Esercizi di Analisi Matematica 1
Corso Ingegneria Civile

L. Pandolfi

Esercizi 1/A

1. calcolare $(3^2)^2$, $(3^2)^{-3}$, $(3^3)^{-2}$, $\log_{10}\left(10^2 \cdot 10^3\right)$, $10^{\log_{10} 3+\log_{10} 2}$.
2. Scrivere la definizione di *monomio* e di *polinomio.* Definire il *grado* di un polinomio.
3. Tra le seguenti espressioni, dire quali rappresentano un polinomio, specificandone il grado:
   (a) $2x^2 - 3x$
   (b) $x^2 + |x|$
   (c) $x + (x-5)^2$
   (d) $x^2 + 4x^{1/2}$
   (e) $x^3 + 3x^{1/2} + 2$
   (f) $3x + x^{5/2}$
   (g) $x^2 + 3x + 2$
   (h) $x^2 + \sqrt{x} + 2$
   (i) $x^5 + (x^3 + x)^2 + 1$
4. Risolvere le seguenti equazioni:
   $\sin x = 1$, $\sin x = -1/\sqrt{2}$, $\sin x = 2$, $\sin x = 1/2$
   $\sin^2 x - \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin x + \sqrt{\frac{3}{2}} = 0$
   $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \cos^2 x - 1 = 0$
   $\sqrt{2}\sin x - 1 - \cos 2x = 0$
   $(10^{3t} - 1)(10^{2t} - 3) = 0.$
5. Scomporre in fattori il polinomio $x^3 + 3x^2 - 4$.
6. Disegnare i grafici delle funzioni $f(x) = x^2$ ed $f(x) = \sin x$ scegliendo come segmento unità sull'asse delle ordinate lo stesso come sull'asse delle ascisse oppure, rispettivamente, un segmento metà o doppio di esso.
7. Sovrapporre ai grafici ottenuti precedentemente quello di $f(x) = x$.
8. Sia $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Risolvere le due equazioni
   $f(x) = f(0)$, $f(x) = f(-1)$.

9. Per ogni valore del parametro m, risolvere i due sistemi seguenti, interpretando i risultati trovati mediante i grafici di opportune funzioni:

$$\begin{cases} y &= mx \\ y &= \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3\,; \end{cases} \qquad \begin{cases} y &= x \\ y &= -1 + mx\,. \end{cases}$$

10. Dati i punti $A(1,1)$ e $B(2,3)$ scrivere l'equazione della retta per essi e trovare la distanza dell'origine da tale retta.

11. Dati i punti $A(1,1)$ e $B(2,3)$ scrivere l'equazione della retta ortogonale al segmento AB, passante per il punto medio di tale segmento.

12. Siano $A(-1,0)$ e $B(0,1)$. Scrivere le equazioni dei seguenti luoghi geometrici:
    - il luogo dei punti C tali che $\overline{CA} = \overline{CB}$;
    - il luogo dei punti tali che $\overline{CA} - \overline{CB} = k$, con k numero fissato;
    - il luogo dei punti P tali che il perimetro del triangolo ABP valga 5;

13. Scrivere l'equazione del luogo geometrico dei punti equidistanti dalle rette r di equazione $y = 1$ ed s di equazione $x\sqrt{3} + y = 0$.

14. Mostrare che i punti (x, y) con $x = \cos t$, $y = \sin t$, al variare di t, sono tutti e soli i punti della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$.

15. Mostrare che se $x = 2\cos t$ ed $y = 3\sin t$, allora vale $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Scrivere cosa significa l'affermazione *il numero p è un numero primo* e scrivere la negazione logica di tale affermazione.

Scrivere la definizione di $\sqrt{x}$ (si ricorda che, per definizione, il numero $\sqrt{x}$ non può essere negativo).

Esercizi 2/A

1. Data la funzione $f(u) = u^3 - 1$, calcolarne i valori per $u = 1$, $u = 2$, $u = -2$.
2. Data la funzione $f(u) = u^3 - 1$, esprimere $f(x+1)$ ed $f(x-1)$ con x numero qualsiasi.
3. Dare la definizione di valore assoluto di un numero.
4. Calcolare, rispettivamente per $x = 3$, $x = 2$, $x = 0$, $x = -2$, $x = -3$ i valori delle funzioni $f(x) = |x - 1|$, $\quad f(x) = |x| - 1$, $\quad f(x) = -|x|$, $\quad f(x) = |-x|$.
5. Tracciare i grafici delle funzioni precedenti.
6. Tracciare i grafici delle funzioni $f(x) = 1/x$, $\quad f(x) = 1/(x-1)$, $\quad f(x) = [x-2]/x$, $f(x) = 1 - \frac{2}{x}$, $\quad f(x) = \frac{x-2}{x-1}$, $\quad f(x) = \sin x$, $\quad f(x) = \sin(x-1)$, $\quad f(x) = \sin(x+1)$, $f(x) = |x^2 - 1|$, $\quad f(x) = \left|\frac{x-2}{x}\right|$, $\quad f(x) = |\sin x|$.
7. tracciare i grafici delle funzioni $f(x) = \sin 2x$, $\quad f(x) = \sin \frac{x}{2}$.
8. Sia $f(t) = t^3 + 1$. Scrivere le espressioni di $f(t^2)$ e di $(f(t))^2$.
9. Sia $f(t) = 2t^2 + \frac{5}{t} + \frac{2}{t^2} + 5t$, mostrare che per ogni t vale $f(t) = f(\frac{1}{t})$.
10. Sia $f(x) = x^4 - 2x^2 + 7$. Mostrare che per ogni x vale $f(x) = f(-x)$.
11. Risolvere $f(x) = g(x)$ con $f(x) = x^2 + 6$, $g(x) = 5x$.
12. Risolvere, numericamente e graficamente, le equazioni $|f(x) + g(x)| = |f(x)| + |g(x)|$, con $f(x) = x + 1$, $g(x) = x - 2$.
13. Determinare i domini delle seguenti funzioni: $f_1(x) = \log[(1-x)(2-x)]$, $\quad f_2(x) = \log(1-x) + \log(2-x)$, $\quad f_3(x) = \log|(1-x)(2-x)|$, $\quad g_1(x) = \sqrt{(1-x)(2-x)}$, $g_2(x) = \sqrt{(1-x)} \cdot \sqrt{(2-x)}$, $\quad g_3(x) = \sqrt{|(1-x)(2-x)|}$, $\quad h_1(x) = \sqrt{\frac{1-x}{2-x}}$, $\quad h_2(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2-x}}$, $\quad h_3(x) = \sqrt{\left|\frac{1-x}{2-x}\right|}$.
14. Determinare il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{-e^{2x} + e^x + 2}$.
15. Risolvere le seguenti disequazioni, interpretando quindi i risultati mediante lo studio di grafici di opportune funzioni: $(x-1)(x-2) > 0$, $\quad x^2 - 2x \le x + 1$, $\quad \sqrt{7 - 2x} \ge x - 3$, $\begin{cases} x^2 - 1 \ge 0 \\ 3 - 2x \ge 0\,. \end{cases}$
16. Mostrare che l'espressione
$$f(x) = x \log x + \sqrt{-|\sin \pi x|}$$
definisce una successione.
17. Data l'equazione $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 3 = 0$, stabilire se essa rappresenta una circonferenza.
18. Scrivere l'equazione del fascio di rette che passano per il punto di intersezione delle due rette di equazione $x + y = 1$ e $2x - y = -4$. In questo fascio, trovare le rette che:
    - incidono l'asse delle ascisse sotto un angolo di $\pi/3$;
    - tagliano sull'asse y un segmento di lunghezza 1;

- sono tangenti alla circonferenza $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

Calcolare l'equazione della circonferenza di centro $C(1, 1)$ e raggio 3. Ciò fatto:

- stabilire se il punto $A(2, 3)$ è sulla circonferenza oppure interno o d esterno ad essa;
- stabilire se la retta r di equazione $3x + 4y + 8 = 0$ è secante, tangente o esterna alla circonferenza;
- calcolare i punti di intersezione tra la circonferenza e le rette per il suo centro C e, rispettivamente, parallela e ortogonale ad r.

19. Scrivere l'equazione della parabola di fuoco il punto $F(0, 1)$ e direttrice la retta $y = 2$. Scrivere inoltre le equazioni delle ellissi di centro l'origine, assi coincidenti con gli assi coordinati ed eccentricità k. Stabilire se tra tali ellissi ne esistono che sono tangenti alla parabola.

20. Si calcolino gli asintoti dell'iperbole γ

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1\,.$$

Siano r ed s le perpendicolari per l'origine a tali asintoti. Si scrivano le equazioni di r e di s. Si scriva quindi l'equazione dell'iperbole che ha r ed s per asintoti ed il cui vertice di ascissa positiva dista 1 dal vertice (di ascissa positiva) di γ.

21. Si fissi un sistema OXY cartesiano ortogonale. Sia $P(1, 1)$. Si determinino le coordinate di P rispetto ad un sistema di riferimento ottenuto dal primo in uno dei modi seguenti:

- traslando il sistema dato parallelamente a se stesso, in modo che l'origine venga a trovarsi in $(2, 0)$;
- traslando il sistema dato parallelamente a se stesso, in modo che l'origine venga a trovarsi in $(0, 2)$;
- traslando il sistema dato parallelamente a se stesso, in modo che l'origine venga a trovarsi in $(2, 2)$;

1. **Scrivere la definizione di *funzione monotona* e di *funzione pari* e la negazione logica di tali definizioni.**
2. **Scrivere cosa si intende dicendo *la funzione* $f(x)$ *è positiva,* e la negazione logica tale affermazione.**
3. **Mostrare, mediante opportuni contresempi, che le affermazioni seguenti *sono false:***
   - **Se $f(x)$ è crescente su $[-1, 1]$ allora $f(-x)$ è crescente.**
   - **Se $f(x)$ e $g(x)$ sono crescenti allora il loro prodotto $f(x)g(x)$ è una funzione crescente.**

Esercizi 3/A

1. Risolvere le equazioni seguenti:
$$\frac{1}{3}\sin x = 1\,, \qquad 2\sin x = 1\,, \qquad \tan x = 1\,, \qquad x^2 - 1 = 1\,.$$

2. Calcolare la controimmagine di 1 nei quattro casi
$$f_1(x) = \frac{1}{3}\sin x\,, \qquad f_2(x) = 2\sin x\,, \qquad f_3(x) = \tan x\,, \qquad f_4(x) = x^2 - 1\,.$$

3. Si risolvano le equazioni seguenti (rispetto all'incognita x e per ogni valore del parametro y)
$$3x + 1 = y\,, \qquad 3x^2 + 1 = y\,, \qquad x|x-2| + 2x = y\,.$$

4. Sia $f(x)$ una delle funzioni seguenti. Dire se $f(x)$ è invertibile sul suo dominio e, se possibile, scrivere l'espressione della funzione inversa:
$$f(x) = 3x + 1\,, \qquad f(x) = 3x^2 + 1\,, \qquad f(x) = x|x-2| + 2x\,.$$

5. Provare l'invertibilità della funzione definita su $(0, \pi/4)$, la cui espressione è:
$$f(x) = \frac{1}{\sin x \cos x}.$$
Scrivere esplicitamente il dominio della funzione inversa.

6. Trovare le immagini delle funzioni
$$f_1(x) = 3|x| - 1\,, \qquad f_2(x) = x|x-2| + 2x\,, \qquad f_3(x) = x^2 - 5\,.$$

7. Disegnare il grafico della funzione $f(x)$,
$$f(x) = \left|\frac{2x-4}{x-1}\right|$$
e trovare i più grandi intervalli nei quali $f(x)$ è invertibile.
Disegnare i grafici delle corrispondenti funzioni inverse.

8. Usando direttamente le definizioni, si verifichi (il simbolo $[x]$ denota la *parte intera* di x)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} [x] = +\infty$$
$$\lim_{x\to 1} \left|\frac{x}{x-1}\right| = +\infty\,.$$

9. Si usino i teoremi del confronto per giustificare le implicazioni seguenti:
$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \qquad \text{implica che} \qquad \lim_{x\to+\infty} Mx^r = +\infty$$
per ogni $M > 0$, $r > 1$;
$$\lim_{x\to 0} x = 0 \qquad \text{implica che} \qquad \lim_{x\to 0} Mx^r = 0$$
per ogni M, $r \in (0,1)$.

10. Si usino i teoremi del confronto per giustificare l'implicazione seguente:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \text{implica che} \qquad \lim \frac{1}{n^s} = 0$$

per ogni $s > 1$.

11. Mostrare, facendo uso della definizione, che la funzione $f(x) = \frac{x}{x+1}$ *non* è né un infinito né un infinitesimo per x tendente a $+\infty$.

1. Scrivere cosa significa l'affermazione *l'insieme* M *è limitato* e la sua negazione logica.

2. Scrivere cosa significa l'affermazione *la funzione* $f(x)$ *è limitata* e la sua negazione logica.

3. Mostrare, mediante opportuni contresempi, che le affermazioni seguenti *sono false:*

- **Se la funzione $f(x)$, definita su R, è pari, allora $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.**
- **Se la funzione $f(x)$, definita su R, è dispari, allora $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.**

Esercizi 4/A

1. Calcolare i limiti seguenti: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\cos x}{\sqrt{x}-1}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{3x^2-2}}$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{3x^2-2}}$, $\lim_{x\to 2} \frac{2x^3-5x^2-4x+12}{x^4-4x^3+5x^2-4x+4}$, $\lim_{x\to 0} \arctan \frac{1}{x}$.
2. Dire se vale l'uguaglianza ([ ] indica la *parte intera*)
$$\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{2}{\pi}\arctan x\right] = \left[\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\pi}\arctan x\right].$$
3. Dire per quali valori di x_0 si ha
$$\lim_{x\to x_0} \operatorname{sgn}\left(\frac{x^2-1}{2x^2+1}\right) = \operatorname{sgn}\left(\lim_{x\to x_0} \frac{x^2-1}{2x^2+1}\right).$$
4. Dire per quali valori di x_0 si ha ([ ] indica la *parte intera*)
$$\lim_{x\to x_0} \left[x^2-2\right] = \left[\lim_{x\to x_0} (x^2-2)\right].$$
5. Determinare λ in modo che valga
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{x^2+\lambda}-x\right) = 2\,.$$
6. Calcolare i limiti, per x tendente a zero, delle seguenti funzioni: $\frac{\sin x^4}{\sin^2 x^2}$, $\frac{x+\sin 4x}{x-\sin x}$, $\frac{\sin x-1}{x-\pi/2}$, $\frac{\sin(\sin x)}{x}$, $\frac{x+\sin x}{x-2\sin x}$, $\frac{1-\cos 2x}{x^5-\sin^3 x}$, $\frac{1-\sqrt{\cos x}}{2x^2+x^3}$, $\frac{\sqrt[3]{1-x^5}-\sqrt[3]{1+x^5}+(2/3)x^5}{x^5-\sin^5 x}$.
7. Calcolare i limiti per x tendente a $+\infty$ delle funzioni seguenti: $\frac{1-\cos(5/x^2)}{x^4+\arctan 3x}$, $\frac{x^3+2x^2+\sqrt{x}}{\sin^2(1/x)}$, $\left(1-\cos\frac{5}{x^2}\right)(x^4+\arctan 3x)$.
8. Studiare i limiti seguenti:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+xe^x)}{e^{-3x}-1}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+xe^x)}{e^{-3x}-1},$$
$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x\frac{1-x}{x-2}\sin x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+xe^x)}{e^{-3x}},$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\log(e+x)}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+3x}-2}{\sqrt{9+2x}-3},$$
$$\lim_{x\to 0} \left(\sqrt{x+1}\right)^{\frac{1}{\sin x}}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3-x)}{x-3e^{x-3}}.$$
9. Dire se esistono e in caso affermativo determinarli, valori di α tali che le funzioni seguenti siano ovunque continue:
$$f_1(x) = \begin{cases} \alpha x & \text{se } x<1 \\ 2 & \text{se } x=1 \\ x-\alpha & \text{se } x>1\,, \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1+\alpha^2}{x+1} & \text{se } x\le 0 \\ x^2+\alpha & \text{se } x>0\,, \end{cases}$$
$$f_3(x) = \begin{cases} \sin(x+\alpha) & \text{se } x<0 \\ \cos(x-\alpha) & \text{se } x\ge 0 \end{cases} \qquad f_4(x) = \begin{cases} \sin\frac{\alpha}{x} & \text{se } x>0 \\ x\cos\alpha x & \text{se } x\le 0\,. \end{cases}$$

10. Determinare i punti di continuità delle funzioni

$$f_1(x) = \begin{cases} \left|\arctan \frac{1}{x}\right| & \text{se} \quad x \neq 0 \\ \pi/2 & \text{se} \quad x = 0\,, \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 1 & \text{se} \quad x < 0 \\ -\cos x & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 4x - \frac{1}{x} & \text{se} \quad x < 0 \\ e^{1/x} & \text{se} \quad x > 0\,, \end{cases} \qquad f_4(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{se} \quad x < \frac{2}{\pi} \\ 1 & \text{se} \quad x \geq \frac{2}{\pi}\,. \end{cases}$$

11. Studiare $\lim x_n$ nei casi seguenti:

$$2^{1/n}\,, \qquad \sin(n\tfrac{\pi}{2})\,, \qquad \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n}\,,$$

$$x_n = \frac{3n^2 + 5n + 4}{2 + n^2}\,, \qquad x_n = \tfrac{5n^3 + 2n^2 - 3n + 7}{4n^3 - 2n + 7}\,, \qquad x_n = \frac{4n^2 - 4n + 3}{2n^3 + 3n + 4}\,,$$

$$x_n = \frac{2n^3}{2n^2 + 3} + \frac{1 - 5n^2}{5n + 1}\,, \quad x_n = \sqrt{2n + 3} - \sqrt{n - 1}\,, \quad x_n = n^2\left(n - \sqrt{n^2 + 1}\right)\,,$$

$$x_n = \frac{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3 + n} - \sqrt{n}}\,, \qquad x_n = \sqrt[3]{n^2 - n^3} + n\,, \qquad x_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}\,,$$

$$x_n = n\log(n+1) - n\log n\,, \quad n^2\log(n+1) - n^2\log n\,, \quad x_n = \sqrt[n]{n}\,.$$

12. Calcolare i limiti delle successioni seguenti: $(\sqrt[n]{n^8})$, $\big(\sqrt{2n+3} - \sqrt{n-1}\big)$, $\big(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n-}$

1. Scrivere cosa significa l'affermazione *f(x) è un infinitesimo per* x *tendente a* $+\infty$ e la sua negazione logica.

2. Scrivere cosa significa l'affermazione *f(x) è un infinito per* x *tendente a* 5 e la sua negazione logica.

3. Scrivere cosa vuol dire l'affermazione *la funzione* $f(x)$ *è continua in* $x = 5$ e la sua negazione logica.

4. Mostrare, mediante opportuni contresempi, che le affermazioni seguenti *sono false:*

- **se $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ e se $h(x)$ è continua in 0 allora $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)+h(x)}$ esiste finito.**
- **sia $f(x)$ definita su $[0,1]$ e discontinua in ciascuno dei punti $x_n$dell'immagine della successione iniettiva $\{x_n\}$. Se $x_0 = \lim x_n$ allora la funzione $f(x)$ è discontinua in x_0.**

Esercizi 5/A

1. Dire se è vero che le funzioni $\sin x$ e $\operatorname{sgn} \sin x$ hanno lo stesso ordine di grandezza per $x \to +\infty$; lo stesso per la coppia di funzioni $\sin x$ e $3 \sin x + \sin 2x$.

2. Per ciascuna delle coppie di funzioni seguenti, verificare che sono (infiniti o infinitesimi) dello stesso ordine e trovare la parte principale della prima rispetto alla seconda:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sqrt{2x^2 + x + 1}\,, \qquad g_1(x) = x - 1\,, \qquad \text{per } x \to +\infty \\ f_2(x) &= \sqrt{x+5} - \sqrt{5}\,, \quad g_2(x) = \sqrt{x+7} - \sqrt{7}\,, \quad \text{per } x \to 0. \end{aligned}$$

3. Confrontare gli infinitesimi, per $x \to 3$: $f(x) = x - 3$, $g(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{x} - 1}$, $h(x) = (\sqrt{x} - \sqrt{3})^2$.

4. Determinare gli ordini di infinitesimo per $x \to +\infty$ e rispetto ad $1/x$, delle funzioni

$$f(x) = \frac{2x^3 + \sqrt[3]{x^2}}{3x^4} \qquad g(x) = \arctan \frac{4}{x^4}\,.$$

5. Verificare che $\frac{(n+3)! - n!}{(n+1)!} \sim n^2$.

6. Calcolare i seguenti limiti:

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to 0} \frac{\sinh x - \sin x}{x^3}\,, && \lim_{x \to 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{e^{x^2} - e^{x^3}}\,, \\ &\lim_{x \to 0} \frac{(2 + \cos 3x - 3 \cosh x)^4}{\log(1 + x^2)}\,, && \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x - (3/2)x^2}{x^4}\,. \end{aligned}$$

7. Se esistono, calcolare gli asintoti obliqui delle seguenti funzioni

$$f(x) = \log(e^x + x)\,, \qquad g(x) = 2 - 2e^{-|x|} - x\,, \qquad h(x) = |x| e^{\frac{1+x}{2+x}}\,.$$

8. Calcolare le derivate prime delle funzioni

$$f_1(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \qquad f_2(x) = \frac{1}{\arcsin x}\,, \qquad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-\sqrt{x}}}}\,, \qquad f_4(x) = e^{-1/x^2}\,.$$

9. Dire se le funzioni

$$f_1(x) = |x|^x\,, \qquad f_2(x) = e^{-1/x^2}$$

sono prolungabili per continuità in 0 e, in caso affermativo, dire se l'estensione ottenuta è anche derivabile.

10. Determinare le costanti α e β in modo tale che le seguenti funzioni siano derivabili in $x = 0$:

$$f_1(x) = \begin{cases} (x-\beta)^2 + 2 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ \alpha \sin x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} (x-\beta)^2 - 2 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ \alpha \sin x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} (x-\alpha)^2 - 2 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ \alpha \sin x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases} \qquad f_4(x) = \begin{cases} e^x + \alpha \cos x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ \beta(x^2 + 3x + 1) & \text{se} \quad x < 0\,. \end{cases}$$

11. Sia:
$$f(x) = (x-2)\log|x-2|\,.$$
   (a) Determinare il dominio di $f(x)$ e provare che $f(x)$ ammette estensione continua $\hat{f}(x)$ ad $\mathbf{R}$;
   (b) studiare la derivabilità di $\hat{f}(x)$;
   (c) trovare gli zeri e gli eventuali punti di massimo e di minimo di $f(x)$, precisando se sono relativi o assoluti.

12. Sia $f(x) = \tanh|x^2-1|$. Studiarne la continuità e derivabilità; identificarne i punti di massimo e di minimo relativi ed assoluti; dire quante sono le soluzioni dell'equazione $f(x) = x^2$ comprese nell'intervallo $[-1,1]$. Infine, trovare α in modo tale che l'equazione $f(x) = \alpha x^2$ abbia almeno due soluzioni nell'intervallo $[0,\sqrt{2}]$.

13. Sia $x_n = 1 + s + s^2 + \cdots + s^n$. Provare che
$$x_n = \frac{1-s^{n+1}}{1-s}.$$
Usare il risultato precedente per studiare la convergenza della successione (x_n).

14. Fare uso dell'osservazione precedente per provare che se (x_n) è la successione di termine generale
$$x_n = \sin^2 1 + \lambda\sin^2 2 + \cdots + \lambda^n \sin^2 n\,,$$
con $0 \le \lambda < 1$, la successione (x_n) converge.

15. Sia x_0 qualsiasi e sia
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$
con $a > 0$. Provare che, se la successione (x_n) converge, il suo limite è $\sqrt{a}$.

1. scrivere cosa significa l'affermazione *la successione* (x_n) *è convergente* e la sua negazione logica.

2. Scrivere cosa significa l'affermazione *la successione* (x_n) *è divergente* e la sua negazione logica.

3. Scrivere cosa significa l'affermazione *la successione* (x_n) *è limitata* e la sua negazione logica.

4. Scrivere cosa significa l'affermazione *la successione* (x_n) *è definitivamente positiva,* e la sua negazione logica.

5. Mostrare, mediante opportuni contresempi, che le affermazioni seguenti *sono false:*

- **se una funzione ha un massimo in x_0 ivi essa è derivabile;**
- **se una funzione è priva di flessi essa è monotona.**
- **ogni successione definitivamente positiva è regolare.**
- **ogni successione definitivamente positiva è limitata oppure regolare.**

Esercizi 6/A

1. Sia
$$f(x) = \log(e^{7x} + 7x) - \log(e^{7x} - 7x)\,.$$
Provare che il suo dominio è contenuto nell'intervallo $(-1, +\infty)$; determinarne l'immagine; determinarne gli zeri e gli eventuali punti di massimo e di minimo (relativi ed assoluti); identificare almeno un intervallo aperto su cui $f(x)$ è invertibile. Infine, calcolare $\lim_{x\to+\infty} x^\beta f(x)$ al variare di β.

2. Sia
$$h(x) = 2\sin x + \frac{1}{2}\cos 2x\,.$$
Studiare la funzione nell'intervallo $[0, 2\pi]$ determinando in particolare il numero degli zeri ed i punti di estremo; provare che la funzione è invertibile nell'intervallo $[\pi/2, \pi/3]$ e scrivere l'espressione della funzione inversa. Discutere quindi l'esistenza dei seguenti limiti:
$$\lim_{x\to+\infty} x\left[h(x) + \frac{5}{2}\right], \qquad \lim_{x\to+\infty} x[h(x) + 5]\,.$$

3. Sia
$$f(x) = \sqrt[3]{\log^3 x - \log^2 x}\,.$$
Studiare le continuità e derivabilità di $f(x)$; determinarne massimi e minimi; determinare il più grande intervallo I contenente e su cui $f(x)$ è invertibile e determinare $J = f(I)$; Osservando che $f(e^2) = \sqrt[3]{4}$, calcolare la derivata di $f^{-1}(x)$ nel punto $\sqrt[3]{4}$. Provare che $f(x) \sim \log x$ per $x \to +\infty$.

4. Sia data la funzione
$$f(x) = x^2 + \sqrt{|x^2 - 1|}\,.$$
   (a) Se esistono, determinare i punti di non derivabilità;
   (b) verificare che per $x \to +\infty$, la funzione $f(x)$ è equivalente alla funzione x^2;
   (c) determinare i punti di estremo, sia relativi che assoluti;
   (d) determinare gli intervalli di monotonia e di convessità;
   (e) al variare del numero α, dire quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = \alpha$.

5. Sia
$$f(x) = x^2 \log|x| - ex\,.$$
   (a) Mostrare che la funzione $f(x)$ ammette un'estensione continua $g(x)$ ad $\mathbf{R}$;
   (b) provare che $g(x)$ è di classe C^1 ma non C^2;
   (c) determinare gli zeri di $f(x)$ e provare che essa ammette un minimo assoluto;
   (d) indicare gli intervalli di monotonia e di convessità di $f(x)$;
   (e) verificare che per $x \to +\infty$ vale $x^2 = \mathrm{o}(f)$ e che $f = \mathrm{o}(x^{2+\epsilon})$.

6. Calcolare le primitive delle funzioni seguenti: $\log^2 x$, $\frac{\arctan x}{x^2}$, $\frac{1}{\sin x}$, $x\log(1+x^2)$, $\dfrac{3x+1}{x^5 - 5x + 6}$, $\dfrac{x^4+1}{x^3 - x^2 + x - 1}$, $\dfrac{x^5 + 2x^4}{x^3 + 1}$, $\frac{1}{\sinh x}$.

7. Calcolare gli integrali seguenti

$$\begin{array}{llll}
\int \frac{1+\tan x}{1-\tan x}\,\mathrm{d}x & (\text{sost. } y=\tan x)\,; & \int \sqrt{x^2-4} & (\text{sost. } x = 2\cosh t)\,; \\
\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x & (\text{sost. } x=\sinh t)\,; & \int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x\,; & \int \cos(\log x)\,\mathrm{d}x\,; \\
\int x^3 \arcsin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\,; & \int \arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right)\,; & \int x e^{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x\,; & \int \arctan\left(1+x^2\right)\,\mathrm{d}x\,.
\end{array}$$

8. Siano $f(x) = 1/\sqrt[3]{x}$, $g(x) = 1/\sqrt[3]{|x|}$. Calcolarne le primitive (generalizzate) che si annullano in 0; tracciare i grafici delle funzioni e delle loro primitive.

9. Calcolare la primitiva (generalizzata) $F(x)$ di $f(x) = \mathrm{sgn}(\sin x)$ che si annulla per $x = 0$. Calcolare quindi la primitiva $G(x)$ di $F(x)$ che si annulla per $x = 0$ specificando se si tratta di una primitiva generalizzata. Tracciare infine i grafici di $f(x)$, $F(x)$, $G(x)$.

10. sia $f(x) = \min\{e^x, 2-x\}$, definita su $\mathbf{R}$. Calcolare la primitiva (generalizzata) $F(x)$ di $f(x)$ che verifica $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$ e tracciare i grafici di $f(x)$ e di $F(x)$.

11. Calcolare le primitive (generalizzate) delle seguenti funzioni:

$$f_1(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x<0 \\ \sin x & \text{se} \quad x>0\,, \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se} \quad x<0 \\ 2 & \text{se} \quad x=0 \\ \cos x & \text{se} \quad x>0\,, \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} x\log x & \text{se} \quad x>0 \\ \log 2 & \text{se} \quad x=0 \\ x\cos x & \text{se} \quad x<0\,. \end{cases} \qquad f_4(x) = \begin{cases} x\cdot\mathrm{sgn}(x+1) & \text{se} \quad x<0 \\ x^2 & \text{se} \quad x\geq 0\,. \end{cases}$$

1. **Scrivere cosa significa l'affermazione *la funzione* $f(x)$ *ha un punto di massimo in* x_0, e la sua negazione logica.**

2. **Scrivere cosa significa l'affermazione *La funzione* $F(x)$ *è una primitiva (in senso ordinario) di* $f(x)$ *su un intervallo* $[a, b]$, e la sua negazione logica.**

3. **Mostrare, mediante opportuni contresempi, che le affermazioni seguenti *sono false:***

   - **ogni primitiva generalizzata che prende valori strettamente positivi è una primitiva in senso ordinario;**
   - **le primitive di funzioni strettamente crescenti sono crescenti.**

Esercizi 7/A

1. Sia
$$f(x) = x \log_e x^2 .$$
   (a) Individuare il dominio della funzione $f(x)$ e calcolare i limiti per x tendente agli estremi del dominio;
   (b) mostrare che esiste un'unica estensione continua $\hat{f}(x)$ di $f(x)$ ad $\mathbf{R}$ e scriverne l'espressione;
   (c) calcolare se esistono gli estremi relativi ed assoluti della funzione $f(x)$;
   (d) tracciare qualitativamente il grafico di $f(x)$;
   (e) usando le informazioni contenute nel grafico di $f(x)$ tracciare qualitativamente il grafico della funzione $\exp\{\hat{f}(x)\}$;
   (f) dire se la funzione $\exp\{\hat{f}(x)\}$ è derivabile in $x = 0$.

2. Sia
$$f(x) = \log(1 + ax) + \frac{x}{1 + ax}$$
   con a parametro reale minore di -1.
   (a) Determinare il dominio e gli eventuali asintoti della funzione; la monotonia ed il numero degli zeri; la convessità;
   (b) tracciare qualitativamente il grafico della funzione;
   (c) usando le informazioni precedenti, tracciare qualitativamente il grafico di $g(x) = \sqrt[3]{f(x)}$;
   (d) individuare eventuali punti di non derivabilità di $g(x)$;
   (e) determinare le restrizioni invertibili di $g(x)$, indicando i rispettivi codomini.

3. Trovare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali:
$$\begin{array}{ccc} y' = 2 & y' = 2x & y' = 2y \\ y' = 2xy & y' = 2xy + 1 & y' = 2xy + y \\ y' = \dfrac{1}{2} & y' = \dfrac{1}{2x} & y' = \dfrac{1}{2x} y . \end{array}$$

4. Calcolare la tangente all'iperbole $xy = k$ nel suo generico punto (x_0, y_0). Calcolare l'area del triangolo individuato dall'origine e dai punti nei quali tale tangente interseca gli assi coordinati.

5. Se γ e γ' si intersecano in un punto P, si chiama angolo delle due curve in tale punto quello fatto dalle rispettive tangenti nel punto P. Sia γ la parabola di equazione $y = x^2$. Scrivere l'equazione della retta ortogonale a γ in $P(1, 1)$. Dire se esistono circonferenze ortogonali a γ in P ed eventualmente determinarle.

6. Sia γ la parabola di equazione $y = x^2$. Scrivere l'equazione delle parabole ad essa ortogonali in $(0, 0)$.

1. Scrivere cosa significa l'affermazione *la funzione* $f(x)$ *è di classe* $C^0(0, 1)$ e la sua negazione logica.

2. **Scrivere cosa significa l'affermazione *la funzione* $f(x)$ *è di classe* $C^3(0,1)$ e la sua negazione logica.**

3. **Mostrare, mediante opportuni contresempi, che le affermazioni seguenti *sono false:***

   - **Se $f(x)$ è di classe $C^1(-1,1)$ e se $f'(0) > 0$ allora esiste un intorno di 0 su cui $f(x)$ è crescente;**
   - **Se $f(x)$ è convessa su $(-1,1)$ allora essa ammette derivata seconda in ogni punto di $(-1,1)$.**

Esercizi 1/B

1. Calcolare la formula di McLaurin arrestata all'ordine 2 e quella arrestata all'ordine 3 delle funzioni $f_1(x) = 2 - x + x^2 - 3x^3$, $f_2(x) = 2 - x + x^2 - 3x^3 + 6x^5$, $f_3(x) = 2 - x + x^2 - 3x^5 + 6x^6$.

2. Calcolare la formula di Taylor di centro $x_0 = 2$, arrestata all'ordine 3 della funzione $f_1(x) = 3 - x + x^2$.

3. Calcolare la formula di McLaurin arrestata al 6^o ordine della funzione $f(x) = \sin x$.

4. Calcolare la formula di McLaurin arrestata al 4^o ordine delle funzioni $f_1(x) = \log(1 - \sin^2 x)$ e $f_2(x) = \frac{e^x}{1+x}$.

5. Calcolare la formula di Taylor arrestata al 4^o ordine, di centro $x_0 = \pi/2$, della funzione $f(x) = \sin x$.

6. Calcolare la formula di Taylor arrestata al generico ordine n e di centro $x_0 = 1$, della funzione $f(x) = e^x$.

7. Calcolare la formula di Taylor arrestata al generico ordine n e di centro $x_0 = 3$, delle funzione $f(x) = \log x$.

8. Determinare la parte principale, per $x \to 0$, delle seguenti funzioni: $f(x) = \cosh^2 x - \sqrt{1 + 2x^2}$, $g(x) = e^{-x \cos x} + \sin x - \cos x$. Calcolare quindi
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)^2}.$$

9. Si sa che una funzione $f(x)$ soddisfa alla seguente uguaglianza: $f'(x) = f^2(x)$. Inoltre si sa che $f(0) = 3$. calcolare $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$.

10. Si sa che la funzione $f(x)$ soddisfa all'equazione $f'(x) = x^3 f(x)$. Inoltre si sa che $f(0) = 2$. Scrivere il polinomio di McLaurin di $f(x)$ di ordine 3.

11. Si sa che la funzione $f(x)$ soddisfa
$$f'(x) = 3f(x), \qquad f(0) = 3.$$
Calcolare la derivata in $x = 0$ delle funzioni
$$e^{(\sin x)\cdot f(x)}, \qquad \frac{f(x)}{\cos x}, \qquad \sin(f(x)), \qquad f(\sin x).$$

12. Si sa che, per $x \to 0$, vale:
$$f(x) = x + 2x^2 + \mathrm{o}(x^2).$$
Calcolare la derivata seconda in $x = 0$ delle funzioni
$$f(\sin x), \qquad f(e^x - 1), \qquad e^{f(x)}.$$

13. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin di ordine massimo possibile della funzione
$$f(x)=\begin{cases} \sin x-\log(1+x) & \text{se} \quad x\geq 0 \\ \frac{1}{2}e^{x^2}-\frac{1}{2} & \text{se} \quad x\leq 0\,. \end{cases}$$
Osservando lo sviluppo trovato, dire quanto valgono la derivata prima e seconda di $f(x)$ in zero, e dire se esiste, in zero, la derivata terza.

14. Determinare α e β in modo tale che esista lo sviluppo di MacLaurin fino al secondo ordine della funzione
$$f(x)=\begin{cases} e^{2x}-\log(1+4x) & \text{se} \quad x\leq 0 \\ \alpha-2x+\beta x^2 & \text{se} \quad x>0\,. \end{cases}$$

15. Si consideri la funzione
$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{2}\sin x & \text{se} \quad x\leq \pi/4 \\ 1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 & \text{se} \quad x>\pi/4\,. \end{cases}$$
Scriverne lo sviluppo di Taylor, centrato in $\pi/4$, del massimo ordine possibile e dedurne il massimo ordine di derivabilità in $\pi/4$.

16. Si sa che, per $x\to 0$,
$$f(x)=\frac{\pi}{4}+7x+6x^2+\mathrm{o}(x^2)\,.$$
Calcolare la derivata prima, nel punto $x=0$, delle funzioni seguenti:
$$\sin(f(x))\,,\qquad f(xe^x)\,,\qquad \frac{\cos x}{f(x)}\,,\qquad \frac{\log f(x)}{f(x)-1}\,.$$

17. Si sa che vale, per $x\to 2$,
$$f(x)=1+3(x-2)+4(x-2)^2+\mathrm{o}((x-2)^2)\,.$$
Calcolare la derivata prima in $x=2$ delle funzioni
$$\left(\log^2 f(x)\right)\cdot e^{\frac{f(x)}{\cos x}}\,,\qquad f\left(\frac{2+\sin(x-2)}{e^{x-2}}\right)$$
e la derivata seconda in $x=2$ delle funzioni
$$\cos\left(f^2(x)\right)\,,\qquad e^{f^2(x)}\,.$$

1. Scrivere cosa significa l'affermazione *la funzione* $f(x)$ *è derivabile in* x_0 e la sua negazione logica.

2. Scrivere cosa significa l'affermazione *la funzione* $f(x)$ *è derivabile su* (a,b) e la sua negazione logica.

3. Mostrare, mediante opportuni contresempi, che le affermazioni seguenti *sono false:*

- **Se $f(x)$ è derivabile in x_0 allora esiste un intorno di x_0 su cui essa è continua;**
- **Se $f(x)$ è convessa su $(-1,1)$ allora essa ammette derivata seconda in ogni punto di $(-1,1)$.**

Esercizi 1/B

1. Calcolare la formula di McLaurin arrestata all'ordine 2 e quella arrestata all'ordine 3 delle funzioni $f_1(x) = 2 - x + x^2 - 3x^3$, $f_2(x) = 2 - x + x^2 - 3x^3 + 6x^5$, $f_3(x) = 2 - x + x^2 - 3x^5 + 6x^6$.

2. Calcolare la formula di Taylor di centro $x_0 = 2$, arrestata all'ordine 3 della funzione $f_1(x) = 3 - x + x^2$.

3. Calcolare la formula di McLaurin arrestata al 6^o ordine della funzione $f(x) = \sin x$.

4. Calcolare la formula di McLaurin arrestata al 4^o ordine delle funzioni $f_1(x) = \log(1 - \sin^2 x)$ e $f_2(x) = \frac{e^x}{1+x}$.

5. Calcolare la formula di Taylor arrestata al 4^o ordine, di centro $x_0 = \pi/2$, della funzione $f(x) = \sin x$.

6. Calcolare la formula di Taylor arrestata al generico ordine n e di centro $x_0 = 1$, della funzione $f(x) = e^x$.

7. Calcolare la formula di Taylor arrestata al generico ordine n e di centro $x_0 = 3$, delle funzione $f(x) = \log x$.

8. Determinare la parte principale, per $x \to 0$, delle seguenti funzioni: $f(x) = \cosh^2 x - \sqrt{1 + 2x^2}$, $g(x) = e^{-x \cos x} + \sin x - \cos x$. Calcolare quindi
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)^2}\,.$$

9. Si sa che una funzione $f(x)$ soddisfa alla seguente uguaglianza: $f'(x) = f^2(x)$. Inoltre si sa che $f(0) = 3$. calcolare $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$.

10. Si sa che la funzione $f(x)$ soddisfa all'equazione $f'(x) = x^3 f(x)$. Inoltre si sa che $f(0) = 2$. Scrivere il polinomio di McLaurin di $f(x)$ di ordine 3.

11. Si sa che la funzione $f(x)$ soddisfa
$$f'(x) = 3f(x)\,, \qquad f(0) = 3\,.$$
Calcolare la derivata in $x = 0$ delle funzioni
$$e^{(\sin x)\cdot f(x)}\,, \qquad \frac{f(x)}{\cos x}\,, \qquad \sin(f(x))\,, \qquad f(\sin x)\,.$$

12. Si sa che, per $x \to 0$, vale:
$$f(x) = x + 2x^2 + \mathrm{o}(x^2)\,.$$
Calcolare la derivata seconda in $x = 0$ delle funzioni
$$f(\sin x)\,, \qquad f(e^x - 1)\,, \qquad e^{f(x)}\,.$$

13. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin di ordine massimo possibile della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin x - \log(1+x) & \text{se} \quad x \geq 0 \\ \frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2} & \text{se} \quad x \leq 0\,. \end{cases}$$

Osservando lo sviluppo trovato, dire quanto valgono la derivata prima e seconda di $f(x)$ in zero, e dire se esiste, in zero, la derivata terza.

14. Determinare α e β in modo tale che esista lo sviluppo di MacLaurin fino al secondo ordine della funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} - \log(1+4x) & \text{se} \quad x \leq 0 \\ \alpha - 2x + \beta x^2 & \text{se} \quad x > 0\,. \end{cases}$$

15. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\sin x & \text{se} \quad x \leq \pi/4 \\ 1 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 & \text{se} \quad x > \pi/4\,. \end{cases}$$

Scriverne lo sviluppo di Taylor, centrato in $\pi/4$, del massimo ordine possibile e dedurne il massimo ordine di derivabilità in $\pi/4$.

16. Si sa che, per $x \to 0$,

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + 7x + 6x^2 + o(x^2)\,.$$

Calcolare la derivata prima, nel punto $x = 0$, delle funzioni seguenti:

$$\sin(f(x))\,, \qquad f(xe^x)\,, \qquad \frac{\cos x}{f(x)}\,, \qquad \frac{\log f(x)}{f(x) - 1}\,.$$

17. Si sa che vale, per $x \to 2$,

$$f(x) = 1 + 3(x-2) + 4(x-2)^2 + o((x-2)^2)\,.$$

Calcolare la derivata prima in $x = 2$ delle funzioni

$$\left(\log^2 f(x)\right) \cdot e^{\frac{f(x)}{\cos x}}\,, \qquad f\left(\frac{2 + \sin(x-2)}{e^{x-2}}\right)$$

e la derivata seconda in $x = 2$ delle funzioni

$$\cos\left(f^2(x)\right)\,, \qquad e^{f^2(x)}\,.$$

1. Scrivere cosa significa l'affermazione *la funzione* $f(x)$ *è derivabile in* x_0 e la sua negazione logica.

2. Scrivere cosa significa l'affermazione *la funzione* $f(x)$ *è derivabile su* (a,b) e la sua negazione logica.

3. Mostrare, mediante opportuni contresempi, che le affermazioni seguenti *sono false:*

- **Se $f(x)$ è derivabile in x_0 allora esiste un intorno di x_0 su cui essa è continua;**
- **Se $f(x)$ è convessa su $(-1,1)$ allora essa ammette derivata seconda in ogni punto di $(-1,1)$.**

Esercizi 2/B

1. Si sa che vale, per $x \to 2$,
$$f(x) = 11 - 22x + 4x^2 + \mathrm{o}((x-2)^2)\,.$$
Calcolare la derivata prima in $x = 2$ delle funzioni
$$\left(\log^2 |f(x)|\right) \cdot e^{\frac{f(x)}{\cos x}}\,, \qquad f\left(\frac{2 + \sin(x-2)}{e^{x-2}}\right)$$
e la derivata seconda in $x = 2$ delle funzioni
$$\cos f^2(x)\,, \qquad e^{f^2(x)}\,.$$

2. Si sa che la funzione $f(x)$ soddisfa all'equazione $f''(x) = 2f(x) - 3f'(x)$. Inoltre si sa che $f(0) = 2$, $f'(0) = 0$. Scrivere il polinomio di McLaurin di $f(x)$ di ordine 3.

3. Si sa che la funzione $f(x)$ soddisfa all'equazione $f'''(x) = -f(x) + 3f'(x) - f''(x)$. Inoltre si sa che $f(0) = 2$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 1$. Scrivere il polinomio di McLaurin di $f(x)$ di ordine 3.

4. Si sa che la funzione $f(x)$ verifica l'uguaglianza
$$f'(x) = 2f(x) - f^2(x)$$
e che inoltre $f(0) = 1$. Trovare la prima derivata di $f(x)$ che si annulla per $x = 0$.

5. Si sa che la funzione $f(x)$ verifica
$$f'(x) = \frac{f(x)}{f^2(x)}\,.$$
Mostrare che se $f(0) < 0$ allora $f(x)$ è *convessa* in $x_0 = 0$.

6. Provare che le due funzioni
$$f_1(x) = e^{x^2/2}\,, \qquad f_2(x) = -e^{x^2/2}$$
soddisfano all'uguaglianza $f'(x) = xf(x)$. Tracciare il grafico delle due funzioni $f_1(x)$ ed $f_2(x)$.

7. Mostrare che ogni funzione $f(x)$ positiva che verifica $f'(x) = xf(x)$ è una funzione convessa.

8. Mostrare che $f(x) = e^{-x^2/2}$ verifica l'equazione $f'(x) = -xf(x)$. Dedurre da questa osservazione che $f(x)$ ha per punti di flesso i punti $x = \pm 1$.

9. Sia $f(x, y) = \cos x + \sin y$ e sia $x(t) = e^t$, $y(t) = \log t$. calcolare il dominio della funzione composta $f(x(t), y(t))$.

10. Sia $f(x, y) = \sqrt{x} - \sqrt{y}$ ed $x(t) = t$, $y(t) = t^2$. Calcolare il dominio della funzione composta.

11. Sia $f(x, y) = \sin x\sqrt{\cos y}$ ed $x(t) = t^2$, $y(t) = t$. Calcolare il dominio della funzione composta.

12. Sia $f(x,y) = y^2\sqrt{x}$ ed $x(t) = t^2$, $y(t) = t^2$. Se esistono, calcolare massimi e minimi della funzione composta.

1. Scrivere cosa significa l'affermazione *la funzione* $f(x)$ *è convessa in* x_0, e la sua negazione logica.

2. Sia $f(x,y)$ una funzione di due variabili e $x(t)$, $y(t)$ siano funzioni della variabile t. Sulla base degli esercizi svolti e della definizione nota per funzioni di una variabile, scrive cosa si intende col simbolo $f(x(t),y(t))$.

3. Mostrare, mediante opportuni contresempi, che le affermazioni seguenti *sono false:*

- **se $f(x)$ ammette polinomio di MacLaurin di ordine 2 allora essa è continua in un intorno di 0.**
- **ogni funzione crescente e convessa ammette formula di Taylor di ordine 2 in ciascun punto del suo dominio.**

Esercizi 3/B

1. **Nelle curve seguenti, $t \in (-1, 1)$. Accertarsi che il punto $(x(0), y(0))$ sia semplice e scrivere le equazioni della tangente e della normale in tale punto.**

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t\,; \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = \cos(2\pi t) \\ y(t) = \sin(2\pi t)\,; \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = \sin(2\pi t) \\ y(t) = \cos(2\pi t)\,; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = t\cos(2\pi t) \\ y(t) = t\sin(2\pi t)\,; \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t + t^3\,; \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = t + t^3 \\ y(t) = -te^t\,. \end{cases}$$

2. **Il termine "parametro" indica un numero di cui non si specifica esplicitamente il valore, ma che si intende fissato.**

   - **Indichiamo con y un parametro. Sia $f(x) = \sin(xy^2)$. Disegnare il grafico di $f(x)$ per vari valori di y. Per ogni valore di y, calcolare il polinomio di Mc Laurint del secondo ordine della funzione $f(x)$.**
   - **Ripetere lo stesso esercizio per la funzione $g(y) = \sin(xy^2)$ considerando x un parametro.**
   - **Si consideri ora la funzione $F(x, y) = \sin(xy)$, delle *due* variabili x ed y e si consideri la curva**

$$\begin{cases} x(t) = t + t^3 \\ y(t) = -t^2\,. \end{cases} \tag{1}$$

   Si scriva l'espressione della funzione composta $F(x(t), y(t))$ e se ne scriva il polinomio di Mc Laurint del secondo ordine.

3. **Si svolga un'esercizio analogo al precedente, con $F(x, y) = e^x \log(-y)$, e la medesima curva in (1).**

4. **Sia $F(x, y) = xe^{-y}$. Si scriva il polinomio di Mc Laurint di ordine 2 delle funzioni che si ottengono fissando prima il valore di y e poi quello di x. Si scriva quindi il polinomio di Mc Laurint di ordine 2 della funzione $F(x(t), y(t))$, con $x(t) = \sin t$, $y(t) = \sin t$.**

5. **Sia $F(x, y) = x^2 + y^2$ e sia $x(t) = -t^2$, $y(t) = t^3$, $t \in [-1, 1]$. Si calcolino gli estremi della funzione $F(x(t), y(t))$.**

6. **Sia $F(x, y) = e^{x^2 - y^2}$ e sia $x(t) = -t$, $y(t) = t - 1$, $t \in [-1, 1]$. Si calcolino gli estremi di $F(x(t), y(t))$.**

7. **Si sa che la funzione $f(x)$ verifica**

$$f'(x) = f^2(x)\,.$$

   Si sa inoltre che i punti di coordinate $(\frac{1}{2}, -2)$, $(1, -1)$, $(2, -\frac{1}{2})$, $(3, -\frac{1}{3})$ appartengono al grafico della funzione. Usare queste informazioni per tracciare le tangenti al grafico di $f(x)$ nei 4 punti suddetti; usare le tangenti tracciate per approssimare il grafico di $f(x)$.

8. **Si sa che $y(x)$ risolve**

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x} y(x) = \cos y(x)\,, \qquad y(0) = 1\,.$$

Calcolare la derivata prima in $x = 0$ delle funzioni

$$e^{y^2(x)}\,, \qquad \cos\frac{1}{y(x) - 4/\pi}\,, \qquad \arctan\{1 + y^2(x)\}\,, \qquad \log\{y(\arctan x) + 1\}\,.$$

9. **Si sa che $y(x)$ risolve**

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}y(x) = \cos y\,, \qquad y(1) = 1/2\,.$$

Calcolare la derivata seconda in $x = 1$ delle funzioni

$$y^2(x)\,, \qquad \arcsin(y(x)\cdot\cos x)\,, \qquad \sin\left(x^2 y(x)\right)\,.$$

10. **Si sa che $y(x)$ risolve**

$$\frac{\mathbf{d}^2}{\mathbf{d}x^2}y(x) = -y(x)\,, \qquad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0\,.$$

Calcolare la derivata seconda in $x = 0$ delle funzioni $\sin y(x)$ e $y(\sin x)$.

1. **Scrivere la definizione di tangente e di normale ad una curva.**

2. **La seguente affermazione non è stata spiegata a lezione: *il punto* (x_0, y_0) *è estremo della funzione di due variabili* $F(x, y)$*, vincolato alla curva* γ*.* Cercare di immaginarne il significato e descriverlo per iscritto.**

3. **Mostrare, mediante opportuni contresempi, che le affermazioni seguenti *sono false:***

   - **Se $f(x)$ è positiva allora i coefficienti della sua formula di McLaurin sono positivi;**
   - **Una curva piana è sempre il grafico di una funzione.**

Esercizi 4/B

1. **Identificare le regioni del piano (x, y) nelle quali le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali sono monotone:**

$$y' = |y| \log(1 + y^2)\,, \qquad y' = y^3\,, \qquad y' = (1 + e^y)x\,,$$
$$y' = e^x y \log y\,, \quad y' = y^2 \log x\,, \quad y' = (1 + y^2)(1 + x^2)\,.$$

2. **Disegnare sul piano (x, y) gli insiemi nei cui punti le soluzioni delle equazioni differenziali seguenti hanno tangente di pendenza 1:**

$$y' = y^2\,, \quad y' = y/x\,, \quad y' = xy^2\,,$$
$$y'y = x\,, \quad y' = x^2y^2\,, \quad y' = \tan xy\,,$$
$$y'y^2x = 1\,, \quad y' = \sin xy\,, \quad y' = \cos y/x\,.$$

3. **Dire se le seguenti equazioni differenziali ammettono soluzioni limitate:**

$$y' = y\,, \quad y' = \log(1 - y)\,, \quad y' = \log(1 + |1 - y^2|)\,,$$
$$y' = \sin \arctan y\,, \qquad y' = \cos y^2\,, \qquad y' = (1 - y^2) \cos y\,.$$

4. **Trovare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali:**

$$y' = y^2 \log x\,, \quad y' = (1 + y^2)(1 + x^2)\,, \quad y' = (1 + e^y)x\,,$$
$$y' = e^x y \log y\,, \qquad y' = \tfrac{y^2-5y+6}{1+x^2}\,, \qquad y' = \frac{xy}{x^2 + y^2}\,,$$
$$y'' = y' \qquad xy'' = y' \qquad y'' - 2y' - 3y = 0\,,$$
$$y'' = -2y\,, \qquad y'' = -y - 1\,, \qquad y'' = -y - 2\,.$$

5. **Risolvere i seguenti sistemi di equazioni differenziali:**

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = 2y\,, \end{cases} \quad \begin{cases} x' = y \\ y' = \frac{t}{y}\,, \end{cases} \quad \begin{cases} x' = y \\ y' = x\,, \end{cases}$$
$$\begin{cases} y' = x \\ x' + 4y = 2t \end{cases} \quad \begin{cases} y' = x \\ t^2x' = x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} y' = x + 1 \\ x' = y + x\,. \end{cases}$$

Mostrare, mediante opportuni contresempi, che le affermazioni seguenti *sono false:*

- **Ogni equazione differenziale $y' = f(x, y)$, il cui secondo membro non è definito per $x = x_0$, ammette almeno una soluzione $y(x)$ priva di limite finito per $x \to x_0$.**
- **Ogni equazione differenziale $y' = f(x, y)$, il cui secondo membro cambia segno al variare di x e di y, ammette almeno una soluzione che non è monotona.**

Esercizi 5/B

1. **Trovare le equazioni differenziali che sono soddisfatte dalle funzioni che, in ciascun punto x_0 del loro dominio, soddisfano alla proprietà seguente:**

   (a) **L'area del triangolo che formano la tangente in $(x_0, f(x_0))$, la retta verticale per x_0 e l'asse delle ascisse è costante, uguale al numero k.**

   (b) **La lunghezza del segmento tagliato sull'asse delle ascisse dalla tangente in $(x_0, f(x_0))$ e dalla normale a tale tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$ misura $2k$, costante.**

   (c) **La tangente in $(x_0, f(x_0))$ taglia l'asse delle ascisse nel punto di ascissa $x_0/2$.**

   (d) **La tangente in $(x_0, f(x_0))$ taglia l'asse delle ascisse nel punto di ascissa $f^2(x_0)/2$.**

   (e) **la distanza di x_0 dal punto di intersezione con l'asse delle ascisse della tangente in $(x_0, f(x_0))$ è kx_0, con k costante.**

2. **Disegnare sul piano i punti che corrispondono ai numeri complessi $3 + i$, $-i + 2$, $\quad -2 - 3i$.**

3. **Calcolare il modulo dei numeri complessi $2 + i$, $\quad 2 - i$, $\quad 1 + 2i$, $\quad 1 - 2i \quad$ e quindi disegnare i punti del piano che corrispondono a questi numeri.**

4. **Si consideri la trasformazione da C in sé definita da $f(z) = z^2$. Disegnare l'immagine delle rette $z = x$, $\quad z = iy$, $\quad z = x(1 + i)$, $\quad 1 + it$.**

5. **Calcolare $(1 + 2i)^3$.**

6. **Notando che $137 = 4 \cdot 34 + 1$, calcolare i^{137}.**

7. **Calcolare il prodotto ed il quoziente dei numeri $\quad \sqrt{5} - i\sqrt{15} \quad$ e $\quad 1 - i$.**

8. **Calcolare le parti reali e immaginarie dei numeri complessi seguenti:**

$$\frac{(1+i)^2}{1-i}, \qquad \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{3+i}{3-i}.$$

1. **Scrivere cosa significa l'espressione *la funzione* $y(x)$ *risolve l'equazione differenziale* $y' = F(x, y)$ *sull'intervallo* (a, b)**

2. Mostrare, mediante opportuni contresempi, che le affermazioni seguenti *sono false:*

- **se $y(x)$ risolve un'equazione differenziale su un intervallo allora essa è monotona.**
- **se $y_1(x)$ ed $y_2(x)$ risolvono la medesima equazione differenziale allora i grafici di $y_1(x)$ e di $y_2(x)$ non si intersecano.**

1. **Rappresentare sul piano complesso le coppie di numeri (x, y) tali che $z = x + iy$ risolve l'equazione**
$$z^3 = i\bar{z}^3 \, .$$

2. **Rappresentare sul piano complesso le coppie di numeri (x, y) tali che $z = x + iy$ risolve l'equazione**
$$(z + i\bar{z})^2 = -i(z - \bar{z})^2 \, .$$

3. **Scrivere in forma trigonometrica le soluzioni dell'equazione $z^4\bar{z} = (1 - i)^5$.**

4. **Rappresentare sul piano complesso le coppie di numeri (x, y) tali che $z = x + iy$ risolve**
$$|\, z + 1 \,| < |\, z - 1 \,| < 2 \, .$$

5. **Porre i seguenti numeri complessi in forma trigonometrica:** 1, $\quad -2$, $\quad -i$, $4i$, $\quad 1 + i$, $\quad (1 + i)/2$, $\quad 2 - i\sqrt{12}$.

6. **Dire quale delle seguenti espressioni rappresenta un numero complesso scritto in forma trigonometrica:**
$$\textbf{a)} \quad 3(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{4}) \, , \quad \textbf{b)} \quad 2(\cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3}) \, , \quad \textbf{c)} \quad 4(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) \, ,$$
$$\textbf{d)} \quad 4(\frac{1}{\sqrt{3}} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) \, , \qquad \textbf{e)} \quad 1 \, , \qquad \textbf{f)} \quad 3(\frac{2}{\sqrt{2}} + i\frac{2}{\sqrt{2}}) \, .$$

7. **Disegnare sul piano i punti che corrispondono ai numeri complessi precedenti.**

8. **Calcolare**
$$\frac{(1 - i)^6}{(1 + i)^7} \, .$$

9. **Calcolare le radici quadrate, terze, quarte e quinte di 1 e disegnare i punti corrispondenti.**

10. **Nei casi** $z = 2$, $\quad z = -2$, $\quad z = 2i$, $\quad z = \frac{1}{2}$, $\quad$ **disegnare sul piano i punti che corrispondono alle potenze di esponente** 0, $\quad \pm 1$, $\quad \pm 2$, $\quad \pm 3$, $\quad \pm 4$.

11. **Sia $z = (1 + i)^4$. Calcolare le radici quarte di z.**

12. **Risolvere le equazioni**
$$z^2 + iz - i = 0 \, , \quad z^4 - 2(1 - i)z^2 - 4i = 0 \, , \quad z^6 + \frac{1}{4}z^4 - z^2 - \frac{1}{4} = 0 \, .$$

13. **Rappresentare sul piano complesso il numero**
$$z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{200} \, .$$

14. **Costruire il polinomio di grado minimo che ha per radici *doppie* i numeri $1 + i$, $2 - i$.**

15. Costruire il polinomio di grado minimo *a coefficienti reali* che ha per radici *doppie* i numeri $1+i$, $2-i$.

16. Costruire il polinomio di grado minimo *a coefficienti reali* che ha per radici *doppie* i numeri $1+i$, $2-i$ e per radice semplice il numero 5.

17. Individuare i domini delle funzioni

$$f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}\,,\quad f(x,y)=\log\left(\tfrac{x-y}{x+y}-1\right)\,,\quad f(x,y)=\sin\frac{x}{y}\,,$$
$$f(x,y)=\sin\left(\frac{x}{y}-2\right)\,,\qquad f(x,y)=e^{x\sqrt{y}}\,,\qquad f(x,y)=\log\left(x^2+3y^2-4\right)\,,$$
$$f(x,y)=\log\left(x^2-y^2-4\right)\,,\qquad f(x,y)=\tfrac{1}{y-x^2}\,,\qquad f(x,y)=\log\left(\sin(xy)\right)\,.$$

18. Studiare la continuità delle funzioni

$$f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2-1}\,,\quad f(x,y)=\log y\{e^x-1\}\,,\quad f(x,y)=\log\left(x^2-y^2-1\right)\,.$$

19. Studiare la continuità nell'origine delle funzioni che per $(x,y)\neq(0,0)$ sono definite come segue, e sono definite uguali a zero per $(x,y)=(0,0)$:

$$f(x,y)=\frac{y}{x}\,,\quad f(x,y)=\tfrac{x^2+y^2}{x-y}\,,\quad \frac{x-y}{x^2-y^2}\,.$$

20. Calcolare tutte le derivate parziali prime e seconde delle funzioni

$$f(x,y)=x\sin e^{xy}\,,\qquad f(x,y)=\tfrac{x-y}{(x+y)}\,,\qquad f(x,y)=\frac{x^2+y^2-2xy}{x-y}\,,$$
$$f(x,y)=\log(x^2+y^2)\,,\quad f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\,,\quad f(x,y)=\{x^2+y^2\}^{-1/2}\,.$$

21. Calcolare tutte le derivate parziali terze della funzione $f(x,y)=e^x\cos y$.

22. Per ogni valore del parametro y, si calcoli la formula di McLaurin, arrestata al *primo* ordine, della funzione $f(x)=(\sin x)(\cos y)$. Si calcoli quindi la formula di McLaurin arrestata al *primo* ordine, della funzione $g(y)=(\sin x)(\cos y)$, per ogni valore del parametro x. Infine, si calcoli la formula di McLaurin arrestata al *primo* ordine della funzione $F(x,y)=(\sin x)(\cos y)$.

23. Si ripeta l'esercizio precedente, ma calcolando le formule di McLaurin arrestate al *secondo* ordine. Si spieghi la differenza tra i due risultati.

24. Si calcoli il polinomio di McLaurin del terzo ordine della funzione $f(x,y)=x^2e^y$.

Mostrare che esistono polinomi *a coefficienti reali,* privi di radici reali.

Dare un esempio di un polinomio a coefficienti non tutti reali, che ammette una radice reale.

Provare che ogni polinomio *a coefficienti reali, di grado dispari,* ammette almeno una radice reale.

Mostrare che un polinomio a *coefficienti reali* non può avere un numero *dispari* di radici *non* reali.

Esercizi 7/B

1. **Calcolare la primitiva $F(x)$ che si annulla per $x_0 = 0$ della funzione (dipendente dal parametro reale k)**
$$f(x) = \frac{3 - kx + x^3}{4 - x^2}\,.$$
Determinare k in modo tale che la funzione $F(x)$ abbia un minimo per $x = -1$.

2. **Calcolare l'area dei trapezoidi delle funzioni seguenti, che insistono sugli intervalli indicati:**
$$\begin{array}{ll} f(x) = x^2 & x \in [0,2] \\ f(x) = x^3 & x \in [0,2] \\ f(x) = x^3 & x \in [-2,2] \\ f(x) = \log x & x \in [1,4] \\ f(x) = \frac{x-1}{x+1} & x \in [2,3] \\ f(x) = \sqrt{1-x^2} & x \in [\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}] \\ f(x) = \sqrt{1+x^2} & x \in [0,1]\,. \end{array}$$

3. **Calcolare l'area degli insiemi seguenti:**
$$\begin{array}{l} \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2\,,\ x^2 \le y \le 2x\}\,, \\ \{(x,y) \mid 3 \le x \le 5\,,\ (x-4)^2 \le y \le \log x\}\,, \\ \{(x,y) \mid 0 \le x \le \frac{3-\sqrt{5}}{2}\,,\ x^2 \le y \le \sqrt{1-\sqrt{5}x^2}\}\,, \\ \{(x,y) \mid 1 \le x \le 2\,,\ \sqrt{2x^2-1} \le y \le x^2\}\,, \\ \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1\,,\ \arcsin x \le y \le \pi/2\}\,. \end{array}$$

4. **Calcolare l'area $A(a)$ dell'insieme dipendente dal parametro $a \in (0, \pi/2)$:**
$$A(a) = \{(x,y) \mid a \le x \le \pi/2\,,\ \log\frac{2x}{\pi} \le y \le \cos x\}\,.$$
Calcolare $\lim_{a\to 0+} A(a)$.

5. **Calcolare l'area $A(a)$ dell'insieme dipendente dal parametro $a > 1$:**
$$A(a) = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, |0 \le y \le x^2\} \cup \{(x,y) \mid 1 \le x \le a\,,\ 0 \le y \le x^{-2}\}\,.$$
Calcolare quindi $\lim_{a\to+\infty} A(a)$.

6. **Calcolare l'area $A(a)$ dell'insieme dipendente dal parametro $a \in (0,1)$:**
$$A(a) = \{(x,y) \mid a \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le \frac{1}{x^2}\}.$$
Calcolare quindi $\lim_{a\to 0+} A(a)$.

7. **Calcolare l'area $A(a)$ dell'insieme dipendente dal parametro $a \in (0,1)$:**
$$A(a) = \{(x,y) \mid a \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le \frac{1}{\sqrt{x}}\}.$$
Calcolare quindi $\lim_{a\to 0+} A(a)$.

8. **Calcolare l'area $A(a)$ dell'insieme dipendente dal parametro $a > 1$:**

$$A(a) = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq a\,,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}\,.$$

Calcolare quindi $\lim_{a\to+\infty} A(a)$.

9. **Trovare le equazioni differenziali che sono soddisfatte dalle funzioni che, in ciascun punto x_0 del loro dominio, soddisfano alla proprietà seguente:**

   - **l'area del trapezoide della funzione su $[0, x_0]$ è proporzionale ad $f^2(x_0)$.**
   - **l'area del trapezoide della funzione che insiste su $[0, x_0]$ è proporzionale ad $f^3(x_0)$.**

1. **Scrivere cosa significa l'espressione *il numero k è l'integrale $\int_a^b f(s)\, ds$.***
2. **Scrivere cosa significa l'espressione *La funzione $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ su un intervallo $[a, b]$.***
3. **Mostrare, mediante opportuni contresempi, che le affermazioni seguenti *sono false:***

   - **La funzione integrale di $f(x)$ è una primitiva di $f(x)$.**
   - **Se $f(x)$ è continua e limitata su R allora la sua funzione $\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$ è limitata per $x > 0$.**