$, $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-\arctan x}{x^3}$ (1.5.1), $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-\arctan x}{\sin x-\tan x}$,

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$ $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x\sqrt{x}}(a\arctan\frac{\sqrt{x}}{a}-b\arctan\frac{\sqrt{x}}{b})$, $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}(\cot x-\frac{1}{x}+\frac{x}{3}+\frac{x^3}{45})$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\tan x-\tan\sin x}{\arcsin\arctan x-\arctan\arcsin x}$ (2.5.1)

3.5.1 Stabilire l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ al variare di α β e $\gamma \geq 0$ delle seguenti funzioni (per la seconda bisogna evidentemente attendere di sapere cosa è un integrale)

$f(x) = \frac{\log(1+x^2)-\log^2(1+x)-\alpha x^3+\beta x^4}{1-\cos x}$, $F(x) = \int_0^{x^{2\gamma}} dz\sin(z-z^{\gamma/2})$

4.5.1 Trovare a e b tale che $f(x) = o(x^2)$ per $x \to 0$ dove $f(x) = (1+x^2)^{1/3}+ax+bx^2-e^{2x}$, $f(x) = (x^2+1)^{\frac{1}{5}}+ax^2+bx-e^{3x}$

5.5.1 Determinare l'ordine di infinito per $x \to +\infty$ delle funzioni $(\sin^3\frac{1}{x})^{-\gamma}+(\cos x+2x)^{\gamma^2}$ e $(\sin^3\frac{1}{x})^{-\gamma}-(\cos x+2x)^{9\gamma^2}$ al variare di $\gamma > 0$

6.5.1 Disporre in ordine di infinitesimo crescente per $x \to 0^+$ le seguenti funzioni
$f_1(x) = \frac{\ln\cos x}{e^{\sqrt{x}}-1}$ $f_2(x) = (\sin x)\ln x$ $f_3(x) = (\sin\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}$ $f_4(x) = (\cos x)^{1/2}-1$

7.5.1 Disporre in ordine di infinitesimo crescente per $x \to 0^+$ le seguenti funzioni

---

(1.5.1) Si confronti con la soluzione data nell'esercizio **20.2**. Lo stesso dicasi per l'esercizio successivo al successivo

(2.5.1) L'esercizio è tratto dalla raccolta di 100 esercizi di V.I.Arnold: *A Mathematical Trivium* pubblicata sulla rivista Russian Mathematical Surveys **46:1** 1991, 271-278; la più parte di essi richiede una conoscenza matematica superiore a quella di cui dispone uno studente/ssa del primo anno. Fa eccezione una parte degli esercizi, tra cui quello appena dato e che tra l'altro è risolto in poco tempo dall'autore usando concetti facenti parte del bagaglio matematico di uno studente del secondo anno. Per tale tipo di soluzione si può consultare il libro dello stsso autore *Huygens & Barrow Newton & Hooke* Editore Birkhäuser dove è presente anche una breve aneddotica sull'esercizio (oltre ad un gran numero di cose interessanti che riguardano sia la Matematica che la Fisica)

$f_1(x) = (x^3 - x)^{1/3} + x^{1/3}$, $f_2(x) = (x^3 - x^2)^{1/3} + x^{2/3}$, $f_3(x) = (x - x^4)^{1/2} - \sqrt{x}$, $f_4(x) = (x^2 - x^4)^{1/2} - x^2$, $f_5(x) = (x^2 - x^3)^{1/2} - x^2$,

8.5.1 Disporre in ordine di infinitesimo crescente per $x \to 0^+$ le seguenti funzioni $f_1(x) = |\ln\cos x|^{\frac{1}{\sqrt{-\ln x}}}$ $f_2(x) = (\sin(x + e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}))\ln(x+1)$ $f_3(x) = (\sin\frac{1}{x})e^{\frac{1}{x\ln x}}$ $f_4(x) = (\cos\arctan\sqrt{x})^{\frac14} - (\frac{1}{1+x})^{\frac14}$

Come è noto, attraverso la formula di Taylor e per determinate esigenze, si può sostituire una funzione $f(x)$ con un polinomio. L'errore che si commette nell'eseguire tale sostituzione è dato dalla (6.44) del libro di testo ed in alcuni casi ammette una maggiorazione semplice. Se ad esempio è noto che $sup_{x_o \le z \le x}|f^{(n)}(z)| \le M_n(x)$ per $n = 0, 1, 2, \ldots$ allora per il resto della (6.44) si ottiene la maggiorazione $|E_n| \le \frac{M_n(x)}{n!}|x - x_o|^n$. Indicando il secondo membro dell'ultima formula con $\omega(x, n)$ si possono porre in modo naturale tre problemi legati alla determinazione di una delle grandezze ω, x, n in funzione delle altre due.
a) Per n ed x date, determinare $\omega(x, n)$; in altre parole trovare una maggiorazione dell'errore commesso sostituendo la funzione $f(x)$ nell'intervallo (x_o, x) con il polinomio di grado n.
b) Per n ed ω date trovare x; in altre parole, trovare un intervallo del tipo (x_o, x) oppure (x, x_o) oppure $(x - \frac{x_o}{2}, x + \frac{x_o}{2})$ sul quale è garantito che l'errore commesso sostituendo la funzione $f(x)$ con il suo polinomio di Taylor di grado n non superi il valore dato ω.
c) Per x ed ω date trovare n; in altre parole determinare il grado del polinomio di Taylor per cui l'errore commesso sostituendo la funzione f con questo polinomio in un dato intervallo (x_o, x) non superi il valore dato ω.

I successivi tre problemi costituiscono degli esempi concreti delle precedenti tre domande.

9.5.1 Stimare $\log\frac32$, e $\ln\frac12$ a meno di $\frac{1}{100}$ e di $\frac{1}{1000}$. Utilizzando lo sviluppo di Taylor del logaritmo si può dire che questo problema rientra nel tipo c) della precedente lista. Infatti si chiede di trovare quale polinomio di Taylor e dunque n approssima la quantità data a meno di un errore ($\frac{1}{100}$ e $\frac{1}{1000}$ rispettivamente)

10.5.1 Dare una stima dell'errore che si commette approssimando $\ln\frac32$ e $\ln\frac12$ con il suo polinomio di Taylor di grado n centrato nell'origine. In questo caso bisogna trovare ω, x e n dati ed è del tipo a).

11.5.1 Dare una stima dell'intervallo $(1, 1+x)$ tale che approssimando $\ln(1+x)$ con il suo polinomio di Taylor di grado n si commette un errore non superiore ad ω. In questo caso bisogna trovare x, ω ed n dati ed è di tipo b)

12.5.1 Dimostrare che $\ln\frac{1+x}{1-x} \le 2x$ per $x \in [-1, 0]$ e stimare l'errore che si commette approssimando $\ln\frac{1+x}{1-x}$ con $2x$ per $x \in [-\frac15, 0]$

13.5.1 Calcolare $\sqrt{\arctan\frac32}$ a meno di 10^{-2} e 10^{-3}.

14.5.1 Dal fatto che $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^4}(e^{x^2} - 1 + \cos x) = \frac{13}{24}$ e dal fatto che $\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x} = e$ segue che $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^4}((1+x)^x - 1 + \cos x) = \frac{13}{24}$. Vero o falso?

15.5.1 Stimare $\ln\frac52$ a meno di 10^{-4}.

16.5.1** Dimostrare che $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} = \frac{\pi^2}{6}$ usando lo sviluppo di Taylor della funzione $f(x) = \begin{cases} x^{-1}\sin x \text{ se } x \ne 0 \\ 1 \text{ se } x = 0 \end{cases}$ *È la dimostrazione data da Eulero*, vedi il libro William Dunham: *Euler The*

Master of Us All, The Mathematical Association of America, Dolciani Mathematical Expositions No.22, 1999.

SOLUZIONI

§5.1

1.5.1 $f_5 > f_4 > f_1 > f_9 > f_3 > f_2 = f_6 > f_7 > f_{11} > f_{12} > f_8 > f_{10}$
$f > g$ vuol dire che $\lim_{x\to+\infty} \frac{f}{g} = +\infty$

2.5.1 $L = -\frac{1}{3}$, $L = -\frac{1}{9}$, $L = -\frac{1}{3}$, $L = e^{\frac{2}{3}}$, $L = e^{6^{\frac{1}{3}}\frac{11}{4}}$, $L = e^8$, $L = e^{\frac{17}{3}}$, $L = e^{-\frac{1}{2}}$, $e^{\frac{2^{\frac{7}{4}}}{3}}$, $L = \frac{1}{8}$, $L = \frac{1}{2}$, $L = 1$, $L = 1$, $\frac{1}{3}\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}$, $L = 0$, $L = 1$,

3.5.1 se $\alpha \neq 1$ l'ordine è 1, se $\alpha = 1$ e $\beta \neq \frac{23}{12}$ l'ordine è 2, se $\alpha = 1$ e $\beta = \frac{23}{12}$ l'ordine è 3, se $\gamma = 0$ l'ordine è 0, se $\gamma \in (0,2)$ l'ordine è $\gamma^2 + 2\gamma$, se $\gamma = 2$ l'ordine è $+\infty$, se $\gamma > 2$ l'ordine è 4γ.

4.5.1 - primo del gruppo - $a = 2$ e $b = \frac{5}{3}$.

5.5.1 - primo del gruppo - Se $\gamma \leq 3$ allora l'ordine è 3γ mentre se $\gamma > 3$ l'ordine è γ^2

5.5.1 - secondo del gruppo - Se $\gamma < \frac{1}{3}$ l'ordine è 3γ mentre se $\gamma > 3$ l'ordine è $9\gamma^2$. Se $\gamma = \frac{1}{3}$ la funzione non è infinitesima

6.5.1 $f_3 > f_4 > f_1 > f_2$

7.5.1 $f_3 > f_4 > f_1 > f_5 > f_2$

8.5.1 $f_4 > f_3 > f_2 > f_1$

9.5.1 Prendendo il polinomio di Taylor di ordine 4 ed il resto di ordine 5 si ottiene $\ln\frac{3}{2} = 85/192$; il resto è positivo e minore di di $1/160$. A meno di $\frac{1}{1000}$ si ha $\sum_{k=1}^{7} \frac{(-)^{k-1}}{k2^k}$. Nel caso di $\ln\frac{1}{2}$ invece a meno di $\frac{1}{100}$ si ha $-\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k2^k}$ ed a meno di si ha $\frac{1}{1000} - \sum_{k=1}^{1000} \frac{1}{k2^k}$.
Va sottolineato, sia nel primo che nel secondo esercizio, che il valore trovato, rispettivamente $85/192$ e $1/160$ è del tutto indicativo e che il valore reale rimane sconosciuto. In altre parole, riferendoci al primo caso, possiamo dire che $\ln\frac{3}{2}$ è un numero che si trova all'interno dell'intervallo $(\frac{85}{192} - \frac{1}{160}, \frac{85}{192} + \frac{1}{160})$ (ed infatti se si trattasse di una misurazione di carattere fisico si scriverebbe $\frac{85}{192} \pm \frac{1}{160}$) senza sapere quanto vale. Di fatto ogni misurazione di carattere fisico prevede un cosiddetto *intervallo di confidenza* che sta ad indicare “il grado di approssimazione” (inevitabilmente presente) con cui eseguiamo una misura.

10.5.1 Detto $E_n(x)$ il resto che si ottiene sostituendo $\ln(1+x)$ e $x > 0$ con il suo polinomio di Taylor di grado n e centrato nell'origine $(T_n(x))$ si ha $|\mathrm{E}_n(x)| < \frac{1}{(n+1)}\frac{1}{2^{n+1}}$. Se invece x è negativo allora $0 > E_n(-\frac{1}{2}) > \frac{(-)}{n+1}$

11.5.1 $0 < x < (\frac{n+1}{\omega})^{\frac{1}{n+1}}$

12.5.1 $-\frac{1}{125}(1 + \frac{1}{(1-\frac{1}{5})^3}) \sim \frac{1}{50}$

13.5.1 $\left(3\sum_{k=0}^{9} \frac{(-)^k}{(\sqrt{3})^{2k+1}2k+1} + \sum_{k=0}^{9} \frac{(-)^k(\frac{2}{3})^k}{2k+1}\right)^{\frac{1}{2}}$ a meno di $\frac{1}{100}$ mentre a meno di $\frac{1}{1000}$ è lasciata al lettore/trice.

14.5.1 falso

15.5.1 Il valore di $\sum_{k=1}^{12} \frac{(-)^{k-1}}{k2^k} + \sum_{k=1}^{12} \frac{(-)^{k-1}2^k}{k3^k}$ approssima $\ln\frac{5}{2}$ a meno di 6.11652×10^{-4}.

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

1.5.1 $f_1(x) = \frac{\log(x^2+1)-\log(x)}{\log(2x)}(x^2+x\sin x - \cos x)\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+1}-x}$; $\ln(1+x^2) = 2\ln x + \ln(1+\frac{1}{x^2})$; e quindi $\frac{\log(x^2+1)-\log(x)}{\log(2x)} = \frac{\ln x + \ln(1+\frac{1}{x^2})}{\ln 2 + \ln x} = \frac{1+\frac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{\ln x}}{1+\frac{\ln 2}{\ln x}}$ da cui la prima funzione ha ordine 0 rispetto all'infinito campione (si è usata la `Definizione di pag.160` con la estensione che α può essere nullo) $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+1}-x} = \sqrt{x+1}(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x})$ e $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{3/2}}\sqrt{x+1}(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}) = 2$ da cui la funzione ha ordine $\frac{3}{2}$ rispetto all'infinito campione x. $(x^2+x\sin x-\cos x)$ ha ordine 2 rispetto all'infinito campione. In conclusione la funzione ha ordine $\frac{7}{2}$.
$f_2(x) = 8x + 4\ln(1+\pi e^{-2x})$ ha ordine 1
$f_3(x)$ ha ordine superiore ad 1 ma non è un numero fissato.
$f_4(x) = x^{\sqrt{21}\cos\frac{1}{x}} = e^{\sqrt{21}\cos\frac{1}{x}\ln x} = x^{\sqrt{21}}e^{-\frac{\sqrt{21}}{2}\frac{\ln x}{x^2}+o(\frac{1}{x^2})} = x^{\sqrt{21}}(1+o(\frac{1}{x}))$ ha ordine $\sqrt{21}$
$f_5(x) = x^6 + \ln(1+xe^{-x^6}) = x^6 + xe^{-x^6} + o(xe^{-x^6}) = x^6 + o(x^{-N})$ per qualsiasi N intero e quindi ha ordine 6
$f_6(x) = x + \ln x + \ln(1+\frac{2}{x}e^{-x}) = x + \ln x + o(x^{-N})$ per qualsiasi N e quindi ha ordine 1
$f_7(x)$: È il prodotto di due funzioni. La prima ha ordine 2 rispetto all'infinito campione. La seconda funzione è data dalla somma di due funzioni. $\ln(1+\frac{1}{\sqrt{x}}) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2x} + O(\frac{1}{x^{3/2}})$ mentre la seconda dà $\sin(\frac{1}{\sqrt{x}}+e^{-3x}) = \sin(\frac{1}{\sqrt{x}}+o(\frac{1}{x^N}))$ per ogni N positivo. Quindi si ha $\sin(\frac{1}{\sqrt{x}}+e^{-3x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} + o(\frac{1}{x^N}) + o(\frac{1}{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} + o(\frac{1}{x})$. La somma delle due funzioni è inifinitesima di ordine 1 rispetto all'inifinitesimo campione $\frac{1}{x}$. Il prodotto è un infinito di ordine 1 rispetto all'infinito campione x.
$f_8(x)$: $x^{\frac{5}{3}}((1+\frac{1}{x})^{\frac{1}{3}} - (1-\frac{1}{x})^{\frac{1}{3}})$ da cui segue che che è infinita con ordine $\frac{2}{3}$. Basta ricordare che $(1+x)^a = 1 + ax + o(x)$.
$f_9(x) = e^{\sqrt{5}\sin(\frac{\pi x-1}{2x+1})\ln x} = e^{\sqrt{5}(\cos(\frac{\pi x-1}{2x+1})-\frac{\pi}{2})\ln x} = e^{\sqrt{5}(\ln x)\cos\frac{\pi+2}{4x+2}} =$
$= e^{\sqrt{5}(\ln x)}e^{-\sqrt{5}\ln x(\frac{\pi+2}{4x+2})^2+o(\frac{1}{x^3})\ln x} = x^{\sqrt{5}}(1+o(\frac{1}{x}))$ e quindi ha ordine $\sqrt{5}$
$f_{10}(x) = \ln(\frac{\cos\frac{\pi+2}{4x+2}}{\sin\frac{\pi+2}{4x+2}}) = \ln\frac{1+o(\frac{1}{x})}{\frac{\pi+2}{4x+2}+o(\frac{1}{x^2})} = \ln\frac{4x^2+2x}{\pi+2}(1+o(\frac{1}{x})) = \ln x + o(1)$ (il secondo è inteso come quantità che tende a zero per $x\to+\infty$.
$f_{11}(x) = e^{\ln(e-\frac{e}{x})\ln x} = e^{(1-\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x}))\ln x} = xe^{-\frac{\ln x}{x}+\ln x\, o(\frac{1}{x}))} = x(1-\frac{\ln x}{x}+o(\frac{\ln x}{x}))$ e qiundi la funzione ha ordine 1 rispetto all'infinito campione.
$f_{12} = e^{(\ln x)[1+\ln(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{\ln x}})]} = xe^{\ln x[\ln(1-\frac{1}{\sqrt{\ln x}}-\frac{1}{x})]} =$
$= xe^{\ln x[-\frac{1}{\sqrt{\ln x}}+O(\frac{1}{\ln x})]} = xe^{-\sqrt{\ln x}+\ln x O(\frac{1}{\ln x})]}$
Si può verificare che $\lim_{x\to+\infty}\frac{f_{12}}{x^{1+a}} = 0$ per qualsiasi a positivo e quindi la funzione è un infinito di ordine inferiore ad 1 ma superiore a qualsiasi numero inferiore ad 1.
Notare la profonda diversità rispetto all'esercizio precedente nonostante che il limite del numeratore sia 1 per entrambe.

2.5.1 - primo del gruppo - Portando fuori x^3 si ottiene $x^2(1-\frac{1}{x^2})^{1/3} - x^2, = x^2((1-\frac{1}{x^2})^{1/3}-1)$. Ora si usa il fatto che per ogni α reale e per $|x|<1$ si ha $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k}x^k + o(x^n)$ dove $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$. Se α è un intero solo un numero finito di coefficienti binomiali sono diversi da zero (la formula si dimostra per induzione). Tornando al limite si ottiene $x^2(1-\frac{1}{3x^2}+o(\frac{1}{x^2})-1)$ da cui il risultato tanto per $x\to+\infty$ quanto per $x\to-\infty$.

2.5.1 - secondo del gruppo - Portando fuori x^3 si ha $x^4(1-\frac{1}{x^2})^{1/3} - x^4 + \frac{1}{3}x^2 = x^4(1-\frac{1}{3x^2} - \frac{1}{9x^4} + o(\frac{1}{x^4})) - x^4 + \frac{1}{3}x^2$ e nel limite si ha $-\frac{1}{9}$.

2.5.1 - terzo del gruppo - la funzione può scriversi come $x(1-\frac{1}{3x})-x+o(\frac{1}{x})$ e nel limite fa $-\frac{1}{3}$.

2.5.1 - quarto del gruppo - Essendo $e^x=\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!}+o(x^n)$, $\sin x=\sum_{k=0}^n \frac{(-)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2n+2})$, $\cos x=\sum_{k=0}^n \frac{(-)^k x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n+1})$, ed essendo il limite una forma indeterminata del tipo 1^∞ si ha che il limite è uguale a $\lim_{x\to 0}\exp(\frac{x}{1-\cos x^2}(e^x-\sin x-\frac{x^2}{2}-1))$ ossia
$\lim_{x\to 0}\exp(\frac{2x}{x^4+o(x^6)}(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)-x+\frac{x^3}{6}+o(x^4)-\frac{x^2}{2}-1))=$
$=\lim_{x\to 0}\exp(\frac{2}{x^3(1+o(x^2))}\frac{x^3}{3}(1+o(1)))$. Ora $\frac{1}{1+o(x^2)}=1+o(x^2)$ (da dimostrare) e quindi si ottiene $\lim_{x\to 0}\exp(\frac{2}{x^3}\frac{x^3}{3}(1+o(x^2))(1+o(1)))=e^{\frac{2}{3}}$.
$\frac{1}{1+o(x^2)}-1=\frac{-o(x^2)}{1+o(x^2)}=o(x^2)$ in quanto $\lim_{x\to 0}\frac{-o(x^2)}{x^2(1+o(x^2))}=0$ per definizione di o-piccolo.

2.5.1 - quinto del gruppo - Usando gli sviluppi di Taylor scritti prima si ha $\frac{1}{(x-\sin x)^{\frac{4}{3}}}=$ $\frac{6^{\frac{4}{3}}}{x^4(1+o(x^2))}=\frac{6^{\frac{4}{3}}}{x^4}(1+o(x^2))$ e quindi si ottiene
$\lim_{x\to 0}\exp((1+x^2+\frac{1}{2}x^4+o(x^6))-1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+o(x^5)-\frac{3}{2}x^2)\frac{6^{\frac{4}{3}}}{x^4}(1+o(x^2)))=$
$=\lim_{x\to 0}\exp(\frac{11}{24}x^4)\frac{6^{\frac{4}{3}}}{x^4}(1+o(x^2))=e^{6^{\frac{1}{3}}\frac{11}{3}}$

2.5.1 - sesto del gruppo - $\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^4)$ da cui $e^x-\sin x-x+\log(1+x)-1=\frac{2}{3}x^3+o(x^3)$ per $x\to 0$. Inoltre $2\cos x+x^2-2=\frac{x^4}{12}(1+o(x))$ per cui il limite è $\lim_{x\to 0}\exp(\frac{2}{3}x^3(1+o(1))\frac{12}{x^3}(1+o(x))=e^8$

2.5.1 - settimo del gruppo - $\cos x+\frac{1}{2}\tan^2 x=1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+o(x^5)+\frac{1}{2}\big(x+\frac{1}{3}x^3+o(x^4)\big)^2=$ $1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+o(x^5)+\frac{1}{2}(x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^5))=1+\frac{7}{24}x^4+o(x^5)$ e quindi $1+\sin x^4-\cos x-\frac{1}{2}\tan^2 x=$ $\frac{17}{24}x^4+o(x^5)$ da cui $\big(\frac{1+\sin x^4}{\cos x+\frac{1}{2}\tan^2 x}-1\big)=(\frac{17}{24}x^4+o(x^5))(1+\frac{7}{24}x^4+o(x^5))=\frac{17}{24}x^4+o(x^5)$. Per quanto riguarda l'esponente abbiamo $(1+x)^a=1+ax+o(x)$ per $x\to 0$ e quindi $(1+x^4)^{1/8}=$ $1+\frac{1}{8}x^4+o(x^4)$ da cui $\frac{1}{(1+x^4)^{1/8}-1}=\frac{8}{x^4+o(x^4)}=\frac{8}{x^4(1+o(1))}=\frac{8}{x^4}(1+o(1))$ e quindi il limite cercato è $\lim_{x\to 0}\exp(\frac{17}{24}8(1+o(1)))(1+o(x))=e^{17/3}$

2.5.1 - ottavo del gruppo - Usando gli sviluppi di Taylor già scritti si ha $\frac{-x}{\log(1+\frac{11}{12}x^5)}=$ $\frac{-x}{\frac{11}{12}x^5+o(x^5)}=\frac{-12}{11x^4}(1+o(1))$ ed usando una parte del secondo esercizio di **2.5.1** si ottiene
$\lim_{x\to 0}\exp(\frac{11}{24}x^4)\frac{-12}{11x^4}(1+o(1))=e^{-\frac{1}{2}}$

2.5.1 - nono del gruppo - $\frac{2}{(1-\cos x^2)^{3/4}}=\frac{2^{7/4}}{x^3(1+o(x^2))^{3/4}}=\frac{2^{7/4}}{x^3}(1+o(x^2))$ e quindi si ha $\lim_{x\to 0}\exp((\frac{x^3}{3}(1+o(1)))\frac{2^{7/4}}{x^3}(1+o(x^2)))=e^{\frac{1}{3}2^{\frac{7}{4}}}$

2.5.1 - decimo del gruppo - È una forma indeterminata del tipo $0\cdot\infty$. $e^{\frac{1}{\log x}}=1+\frac{1}{2\log x}+$ $\frac{1}{4\log^2 x}+o(\frac{1}{\log^3 x})$ per $x\to 0^+$. Quindi si ha $\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{4\log^2 x}+o(\frac{1}{\log^3 x}))\log^2 x=\frac{1}{4}$.

2.5.1 - undicesimo del gruppo - $\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3,+o(x^4)$, $\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+o(x^4)$ da cui il limite $L=\frac{1}{2}$. Confrontare tale soluzione con quella data al §**2**.

2.5.1 - dodicesimo del gruppo - $\sin x-x=-\frac{1}{6}x^3(1+o(x))$ per cui $\frac{\sin x-x}{x}=-\frac{1}{6}x^2(1+o(x))$ e $\frac{\sin x}{x-\sin x}=-\frac{6}{x^2}(1+o(x^2))$ per cui $L=1$.

2.5.1 - tredicesimo del gruppo - Essendo $\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^4)$ si ottiene

$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}x^3(1+o(x))}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}(1+o(x))} = 1$ e quindi $L = 1$ e confrontare tale soluzione con quella data al §**2**.

2.5.1 - quindicesimo del gruppo - $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}(\cot x - \frac{1}{x} + \frac{x}{3} + \frac{x^3}{45})$ Usando lo sviluppo della tangente scriviamo $\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^6)} = \frac{1}{x}\frac{1}{1+\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{15}x^4+o(x^5)}$ e quindi $\frac{1}{x}\big[(1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{15}x^4 + o(x^5)) + (\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{15}x^4 + o(x^5))^2 + o((\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{15}x^4 + o(x^5))^2)\big]$. Proseguendo si ottiene $\frac{1}{x}(1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} + o(x^4) - \frac{1}{x} + \frac{x}{3} + \frac{x^3}{45})$ da cui si evince che il limite è zero.

2.5.1 - sedicesimo del gruppo - Come prima cosa bisogna ottenere lo sviluppo della tangente. Si possono seguire due strade. La prima, più diretta ma più lunga, consiste nel fare le derivate. Sia $f(x) = \tan x$ e quindi

$f^{(1)} = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad f^{(2)} = -2\frac{\sin x}{\cos^3 x} \qquad f^{(3)} = -2\frac{\cos x}{\cos^3 x} - 6\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} = -2\frac{1+\sin^2 x}{\cos^4 x}$

$f^{(4)} = -2\frac{4\sin x\cos x}{\cos^4 x} - 8\frac{\sin x(1+2\sin^2 x)}{\cos^5 x} = -8\frac{\sin x\cos^2 x+\sin x+2\cos^3 x}{\cos^5 x} =$

$= -8\frac{\sin x+\sin x+\sin^3 x}{\cos^5 x} = -8\frac{2\sin x+\sin^4 x}{\cos^5 x}$

$f^{(5)} = -8\frac{2\cos x+3\sin^2 x\cos x}{\cos^5 x} - 4\frac{2\sin^2 x+\sin^4 x}{\cos^6 x} = -8\frac{2+8\sin^2 x+3\sin^2 x+2\sin^4 x}{\cos^6} = -8\frac{2+11\sin^2 x+2\sin^4 x}{\cos^6 x}$

$f^{(6)} = -8\frac{22\sin x\cos x+8\sin^3 x\cos x}{\cos^6 x} - 48\frac{\sin x(2+11\sin^2 x+2\sin^4 x)}{\cos^7 x} =$

$= -16\frac{11\sin x\cos^2 x+4\sin^3 x\cos^2 x+6\sin x+33\sin^3 x+6\sin^5 x}{\cos^7 x} =$

$= -16\frac{11\sin x+22\sin^3 x+6\sin x+2\sin^5 x+4\sin^3 x}{\cos^7 x} = -16\frac{17\sin x+26\sin^3 x+2\sin^5 x}{\cos^7}$

$f^{(7)} = -16\frac{17\cos x+78\sin^2 x\cos x+10\sin^4 x\cos x}{\cos^7 x} - 7\cdot 16\frac{(17\sin x+26\sin^3 x+2\sin^5 x)\sin x}{\cos^8 x}$

La conclusione è che $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$

Un secondo modo consiste nell'operare $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} =$
$= \frac{\sin x}{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{6!}x^6+o(x^7)}$ e $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^{n+1})$ per cui
$\tan x = (x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + o(x^8))\big[(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + o(x^7)) + (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + o(x^7))^2 + (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + o(x^7))^3 + o(x^7)\big]$ e radunando i termini con pari potenza si riottiene esattamente il risultato precedente.

Procediamo ora alla determinazione del limite. Al posto si $\frac{17}{315}$ scriviamo semplicemente a.

$\sin(\tan x) = \tan x - \frac{1}{6}\tan^3 x + \frac{1}{120}\tan^5 x - \frac{1}{7!}\tan^7 x + o(\tan^8 x) = \big[x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + ax^7 + o(x^8)\big] - \frac{1}{6}\big[x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + ax^7 + o(x^8)\big]^3 + \frac{1}{120}\big[x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + ax^7 + o(x^8)\big]^5 - \frac{1}{7!}x^7 + o(x^8)$ e cerchiamo tutti i coefficienti delle potenze di uguale ordine.
Ordine 1 : $x(1)$
Ordine 3 : $x^3(\frac{1}{3} - \frac{1}{6})$
Ordine 5 : $x^5(\frac{2}{15} - \frac{1}{6}\frac{3}{3} + \frac{1}{120})$
Ordine 7 : $x^7(a - \frac{1}{6}3\frac{2}{15} - \frac{1}{6}\frac{3}{9} + \frac{1}{120}\frac{5}{3} - \frac{1}{7!})$

$\tan(\sin x) = [(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{7!}x^7] + \frac{1}{3}[(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{7!}x^7]^3 + \frac{2}{15}[(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{7!}x^7]^5 + ax^7 + o(x^8)$ e cerchiamo tutti i coefficienti delle potenze di uguale ordine.
Ordine 1 : $x(1)$
Ordine 3 : $x^3(+\frac{1}{3} - \frac{1}{6})$
Ordine 5 : $x^5(+\frac{2}{15} - \frac{1}{6}\frac{3}{3} + \frac{1}{120})$
Ordine 7 : $x^7(a + \frac{1}{3}\frac{3}{120} + \frac{1}{3}\frac{3}{36} - \frac{2}{15}\frac{5}{6} - \frac{1}{7!})$
Ne segue che $\sin\tan x - \tan\sin x = -\frac{1}{30}x^7 + o(x^7)$

$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + o(x^7)$, $\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + o(x^7)$ (tali formule scaturiscono dalle derivate eseguite alla fine)
$\arcsin(\arctan x) = \arctan x + \frac{1}{6}\arctan^3 x + \frac{3}{40}\arctan^5 x + \frac{5}{112}\arctan^7 x + o(x^7)$ e raccogliendo i termini simili si ha

Ordine 1 : $x(1)$
Ordine 3 : $x^3(-\frac{1}{3}+\frac{1}{6})$
Ordine 5 : $x^5(+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{3}{40})$
Ordine 7 : $x^7(\frac{5}{112}+\frac{1}{6}\frac{3}{9}+\frac{1}{6}\frac{3}{5}-\frac{3}{40}\frac{5}{3}-\frac{1}{7})$

$\arctan(\arcsin x)=\arcsin x-\frac{1}{3}\arcsin^3 x+\frac{1}{5}\arcsin^5 x-\frac{1}{7}\arcsin^7 x+o(x^7)$ e raccogliendo i termini simili si ha
Ordine 1 : $x(1)$
Ordine 3 : $x^3(-\frac{1}{3}+\frac{1}{6})$
Ordine 5 : $x^5(+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{3}{40})$
Ordine 7 : $x^7(\frac{5}{112}-\frac{1}{3}\frac{9}{40}-\frac{1}{3}\frac{3}{36}+\frac{1}{5}\frac{5}{6}-\frac{1}{7})$
Ne segue che $\arcsin(\arctan x)-\arctan(\arcsin x)=\frac{-1}{30}x^7+o(x^7)$ e quindi
$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\tan x-\tan\sin x}{\arcsin\arctan x-\arctan\arcsin x}=1$.
Detta $f(x)=\arcsin x$ si ha $f^{(1)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $f^{(2)}=\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$, $f^{(3)}=\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}+\frac{3x^2}{(1-x^2)^{5/2}}=\frac{2x^2+1}{(1-x^2)^{5/2}}$ $f^{(4)}=\frac{4x}{(1-x^2)^{5/2}}+\frac{5x(2x^2+1)}{(1-x^2)^{7/2}}=\frac{6x^3+9x}{(1-x^2)^{7/2}}$ $f^{(5)}=3(\frac{6x^2+3}{(1-x^2)^{7/2}}+\frac{7x(2x^3+3x)}{(1-x^2)^{9/2}})=3\frac{8x^4+24x^2+3}{(1-x^2)^{9/2}}$ $f^{(6)}=3(\frac{32x^3+48x}{(1-x^2)^{9/2}}+\frac{9x(8x^4+24x^2+3)}{(1-x^2)^{11/2}})=3\frac{40x^5+248x^3-48x^2+75x}{(1-x^2)^{11/2}}$
$f^{(7)}=3\frac{200x^4+744x^2-96x+75}{(1-x^2)^{11/2}}+3\frac{45x^5-248x^3-48v^2+75x}{(1-x^2)^{13/2}}11$
e da tali derivate emerge lo sviluppo scritto prima.
Per quanto concerne $\arctan x$ si può rifare lo stesso discorso oppure (per quanti sanno cosa è l'unità immaginaria i ossia che $i\cdot i=-1$ oppure $i\doteq\sqrt{-1}$) eseguire la derivata prima ottenendo $(\arctan'(x))=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2i}(\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i})$ ed eseguire le derivate successive sull'oggetto ottenuto e considerando i alla stregua di un qualsiasi numero (la definizione $i^2=-1$ dà poi la regole per eseguire tutti i prodotti successivi ossia $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$, $i^6=-1$ e via dicendo).

3.5.1 - primo del gruppo - Usando lo sviluppo del logaritmo si ha
$\log(1+x)=\sum_{k=1}^n(-)^{k-1}\frac{x^k}{k}+o(x^n)$ da cui $\log(1+x^2)=x^2-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^6+o(x^6)$ mentre $\log^2(1+x)=x^2-x^3+(\frac{1}{4}+\frac{2}{3})x^4+(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2})x^5+(\frac{1}{9}-\frac{1}{4}-\frac{2}{5})x^6+o(x^6)=x^2-x^3+\frac{11}{12}x^4+\frac{1}{6}x^5-\frac{97}{180}x^6+o(x^6)$
e quindi $f(x)=(x^2-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^6+o(x^6))-x^2+x^3-\frac{11}{12}x^4-\frac{1}{6}x^5+o(x^5)-\alpha x^3+\beta x^5)(\frac{1}{2}x^2(1+o(x)))^{-1}$
da cui $f(x)=\frac{x^3(1-\alpha)+x^4(-\frac{1}{2}-\frac{11}{12}+\beta)+\frac{1}{6}x^5}{\frac{1}{2}x^2(1+o(x))}$. Il risultato è immediato.

3.5.1 - secondo del gruppo - È chiaro che bisogna conoscere la teoria dell'integrazione per risolvere l'esercizio. Se $\gamma=0$ $F(x)=\int_0^1 dz\sin(z-1)=\cos(-1)-1$ che è una quantità indipendente da γ e quindi l'ordine è zero.
Sia $\gamma\in(0,2)$ e quindi $0<\frac{\gamma}{2}<1$; in tal caso per $x\to 0$ si ha $\frac{\sin(z-z^{\gamma/2})}{z-z^{\gamma/2}}(z-z^{\gamma/2})=(1+o(z-z^{\gamma/2})(z-z^{\gamma/2})$. Poiché $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\ \delta_{\varepsilon,\gamma}\ t.c.\ |z|<\delta_{\varepsilon,\gamma}\Rightarrow|o(z-z^{\gamma/2})|<\varepsilon$, prendendo $\varepsilon<1$ si ha $(1+\varepsilon)(z-z^{\gamma/2})\leq\sin(z-z^{\gamma/2})\leq(1-\varepsilon)(z-z^{\gamma/2})$ (perché il segno più sta prima del segno meno?). Ora facciamo l'integrale prendendo $x^{2\gamma}<\delta_{\varepsilon,\gamma}$ che è lecito essendo interessati al comportamento per $x\to 0$, ed otteniamo $(1+\varepsilon)(\frac{1}{2}x^{4\gamma}-\frac{2}{2+\gamma}x^{2\gamma(1+\frac{\gamma}{2})})\leq F(z)\leq(1-\varepsilon)(\frac{1}{2}x^{4\gamma}-\frac{2}{2+\gamma}x^{2\gamma(1+\frac{\gamma}{2})})$ da cui dividendo per $x^{2\gamma(1+\frac{\gamma}{2})}$ e mandando x a 0 si deduce che l'ordine è $\gamma^2+2\gamma<4\gamma$.
Sia $\gamma=2$. Essendo $F(z)\equiv 0$ si può dire che l'ordine è arbitrariamente grande e quindi diciamo che è $+\infty$. Sia $\gamma>2$. Rifacendo i conti del caso $0<\gamma<2$ si ottiene che l'ordine è 4γ.

4.5.1 - primo del gruppo - Deve accadere che $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=0$ e quindi i coefficienti rispettivamente dell'ordine 0 1 e 2 dello sviluppo di Taylor devono essere nulli. Il coefficiente dell'ordine 0 è 0; dell'ordine 1 è $-2+a$ per cui $a=2$; all'ordine 2 il coefficiente è $\frac{1}{3}+b-2=0$ per $b=\frac{5}{3}$.

4.5.1 - secondo del gruppo - Identico procedimento dà $b=3$ e $a=-\frac{1}{5}+\frac{9}{2}=\frac{43}{10}$

5.5.1 - primo del gruppo - È chiaro che la funzione data può scriversi come $x^{3\gamma}(1+\frac{\gamma}{2x^2}+o(\frac{1}{x^3}))+(2x)^{\gamma^2}(1+\gamma^2\frac{\cos x}{x}+o(\frac{1}{x}))$ e quindi se $3\gamma\geq\gamma^2$ ossia $\gamma\leq 3$ allora l'ordine è 3γ mentre se $\gamma>3$ allora l'ordine è γ^2.

5.5.1 - secondo del gruppo - Rifacendo i conti precedenti si ha che se $\gamma<\frac{1}{3}$ l'ordine è 3γ mentre se $\gamma>\frac{1}{3}$ l'ordine è $9\gamma^2$. Se $\gamma=\frac{1}{3}$ la funzione non è infinitesima.

6.5.1 - primo del gruppo - $\ln\cos x=\ln(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3))=-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)+o(-\frac{1}{2}x^2+o(x^3))=-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$. $e^{\sqrt{x}}-1=1+\sqrt{x}+o(\sqrt{x})-1$ per cui $\frac{\ln\cos x}{e^{\sqrt{x}}-1}=\frac{-\frac{1}{2}x^2(1+o(1))}{\sqrt{x}(1+o(1))}=-\frac{1}{2}x^{3/2}(1+o(1))$
$(\sin x)\ln x=x\ln x+o(x^2\ln x)$, $\lim_{x\to0^+}\sin\frac{1}{x}\frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x^N}=0$ per ogni intero N
$\sqrt{\cos x}=\sqrt{(\cos x-1)+1}-1=\frac{1}{2}(\cos x-1)+o(\cos x-1)=-\frac{1}{4}x^2(1+o(1))$
Il risultato è $f_3>f_4>f_1>f_2$

9.5.1 $\ln(1+x)=\mathrm{T}_n(x)+\mathrm{E}_n(x)=\sum_{k=1}^n\frac{(-)^{k-1}x^k}{k}+\mathrm{E}_n(x)$ e
$\mathrm{E}_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c(x))}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{(-)^nx^{n+1}}{(1+c)^{n+1}(n+1)}$ dove, va sottolineato, $c(x)$ è una funzione sconosciuta della quale si sa solo che $0<c(x)<x$. Scrivendo $\ln\frac{3}{2}=\ln(1+\frac{1}{2})$ si può dire che $\frac{3}{2}>1+c>0$. Il segno di $\mathrm{E}_n(x)$ dipende dal valore di n. Se si vuole una stima di $\ln\frac{3}{2}$ a meno di un centesimo (ossia si vuole sapere un valore α, non certo unico tale che $|\alpha-\ln\frac{3}{2}|<\frac{1}{100}$) allora si può prendere $n=4$ ottenendo $\alpha=\frac{85}{192}$. In tal caso $0<\mathrm{E}_4(\frac{1}{2})<\frac{1}{5\cdot2^5}=\frac{1}{160}<\frac{1}{100}$ e quindi il valore di α ottenuto è più piccolo di $\ln\frac{3}{2}$.
Se si vuole la stessa stima ma a meno di $\frac{1}{1000}$ allora si può prendere $n=7$ per cui $\alpha=\sum_{k=1}^7\frac{(-)^{k-1}1}{2^kk}$ mentre $\mathrm{E}_7(\frac{1}{2})=\frac{(-)}{2^8(1+c)^88}$ e quindi si ha $\frac{(-)}{2^88}<\mathrm{E}_7(\frac{1}{2})<\frac{(-)}{2^8(\frac{3}{2})^88}$. Da ciò segue che in questo caso l'errore è negativo ed α è più grande. In questo caso più n è grande e più l'errore diventa piccolo e la decrescita è di tipo più che esponenziale in quanto $x=\frac{1}{2}<1$.

Se invece si vuole stimare $\ln\frac{1}{2}$ dovrei prendere $x=-\frac{1}{2}$ ed il resto è dato da $\mathrm{E}_4(-\frac{1}{2})=\frac{(-)2^{-n-1}}{(1+c)^{n+1}(n+1)}$ e dove $-\frac{1}{2}<c(-\frac{1}{2})<0$. L'errore dunque è sempre negativo e verifica $\frac{(-)}{2^{n+1}(n+1)}>\mathrm{E}_4(-\frac{1}{2})>\frac{-1}{n+1}$. Affinché sia più piccolo di $\frac{1}{100}$ è necessario che $n=100$ (confrontare con $n=4$ precedente.) Il problema è che ora bisogna calcolare $\sum_{k=1}^{100}\frac{(-)^{k-1}}{(-2)^kk}=-\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{2^kk}$ e non è affatto agevole. Anche in questo caso l'errore decresce all'aumentare di n ma la decrescita è molto più lenta da cui la peggiore approssimazione rispetto al caso precedente.
Verificare che se viceversa si considera il polinomio di Taylor della funzione $\ln(1-x)$ e si prende $x=+\frac{1}{2}$ allora si ottiene la stessa cosa. Ciò è dovuto al fatto che la funzione $\ln x$ non è ben approssimabile tramite polinomi nell'intorno del punto $x=\frac{1}{2}$ al contrario di $x=\frac{3}{2}$ e questo perché per $x<0$ si "comincia ad andare verso l'asintoto verticale" $x=0$.

10.5.1 Il resto è dato da $\mathrm{E}_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}\ln(1+z)|_{z=c(x)}=\frac{1}{(n+1)}\frac{x^{n+1}(-)^n}{(1+c)^{n+1}}$ $0<c(x)<x$, per $x>0$. Prendendo $x=\frac{1}{2}$ si ha $\mathrm{E}_n(\frac{1}{2})=\frac{1}{(n+1)}\frac{(-)^n}{2^{n+1}(1+c)^{n+1}}$. Se n è pari allora $0<\mathrm{E}_n(\frac{1}{2})<\frac{1}{(n+1)}\frac{1}{2^{n+1}}$. Se n è dispari allora $\mathrm{E}_n(\frac{1}{2})$ è negativo ed inoltre $\frac{1}{(n+1)}\frac{(-)^n}{2^{n+1}}<\mathrm{E}_n(\frac{1}{2})<0$.
Nel secondo caso si ha $x=-\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}<c(-\frac{1}{2})<0$ e $\mathrm{E}_n(-\frac{1}{2})<0$ per ogni n. Purtroppo l'unica minorazione ragionevole appare essere $0>\mathrm{E}_n(-\frac{1}{2})>\frac{(-)}{n+1}$ che è di gran lunga più "brutta" del caso precedente $x=\frac{1}{2}$.

11.5.1 Se n è pari si deve porre $0<\mathrm{E}_n(x)<\frac{x^{n+1}}{n+1}\leq\omega$ e quindi $\frac{x^{n+1}}{n+1}<\omega$ ossia $x<(\frac{n+1}{\omega})^{\frac{1}{n+1}}$. Si può notare come all'aumentare di n la quantità $\frac{x^{n+1}}{n}$ diventi sempre più piccola se $0<x<1$. Se invece $x>1$ essa cresce ed ad un certo punto sarà maggiore di ω per qualsiasi valore di ω. Questo fatto, molto importante, ci dice che all'aumentare del grado del polinomio di

Taylor, si approssima sempre meglio $\ln(1+x)$ solo se $|x| \le 1$ e questo proprio perché l'errore che si commette, stimato dal resto, diventa progressivamente più piccolo. Se invece $|x| > 1$, all'aumentare di n l'errore diventa più grande rendendo sconveniente l'uso del polinomio di Taylor per l'approssimazione voluta (almeno nella forma cercata per $|x| < 1$).
Se n è dispari il discorso non cambia. Quando si studieranno le funzioni analitiche, argomento questo del terzo anno di corso, tale questione apparirà più chiara ed è conseguenza del fatto che "il dominio di analiticità della funzione" $\ln(1+x)$ è dato dall'insieme dei numeri reali tale che $|x| < 1$.

12.5.1 $\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2x + x^3\left(\frac{1}{(1+c(x))^3} + \frac{1}{(1+c'(x))^3}\right)$ ed essendo $x \in [-1,0]$ ne consegue che $x^3\left(\frac{1}{(1+c(x))^3} + \frac{1}{(1+c'(x))^3}\right) \le 0$ da cui segue il risultato. La stima del resto per $x \in [-\frac{1}{5}, 0]$ è $-\frac{1}{125}\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{5})^3} + 1\right) \sim \frac{1}{50}$. Va da se che data la presenza di $\frac{1}{(1+c(x))^3}$ *non si può stimare il resto nell'intervallo* $[-1,0]$

13.5.1 Calcolare $\sqrt{\arctan\frac{3}{2}}$ a meno di 10^{-2} e 10^{-3}. $\arctan x = \sum_{k=1}^{n} (-)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} +$ $+\frac{\arctan^{(2n+1)}(c(x))}{(2n+1)!}x^{2n+1}$. Nel nostro caso sarebbe $x = \frac{3}{2}$ ed inoltre va tenuto presente che $|\arctan^{(2n+1)}(0)| = (2n)!$ da cui si sospetta che la formula del resto è alquanto brutta non essendovi nessun indizio che per n sempre più grande ed $x = \frac{3}{2}$, tale errore diventi sempre più piccolo. È vero che la derivata va calcolata in $c(x)$ e non in zero ma il discorso non cambia. Al fine di essere precisi calcoliamo la derivata $n-$ esima di $f(x) = \arctan x$. $g(x) \doteq f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{i+x}\right)$ e la derivata $n-$esima di g è data da
$\frac{1}{2i}(-)^n n! \frac{(x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1}}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{(-)^n n!}{2i(1+x^2)^{1+n}} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k}(i^k - (-i)^k)$. Essendo $(i^k - (-i)^k) = i^k(1 + (-)^{k+1})$ ne segue che i contributi con k pari spariscono e rimangono solo quelli con k dispari. Dunque scriviamo $k = 2r+1$; $i^k(1 + (-)^{k+1}) = 2i^{2r+1} = 2i(i^2)^r = 2i(-)^r$ la somma diventa $\frac{(-)^n n!}{2i(1+x^2)^{1+n}} \sum_{r=0}^{[n/2]} \binom{n+1}{2r+1} x^{n-2r} 2i(-)^r$. Calcoliamo la somma per $n = 0$, 1 e 2 rispettivamente. Si ottiene $\frac{1}{1+x^2}$, $\frac{-}{(1+x^2)^2}\binom{2}{1}x = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, $\frac{2}{(1+x^2)^3}\left(\binom{3}{1}x^2 - \binom{3}{3}\right) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$

La derivata $2n-$esima di g è quindi $\frac{(2n)!}{(1+x^2)^{1+2n}} \sum_{r=0}^{n} \binom{2n+1}{2r+1} x^{2n-2r}(-)^r$. Tale formula è esattamente la derivata $2n+1-$esima di $\arctan x$.
Dunque $\frac{\arctan^{(2n+1)}(c(\frac{3}{2}))}{(2n+1)!}\left(\frac{3}{2}\right)^{2n+1} = \frac{(\frac{3}{2})^{2n+1}}{(2n+1)(1+(c(\frac{3}{2}))^2)^{1+2n}} \sum_{r=0}^{n} \binom{2n+1}{2r+1} (c(\tfrac{3}{2}))^{2n-2r}(-)^r$.
Come detto $c(\frac{3}{2})$ è sconosciuto e di esso sappiamo solamente che verifica $0 < c(\frac{3}{2}) < \frac{3}{2}$ per cui possiamo quasi solo stimare il resto nel seguente modo
$|E_{2n}(\frac{3}{2})| \le \frac{(\frac{3}{2})^{2n+1}}{(2n+1)} \sum_{r=0}^{n} \binom{2n+1}{2r+1} (\frac{3}{2})^{2n-2r}$
e non è una quantità che diventa via via più piccola man mano che n cresce ma anzi diventa sempre più grande. Ciò vuol dire che nell'intento di stimare $\arctan\frac{3}{2}$ non si può sperare di vedere decrescere il resto all'aumentare dell'ordine del polinomio di Taylor ossia di n; condizione questa essenziale per l'uso dei polinomi in questione.
Una possibile via di uscita consiste nel ricordare l'esercizio **3.1.2** 2) e scrivere $\arctan\frac{3}{2} = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{2}{3} = 3\frac{\pi}{6} - \arctan\frac{2}{3} = 3\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} - \arctan\frac{2}{3} \doteq \alpha + R - \alpha' - R' \doteq q + Q$ dove $3\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \alpha + R$ $\arctan\frac{2}{3} = \alpha' + R'$, $q = \alpha + \alpha'$ $Q = R + R'$.
$\sqrt{3}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} - \arctan\frac{2}{3}. = \sqrt{q+Q} = \sqrt{q}\sqrt{1+\frac{Q}{q}}$ e quindi $|\sqrt{3}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} - \arctan\frac{2}{3} - \sqrt{q}| \le \sqrt{q}\left(\sqrt{1+\frac{Q}{q}} - 1\right) = \sqrt{q}\frac{\frac{Q}{q}}{(\sqrt{1+\frac{Q}{q}} + \sqrt{q})} \le \frac{Q}{2\sqrt{q}}$. A questo punto bisogna imporre che $\frac{Q}{2\sqrt{q}}$ sia più piccola della quantità prefissata che è $\frac{1}{100}$ e $\frac{1}{1000}$ rispettivamente. Per stimare $\frac{Q}{2\sqrt{q}}$ dobbiamo stimare R ed R'. Prima però semplifichiamo un poco osservando che essendo $\frac{3}{2} > 1$, ne segue che $\arctan\frac{3}{2} > \frac{\pi}{4}$ e quindi $\arctan\frac{3}{2} = q + Q > \frac{\pi}{4}$ da cui $q > \frac{\pi}{4} - Q > \frac{\pi}{4} - \frac{1}{100} > \frac{\pi}{5}$. Conseguentemente

$\frac{Q}{2\sqrt{q}} < \frac{Q}{2}$. Ora dobbiamo stimare $E(\frac{1}{\sqrt{3}})$ e $E(\frac{2}{3})$. In generale si ha $|E(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}(1+\frac{2}{3}n)(1+x^2)^n$ che può maggiorarsi con $|x|(x^2+x^4)^n$; da ciò segue che $|R|+|R'| \leq 3\frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{1}{3}+\frac{1}{9})^n+\frac{2}{3}(\frac{4}{9}+\frac{16}{81})^n$ e per $n = 9$ tale espressione è minore di $1.17197 \times 10^{-3} + 0.0123473 <$. Quindi si ha $\frac{Q}{2} < 6.85986 \times 10^{-4}$ e $q = \left(3\sum_{k=0}^{9} \frac{(-)^k}{(\sqrt{3})^{2k+1}2k+1} + \sum_{k=0}^{9} \frac{(-)^k(\frac{2}{3})^k}{2k+1}\right)^{\frac{1}{2}}$

Lo stesso esercizio nel caso di errore 10^{-3} è lasciato allo studente/ssa non superficiale.

L'ultima dimostrazione da scrivere è data dalla stima $|E(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}(1+\frac{2}{3}n)(1+x^2)^n$. Infatti $\sum_{r=0}^{n}\binom{2n+1}{2r+1}x^{2n-2r} = \sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2n+1-2p}x^{2p}$; per induzione si dimostra che $\binom{2n+1}{2n+1-2p} \leq (1+\frac{2}{3}n)\binom{n}{p}$ da cui segue che la somma si stima come $\sum_{p=0}^{n}(1+\frac{2}{3}n)\binom{n}{p}x^{2p} = (1+\frac{2}{3}n)(1+x^2)^n$ e quindi la stima da dimostrare.

15.5.1 Scrivendo $\ln\frac{5}{2} = \ln(1+\frac{1}{2})+\ln(1+\frac{2}{3})$ l'errore è stimabile in modulo con $((\frac{1}{2})^n+(\frac{2}{3})^n)\frac{1}{n+1}$ e per $n = 12$ si ha 6.11652×10^{-4}. Il valore che approssima $\ln\frac{5}{2}$ è $\sum_{k=1}^{12}\frac{(-)^{k-1}}{k2^k} + \sum_{k=1}^{12}\frac{(-)^{k-1}2^k}{k3^k}$

16.5.1** Per $x \neq 0$ si ha $f(x) = 1-\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{5!}x^4-\frac{1}{7!}x^6+\ldots$ e $f(0) = 1$. Gli zeri dell'espressione infinita sono dati dagli zeri di $f(x)$ e quindi sono dati da $x_k = \pm k\pi$ per ogni intero positivo o nullo k. Ciò implica che $f(x) = 1-\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{5!}x^4-\frac{1}{7!}x^6+\ldots = (1-\frac{x^2}{\pi^2})(1-\frac{x^2}{4\pi^2})(1-\frac{x^2}{9\pi^2})(1-\frac{x^2}{16\pi^2})\ldots$. Delle due espressioni ora estraiamo il coefficiente di x^2 ed otteniamo il risultato. Vi sono alcuni passaggi che al tempo di Eulero non erano stati formalizzati pienamente. Il primo è il fatto che $f(x) = 1-\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{5!}x^4-\frac{1}{7!}x^6+\ldots$. È un problema di serie convergenti che si affronta già al primo anno d'università . Il secondo è l'uguaglianza $1-\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{5!}x^4-\frac{1}{7!}x^6+\ldots = (1-\frac{x^2}{\pi^2})(1-\frac{x^2}{4\pi^2})(1-\frac{x^2}{9\pi^2})(1-\frac{x^2}{16\pi^2})\ldots$. Se si trattasse di polinomi sarebbe vera. Nella fattispecie si tratta di estendere alle *funzioni analitiche* certe proprietà valide per i polinomi.