

FUNZIONI

1)* Data la funzione

$$f(x) = \log |\log(x-1)|,$$

- (a) determinare il dominio e studiare il segno;
- (b) calcolare i limiti significativi;
- (c) calcolare la derivata e studiare la monotonia;
- (d) calcolare la derivata seconda e studiare la convessità e la concavità;
- (e) disegnare un grafico qualitativo.

2) Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{|x^2 - 1|} - x,$$

- (a) studiarne il segno;
- (b) calcolare i limiti significativi di f e determinarne gli eventuali asintoti;
- (c) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia;
- (d) disegnare un grafico qualitativo.

3) Data la funzione

$$f(x) = \frac{1 - |x - 3|}{1 - x},$$

- (a) determinare il dominio, studiare il segno e calcolare i limiti significativi di f ;
- (b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia;
- (c) calcolare la derivata seconda e studiare la convessità e la concavità;
- (d) disegnare un grafico qualitativo.

4)** Data la funzione

$$f(x) = (x - 1)e^{\frac{1}{|x-1|}},$$

- (a) determinare il dominio e studiare il segno;
- (b) calcolare i limiti significativi di f e determinarne gli eventuali asintoti;
- (c) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia;
- (d) disegnare un grafico qualitativo.

INTEGRALI

1) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^1 x^2(1-x^2)^\alpha dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha = -\frac{1}{2}$.

2) Calcolare una primitiva di

$$f(x) = x \arctan^2 x$$

3) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^1 x(1-x)^\alpha dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha = -\frac{1}{2}$.

4)** Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1 - e^{2x}} dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha = 1$.

5) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$I(a) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \sqrt{x^2 - 1}} dx.$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha = 1$.

SERIE

1) Studiare la convergenza assoluta e la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{nx}{2n+1} \right)^n$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

2) Discutere al variare del parametro reale α la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(e^{\alpha/n^2} - \cos \frac{1}{n} + \frac{\log n}{n^3} \right)$$

3)* Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^2 + 1} \sin \frac{1}{n^\alpha}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

4)** Studiare convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum \frac{(\log x)^n}{4^n (n - \sqrt{n})}.$$

5) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin n \sin \frac{1}{n^2}.$$

LIMITI

1) Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 - x^2} + \log x}{x^{2\alpha} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

2) Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4}{e^{1 - \cos x} - \cosh \alpha x}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

3) Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(\cos x - 1 + x) + ax}{\sin[(e^x - 1)^2]}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$.

4)* Calcolare, al variare del parametro reale α , il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - e^{\frac{x^2}{2}} + e^{-\frac{1}{2x^2}}}{x^\alpha \log(1 + x^2)}$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

1)** Data l'equazione differenziale

$$y'' + 4y' + 4y = 1 - e^t,$$

a) determinarne l'integrale generale;

b) dire se ammette soluzioni limitate definitivamente per $t \rightarrow -\infty$;

c) determinare la soluzione y che soddisfa le condizioni $y(0) = \frac{1}{4}$, $y'(0) = 0$.

2)* Data l'equazione differenziale

$$y' = y^2 \frac{t}{(t+1)(t^2+4)},$$

a) determinarne le soluzioni costanti;

b) calcolare la soluzione y che soddisfa la condizione $y(0) = -1$, specificandone l'intervallo massimale di esistenza.

3) Risolvere il problema di Cauchy

$$y' = 2ty + y^3, \quad y(0) = 0.$$