Capitolo 1

Successioni e serie di funzioni

Ultimo aggiornamento: 21 maggio 2006

Convergenza puntuale ed uniforme

Differenza tra convergenza puntuale ed uniforme: Si supponga di avere una successione di funzioni $f_n : D \to \mathbf{R}$ tali che $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Ci chiediamo se il limite è anche uniforme: dovrei avere che

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

il che è equivalente a dire che (per definizione di limite) per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N = N(\epsilon)$ tale che per ogni $n \geqslant N$ si ha

$$\|f_n - f\|_{L^\infty(D)} := \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon\,.$$

Se non ci sarà ambiguità sull'insieme di definizione scriveremo semplicemente

$$\|f_n - f\|_\infty \qquad \text{anziché} \qquad \|f_n - f\|_{L^\infty(D)}\,.$$

Si veda la Figura 1.1 per avere un'idea dal punto di vista grafico: la curva in neretto rappresenta il grafico della funzione limite f, i puntini i grafici di $f+\epsilon$ e $f-\epsilon$, la curva tratteggiata il grafico di una possibile f_n con $n \geqslant N(\epsilon)$.

Considerazioni generali: non esiste un metodo generale (cioè un modo meccanico che valga in ogni situazione) per studiare la convergenza uniforme. La prima osservazione che va fatta è che, se $f_n : D \to \mathbf{R}$ convergono puntualmente ad f in D, il candidato ad essere il limite uniforme è f. La

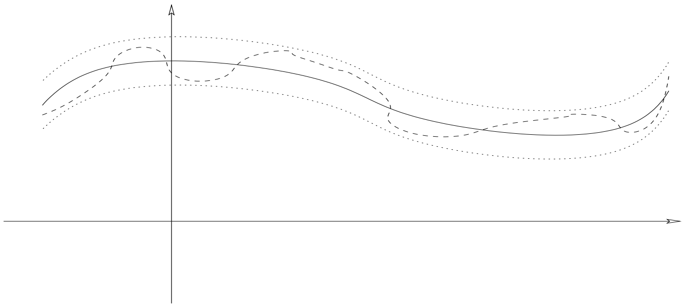

Figura 1.1:

seconda è che lo studio ha come incognita l'insieme (o gli insiemi) sul quale (o sui quali) f_n converge uniformemente. La domanda da porsi è quindi:

$$\text{su quali insiemi } A \subset D \text{ vale} \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0 \text{ ?}$$

Chiaramente se $f_n \to f$ uniformemente su tutto D convergerà uniformemente anche su tutti i sottoinsiemi A di D.
Un modo per cercare l'estremo superiore di $|f_n - f|$ (dove f è il limite puntuale di f_n) se f e f_n sono di classe C^1 è di cominciare risolvendo l'equazione

$$\frac{d}{dx}(f_n(x) - f(x)) = 0$$

e considerando i punti critici di $f_n - f$: si faccia attenzione che il minimo, se c'è, di $f_n - f$ potrebbe essere il massimo di $|f_n - f|$. Questo però è *un* modo e comunque non sempre fornisce l'estremo superiore (ad esempio il sup potrebbe non essere un massimo, il massimo potrebbe essere assunto agli estremi ecc.).
In generale è spesso utile intuire il comportamento della successione di cui bisogna studiare la convergenza. Un consiglio è quindi quello di studiare qualitativamente, se possibile, il grafico delle funzioni f_n.

Esercizio 1.1 - Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n : [-1, 1] \to \mathbf{R}\,, \qquad\qquad f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$$

Esercizio 1.2 - Studiare convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni $f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx)$, $n \in \mathbf{N}$, definite in $D = \mathbf{R}$.

ESERCIZIO 1.3 - Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,, \qquad\qquad f_n(x) = \frac{x+n}{x^2+n}$$

ESERCIZIO 1.4 - Studiare convergenza puntuale ed uniforme di $f_n(x) = x(1-x)^n \log n$ in $[0,1]$.

ESERCIZIO 1.5 - Studiare convergenza puntuale ed uniforme di $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$.

ESERCIZIO 1.6 - Si studino la convergenza puntuale ed uniforme delle funzioni

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x+n} \qquad \text{per } x \in [0,+\infty)$$

e si dimostri che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) \operatorname{sen}(nx)dx = 0\,.$$

ESERCIZIO 1.7 - Si studino la convergenza puntuale ed uniforme delle funzioni

$$f_n(x) = n^\alpha x(1-x^2)^n \qquad \text{per } x \in [0,1] \qquad (\alpha > 0)$$

e si calcoli

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx\,.$$

ESERCIZIO 1.8 - Si studino la convergenza puntuale ed uniforme delle funzioni

$$f_n(x) = \left(\frac{1}{n} + \operatorname{sen}^2 x\right)^n \qquad \text{per } x \in [0,\pi]$$

e si calcoli

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi f_n(x)dx\,.$$

ESERCIZIO 1.9 - Si studi la convergenza puntuale ed uniforme in $[-1,1]$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = n\log(1+x/n)\,.$$

ESERCIZIO 1.10 - Si studi la convergenza puntuale ed uniforme in $\mathbf{R}$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+n}}dt\,.$$

Serie di Funzioni

Una serie di funzioni $\sum_n f_n$ è una speciale successione di funzioni $\{g_N\}_N$ dove $g_N(x) = \sum_{n=0}^N f_n(x)$.
Ricordo: per le serie di funzioni si ha che

$$\text{conv. totale su } A \Longrightarrow \text{ conv. uniforme su } A \Longrightarrow \text{ conv. puntuale su } A\,.$$

Non ci sono molti criteri in generale per studiare la convergenza uniforme: in generale, e quindi in particolare se si ha una serie a termini tutti positivi (o tutti negativi), una strategia possibile è studiare prima la convergenza totale della serie, ma questo non garantisce di trovare tutti gli insiemi in cui vi è convergenza uniforme! (si vedano, ad esempio, gli esercizi 1.15 e 1.17), quando si ha una serie a segni alterni si può sfruttare il criterio di Leibniz. Per quanto riguarda lo studio della convergenza totale: chiaramente la miglior costante che controlla su un insieme A il valore assoluto di $f_n(x)$ è $\sup_A |f_n(x)$. Quindi per studiare la convergenza totale su A di $\sum_n f_n$ conviene, se si riesce a calcolare l'estremo superiore di $|f_n|$, studiare la serie

$$\sum_n \sup_{x\in A} |f_n(x)|\,.$$

Non sempre però conviene calcolare l'estremo superiore e ci si può accontentare di una stima (si veda, ad esempio, la soluzione dell'Esercizio 1.16) o non sempre si riesce a calcolare tale estremo superiore (si veda, ad esempio, la soluzione dell'Esercizio 1.14)

Esercizio 1.11 - Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}\,.$$

Esercizio 1.12 - Studiare la serie di $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f(x)x^n$ con f continua.

Esercizio 1.13 - Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+n^2}{x^2+n^4}\,.$$

Esercizio 1.14 - Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+n}{x^2+n^4+\log n}\,.$$

Esercizio 1.15 - Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)}\,.$$

Esercizio 1.16 - Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1+|x|^n n^2}\,.$$

Esercizio 1.17 - Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}|\operatorname{sen} x| & x \in [(n-1)\pi, n\pi] \\ 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Esercizio 1.18 - Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} e^{-nx}$.

Esercizio 1.19 - Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, $x \in \mathbf{R}$.

Esercizio 1.20 - Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{sen} x + n}{n^2}$, $x \in \mathbf{R}$.

Esercizio 1.21 - Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^x}{n}$, $x \in \mathbf{R}$.

Esercizio 1.22 - Studiare la convergenza della seguente serie e calcolarne la somma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-3)\left(\frac{x+1}{x}\right)^n\,.$$

Esercizio 1.23 - Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}-x^n}{n}$$

e calcolarne la somma.

Esercizio 1.24 - Si determinino gli insiemi di $\mathbf{R}^2$ nei quali vi è convergenze semplice, uniforme e totale della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x^2+n^2)}{1+n^2 y}.$$

Serie di potenze

Ricordo: le serie di potenze sono particolari serie di funzioni della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n .$$

Il raggio di convergenza di $\sum_n a_n x^n$ è dato da $\rho = \dfrac{1}{\lim_n |a_n|^{1/n}}$ se tale limite esiste (si vedano le dispense di teoria per la definizione di raggio di convergenza e l'Esercizio 1.45 per un esempio in cui il limite non esiste).

Esercizio 1.25 - Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} x^n$$

e calcolarne la somma. Studiare poi le serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n3^n} x^n$ e $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} x^n$ e confrontarle con la precedente.

Esercizio 1.26 - Studiare la convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha + e^{\alpha n}}{n} x^n$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$.

Esercizio 1.27 - Sviluppare in serie di Taylor in $x = 0$ la funzione $f(x) = e^x$ e studiarne la convergenza.

Esercizio 1.28 - Calcolare lo sviluppo di Taylor nel punto $x = 1$ della funzione $\log x$ e calcolare il valore della serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.

Esercizio 1.29 - Studiare la convergenza e calcolare la somma (ove converge) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} \frac{x^n}{(1+x^2)^n} \, .$$

Esercizio 1.30 - Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n \, .$$

Esercizio 1.31 - Sviluppare in serie di Taylor in $x = 0$ la funzione $f(x) = \operatorname{arctg}\, x$ e studiarne la convergenza.

Esercizio 1.32 - Calcolare gli sviluppi di seno e coseno in $x = 0$.

Esercizio 1.33 - Studiare la convergenza e calcolare la somma di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right] x^n \, .$$

Esercizio 1.34 - Calcolare lo sviluppo in serie di Taylor intorno al punto $x = 0$ della funzione

$$f(x) = \frac{4-x}{x^2-5x+6} \, .$$

Esercizio 1.35 - Calcolare lo sviluppo in serie di Taylor intorno al punto $x = 0$ della funzione

$$f(x) = \frac{1+3x^2}{(1-x)^3} \, .$$

Esercizio 1.36 - Calcolare lo sviluppo in serie di Taylor intorno al punto $x = 0$ della funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{x-2}{3x-2}\right)$$

precisandone l'insieme di convergenza.

Esercizio 1.37 - Calcolare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+n^\alpha)}{\sqrt{n}}\, x^n$$

al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$.

Esercizio 1.38 - Calcolare lo sviluppo in serie di Taylor intorno al punto $x = 0$ della funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{2+x}{1+x^2}\right)$$

precisandone l'insieme di convergenza.

Esercizio 1.39 - Mostrare che $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Esercizio 1.40 - Trovare una serie di potenze la cui somma, in un opportuno intervallo, sia $\log(1+x-2x^2)$.

Esercizio 1.41 - Studiare la serie di potenze $\sum_n \left(\frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n}\right)x^n$.

Esercizio 1.42 - Che differenza c'è fra la due serie di potenze

$$\sum_n \frac{1}{n^2}\, x^n \qquad \text{e} \qquad \sum_n \frac{1}{n^2}\, x^{n^2} \;?$$

Esercizio 1.43 - Studiare le serie di potenze

$$\sum_n \frac{(n!)^3}{(3n)!}\, x^n \qquad \text{e} \qquad \sum_n \frac{(n!)^3}{(3n)!}\, x^{n^2}\,.$$

Esercizio 1.44 - Studiare la serie di potenze $\sum_n \frac{x^{n^n}}{n^n}$.

$*$ Esercizio 1.45 Studiare la serie di potenze $\sum_n (2+\operatorname{sen} n\pi/2)^n x^n$.

Serie di Fourier

Ricordo: se T è il semiperiodo la serie è data da

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi}{T} x + a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{T} x \right]$$

dove i coefficienti sono dati da ($n \in \mathbf{N}$)

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) \cos \frac{n\pi}{T} x dx \qquad b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{T} x dx \,.$$

Uguaglianza di Parseval:

$$\int_{-T}^{T} |f(x)|^2 dx = T \Big(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2 \Big) \,. \tag{1.1}$$

Integrazione della serie di Fourier - Si supponga di avere f continua a tratti e $F(x) = \int_{-T}^{x} (f(t) - a_0/2) dt$. Se denotiamo con a_n e b_n i coefficienti di f, con A_n e B_n quelli di F valgono le relazioni

$$A_n = -\frac{b_n}{n} \,, \qquad B_n = \frac{a_n}{n} \,. \tag{1.2}$$

Per quanto riguarda la convergenza della serie (vedi dispense di teoria): per ogni funzione limitata, continua a tratti e derivabile a tratti la serie converge puntualmente ovunque (alla media $\tilde{f}$ definita nelle dispense di teoria), uniformemente in ogni intervallo chiuso in cui f è continua e totalmente se converge la serie dei coefficienti

$$\sum_n (|a_n| + |b_n|)$$

visto che $\sup |a_n \cos nx| = |a_n|$ e $\sup |b_n \operatorname{sen} nx| = |b_n|$.

Esercizio 1.46 - Calcolare lo sviluppo di Fourier della funzione $f : [-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$, $f(x) = -1$ in $[-\pi, 0]$, $f(x) = 1$ in $(0, \pi]$. Studiarne le convergenze puntuale ed uniforme.
Calcolare poi lo sviluppo di Fourier della funzione $g : [-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$, $g(x) = |x|$.

Esercizio 1.47 - Calcolare lo sviluppo di Fourier della funzione $f(x) = x^2$ con $x \in [-\pi, \pi]$. Studiarne le convergenze puntuale ed uniforme.
Calcolare poi il valore della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Esercizio 1.48 - Calcolare lo sviluppo di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-1, 0] \\ x & \text{se } x \in [0, 1] \end{cases}$$

e studiarne la convergenza. Calcolare poi la somma delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} .$$

Esercizio 1.49 - Calcolare lo sviluppo di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, \pi] \\ -x + 2\pi & \text{se } x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

studiarne la convergenza, scrivere uno sviluppo della stessa funzione in soli seni, infine calcolare il valore delle serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ e $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$. Sfruttando lo sviluppo della funzione f scrivere inoltre lo sviluppo in serie di Fourier della funzione

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [-\pi, 0] \\ 1 & \text{se } x \in (0, \pi] \end{cases}$$

Esercizio 1.50 - Determinare lo sviluppo in serie di Fourier della funzione

$$f(x) = 1 - \frac{2|x|}{\pi}, \qquad x \in [-\pi, \pi] .$$

Studiarne poi la convergenza in $[-\pi, \pi]$. Infine calcolare la somma delle serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4},$$

Soluzioni

Soluzione 1.1 - Limite puntuale:

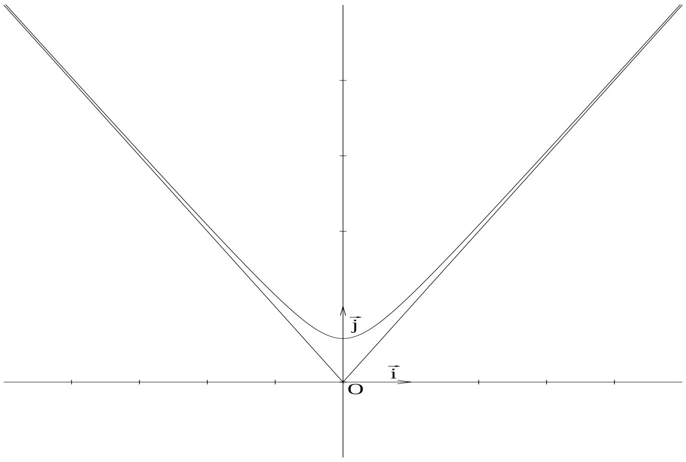

Figura 1.2:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = |x| \qquad\qquad \text{per ogni } x \in [-1,1]\,.$$

Limite uniforme:

$$\sup_{x\in[-1,1]} \left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} - |x|\right| = \sup_{x\in[-1,1]} \left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} - |x|\right) \leqslant \sup_{x\in[-1,1]} \sqrt{\frac{1}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}}$$

Osservazione - Nell'ultimo passaggio si è usata la diseguaglianza $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (lasciata per esercizio).

Osservazione - Le funzioni f_n sono tutte funzioni C^1, ma il limite è solo continuo: la convergenza uniforme si trascina al limite la continuità, ma non la derivabilità.

Soluzione 1.2 - Il limite puntuale è dato da (si veda la Figura 1.3)

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} \pi/2 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\pi/2 & x < 0 \end{cases}$$

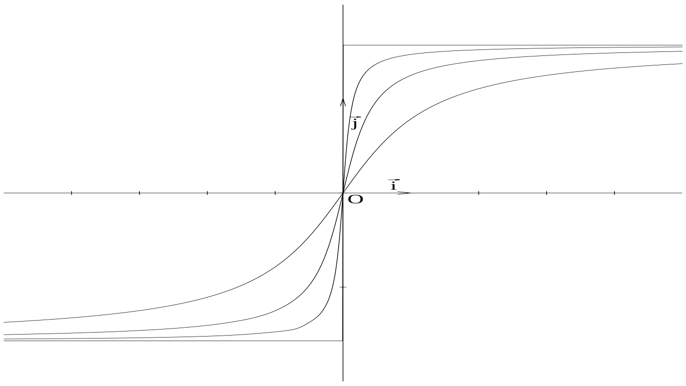

Figura 1.3:

Usiamo il Teorema 1.5 (continuità della funzione limite) delle dispense che qui ricordiamo brevemente.

Teorema 1.1 *Se una successione di funzioni continue in D converge uniformemente ad f in D allora f è continua in D.*

Questo può essere usato anche in negativo: cioè se $\{f_n\}_n$ è una successione di funzioni continue che converge puntualmente ad una funzione f non continua, la convergenza non può essere uniforme.
Concludiamo che se $D = \mathbf{R}$ f_n non converge uniformemente ad f. Ci si può chiedere se ci sono insiemi strettamente contenuti in $\mathbf{R}$ sui quali la convergenza è uniforme. Si consideri $A = [a, +\infty)$ con $a > 0$. La derivata di $|f_n - f| = f - f_n$ è sempre negativa (per cui non ci sono punti stazionari). Questo però ci dice che il massimo è assunto per $x_n = a$. Per cui

$$\sup_{x \in [a,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \pi/2 - f_n(a) = \pi/2 - \operatorname{arctg}(na)\,.$$

Dalla convergenza puntuale concludiamo che questa quantità converge a zero. Poiché analogamente si può trattare il caso in cui $A = (-\infty, b]$ con $b < 0$ concludiamo che f_n converge uniformemente ad f su tutti gli insiemi del tipo $(-\infty, b] \cup [a, +\infty)$ con $b < 0$ e $a > 0$ e solo in quelli.

Soluzione 1.3 - Il limite puntuale è $f \equiv 1$ su tutto $\mathbf{R}$. Prima di tutto si osservi che (si vedano alcuni grafici in Figura 1.4)

$$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0\,, \qquad \lim_{x \to -\infty} f_n(x) = 0$$

e anche che
$$f_n(x) = 0 \quad \text{per } x_n = -n\,.$$
Per ognuna di queste ragioni
$$\sup_{x\in\mathbf{R}} |f_n(x) - f(x)| \geqslant 1$$
e quindi non vi può essere convergenza uniforme su tutto $\mathbf{R}$ e nemmeno su semirette. Vediamo che succede se consideriamo un compatto $[a,b]$. Calcoliamo la derivata e poniamola uguale a zero. Si ha
$$f_n'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 + 2n - n = 0$$
che ha come soluzioni $x_n = -n + \sqrt{n^2+n}$ e $y_n = -n - \sqrt{n^2+n}$. Si osservi che $x_n \to 1/2$ mentre $y_n \to -\infty$, quindi, qualunque sia $[a,b]$, y_n definitivamente non appartiene ad $[a,b]$. Se $1/2 \in (a,b)$ allora x_n definitivamente appartiene ad $[a,b]$. In $[a,b]$ quindi o non ci sono punti stazionari o c'è solamente x_n, nel quale f_n assume il suo valore massimo che vale
$$f_n(x_n) = \frac{\sqrt{n^2+n}}{2n(n+1-\sqrt{n^2+n})} = \frac{n+\sqrt{n^2+n}}{2n} \to 1\,.$$
Attenzione: il massimo di $|f_n - f|$ non è detto sia assunto in x_n. Infatti si ha
$$f_n(x) - f(x) = \frac{x(1-x)}{x^2+n}$$
che è positiva per $x \in (0,1)$ (e negativa altrimenti). Quindi
$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} \dfrac{-x(1-x)}{x^2+n} & x \in [a,0] \\ \dfrac{x(1-x)}{x^2+n} & x \in [0,1] \\ \dfrac{-x(1-x)}{x^2+n} & x \in [1,b] \end{cases}$$
Per cui l'estremo superiore (che in realtà è un massimo) è sicuramente assunto in $x = a$ o $x = b$ oppure $x = x_n$. Per cui
$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \max\{f_n(a) - 1, f_n(b) - 1, f_n(x_n) - 1\}\,.$$
Poiché tutti e tre i valori dell'insieme a destra convergono a zero si conclude che $\{f_n\}_n$ converge uniformemente sui compatti.

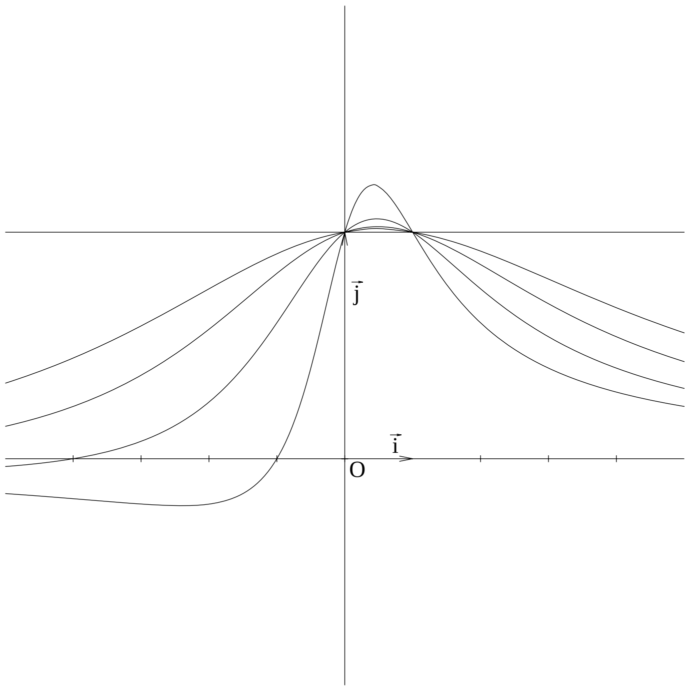

Figura 1.4:

Soluzione 1.4 - Convergenza puntuale: $f_n(x) \to 0$ per ogni $x \in [0,1]$. Per l'uniforme calcoliamo la derivata di f_n:

$$f'_n(x) = (1-x)^{n-1} \log n[(1-x) - nx]$$

e questa si annulla per $x_n = 1/(n+1)$ (la funzione è non negativa e nulla agli estremi, x_n è quindi di massimo). Il valore

$$f_n(x_n) = \frac{\log n}{n+1}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n \to 0\,.$$

Soluzione 1.5 - Il limite puntuale è (in Figura 1.5 sono riportati i grafici di alcune f_n)

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \qquad\qquad \text{per ogni } x \in [0,1]\,.$$

Vediamo se il limite è anche uniforme:

$$f_n'(x) = \frac{n(1+n^2x^2) - 2n^3x^2}{(1+(nx)^2)^2} = \frac{n - n^3x^2}{(1+(nx)^2)^2}$$

che si annulla per $x_n = 1/n$. Ora $f_n(x_n) = 1/2$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ per cui

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = \lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

Osservazione - Si osservi che il limite puntuale di funzioni continue può

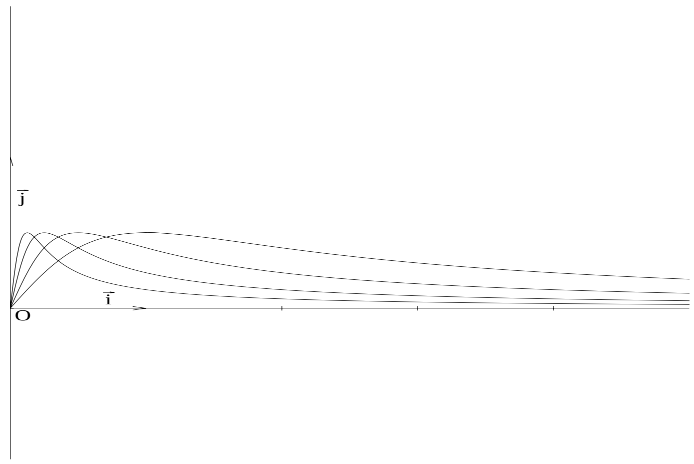

Figura 1.5:

essere continuo anche se il limite non è uniforme.

Soluzione 1.6 - Facilmente si ha che

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad \text{per ogni } x \in [0,+\infty)$$

La convergenza non è però uniforme. Infatti

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} |f_n(x)| = +\infty\,.$$

È uniforme però sui limitati. Si consideri, ad esempio, un intervallo $[0,a]$ con $a > 0$:

$$f_n'(x) = \frac{x^2+2nx}{(x+n)^2} \geqslant 0$$

per cui le funzioni sono crescenti e quindi assumono il massimo in $x = a$:

$$\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x)| = \frac{a^2}{a+n} \to 0 \qquad \text{per ogni } a \in (0,+\infty)\,.$$

Calcoliamo l'integrale:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left|\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{sen}\, nx dx\right| &\leqslant \lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(x)||\,\mathrm{sen}\,(nx)|dx \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(x)|dx = 0\end{aligned}$$

grazie al fatto che $f_n \to 0$ uniformemente in $[0,1]$. Si noti che anche le funzioni $x \mapsto f_n(x)\,\mathrm{sen}\,(nx)$ convergono uniformemente a 0 in $[0,1]$ poiché $g_n(x) = \mathrm{sen}\,(nx)$ sono equilimitate (questo è vero solo perché le f_n convergono a **zero**! In generale se $f_n \to f$ uniformemente e g_n sono equilimitate non possiamo affermare che $f_n g_n$ convergono uniformemente).

Soluzione 1.7 - Il limite puntuale è $f \equiv 0$. Per studiare la convergenza uniforme calcoliamo il massimo delle f_n.

$$f_n'(x) = n^\alpha(1-x^2)^{n-1}[1-x^2(1+2n)] = 0 \iff x = \frac{1}{\sqrt{1+2n}}$$

Valutiamo il massimo di $|f_n - f|$:

$$M_n(\alpha) = \max_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = n^\alpha \frac{1}{\sqrt{1+2n}}\Big(1 - \frac{1}{1+2n}\Big)\,.$$

Si ha che

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} M_n(\alpha) &= 0 && \text{per } 0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2} \\ \lim_{n\to\infty} M_n(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2e}} && \text{per } \alpha = \frac{1}{2} \\ \lim_{n\to\infty} M_n(\alpha) &= +\infty && \text{per } \alpha > \frac{1}{2}\end{aligned}$$

e quindi vi è convergenza uniforme solo per $0 \leqslant \alpha < 1/2$. Calcoliamo l'integrale. Per $0 \leqslant \alpha < 1/2$

$$\lim_n \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_n f_n(x)dx = 0$$

grazie alla convergenza uniforme. Negli altri casi calcolo la primitiva che è data da

$$\int_0^1 f_n = -n^\alpha \frac{1}{2(n+1)}(1-x^2)^{n+1}\Big|_0^1 = \frac{n^\alpha}{2(n+1)}\,.$$

Si ha allora che

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n = 0 && \text{per } 0 \leqslant \alpha < 1\\
&\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n = \frac{1}{2} && \text{per } \alpha = 1\\
&\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n = +\infty && \text{per } \alpha > 1\,.
\end{aligned}
$$

Soluzione 1.8 - Facilmente si vede che $f_n(0) = f_n(\pi) \to 0$.
Se $x \in (0,\pi)$, $x \neq \pi/2$ si ha che $\operatorname{sen}^2 x < 1$ e quindi si ha che esiste $a < 1$ per il quale definitivamente vale

$$\frac{1}{n} + \operatorname{sen}^2 x \leqslant a < 1$$

per cui $f_n(x) \to 0$ se $x \neq \pi/2$. Se $x = \pi/2$ si ha che

$$f_n(\pi/2) = \Big(\frac{1}{n} + 1\Big)^n \to e$$

quindi il limite puntuale è (si veda la Figura 1.6)

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} e & x = \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & x \neq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Può convergere uniformemente? NO! Perché le f_n sono continue e f non lo è. Vediamo che succede se togliamo un intorno di $\pi/2$. Fisso $\delta > 0$ (e minore di $\pi/2$): in $[0, \pi/2 - \delta]$ f_n è crescente per ogni $n \in \mathbf{N}$ per cui il massimo è assunto per $x = \pi/2 - \delta$. Detto α il valore $\operatorname{sen}^2(\pi/2 - \delta) < 1$ si ha che esiste $\epsilon > 0$ tale che

$$\alpha + \epsilon < 1$$

e quindi

$$\max_{x\in[0,\pi/2-\delta]} |f_n(x)| \leqslant \Big(\frac{1}{n} + \alpha\Big)^n \leqslant (\alpha + \epsilon)^n \to 0\,.$$

Allo stesso modo si può procedere in $[\pi/2+\delta, \pi]$. Conclusione: f_n convergono uniformemente a $f \equiv 0$ in tutti gli insiemi del tipo $A_\delta = [0, \pi/2 - \delta] \cup [\pi/2 + \delta, \pi]$. Calcoliamo l'integrale:

$$|\int_0^\pi f_n(x)dx| = |\int_{A_\delta} f_n(x)dx + \int_{\pi/2-\delta}^{\pi/2+\delta} f_n(x)dx| \leqslant \int_{A_\delta} |f_n|(x)dx + 2e\delta\,.$$

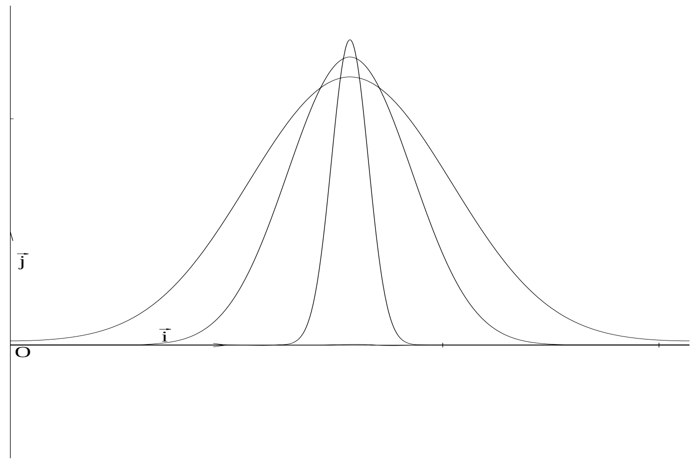

Figura 1.6:

Passando al limite si ha che in A_δ, grazie alla convergenza uniforme, l'integrale tende a 0. Concludendo si ha che:

$$\forall \delta > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \left| \int_0^\pi f_n(x)dx \right| < 2e\delta$$

il che significa che l'integrale tende a 0.

Soluzione 1.9 - Proponiamo due svolgimenti. Il primo: scrivendo $f_n(x)$ come $\log(1 + x/n)^n$ si ottiene che il limite puntuale è la funzione $f(x) = x$. Vediamo se è uniforme. Prendiamo in considerazione le funzioni $g_n(x) = (1 + x/n)^n$. Sappiamo dal primo corso di analisi che

$$\begin{array}{l} (1+x/n)^n \text{ è crescente in } n \text{ per } x \text{ positivo} \\ (1+x/n)^n \text{ è decrescente in } n \text{ per } x \text{ negativo} \end{array}$$

e converge alla funzione $g(x) = e^x$. Derivando si ottiene

$$g'(x) - g_n'(x) = e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \begin{cases} > 0 & \text{se } x > 0 \\ = 0 & \text{se } x = 0 \\ < 0 & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

Si osservi però che $g_n(0) = g(0) = 1$ per cui $|g(x) - g_n(x)| > 0$ tranne che per $x = 0$ che risulta essere un punto di minimo. È chiaro che il massimo è assunto quindi per $x = -1$ oppure per $x = 1$ e si ha

$$\sup_{x\in[-1,1]} |g_n(x) - g(x)| \leqslant \max\{|g_n(-1) - e^{-1}|, |g_n(1) - e|\} \to 0\,.$$

Per cui $\{g_n\}$ converge uniformemente a g in $[-1,1]$. Poiché la funzione $x \mapsto \log x$ è continua nell'intervallo $[e^{-1}, e]$ (nel quale assumono valori le g_n) e $\log g_n(x) = f_n(x)$, $\log g(x) = f(x)$, concludiamo che anche $\{f_n\}$ converge uniformemente a f in $[-1,1]$.
Che succede in $[-1,+\infty)$?

Il secondo svolgimento fa uso del seguente risultato (teorema **non visto** a lezione).

Teorema 1.2 *Sia $(f_n)_n$ una successione in $C^1([a,b])$ tale che*

1) f_n' converge uniformemente ad una funzione g in $[a,b]$;

2) esiste $x_0 \in [a,b]$ tale che $f_n(x_0)$ converge.

Allora la successione $(f_n)_n$ converge uniformemente ad una funzione f. Inoltre $f \in C^1([a,b])$ e $f' = g$.

Usiamo questo teorema per risolvere l'esercizio. Calcoliamo direttamente il limite uniforme di

$$f_n(x) = n\log(1 + x/n)$$

in $[-1,1]$. Si ha che $f_n'(x) = \frac{n}{x+n}$ che converge uniformemente alla costante 1, inoltre $f_n(0)$ converge a 0. Per cui f_n converge uniformemente alla funzione f data da

$$f(x) = 0 + \int_0^x 1dt = x$$

Soluzione 1.10 - La successione converge puntualmente alla funzione nulla su tutto $\mathbf{R}$, uniformemente solo sui compatti.

Soluzione 1.11 - Supponiamo per il momento di dover studiare semplicemente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x)^n}\,.$$

In un caso del genere ci si può ridurre a studiare la serie geometrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} y^n$$

pensando poi a sostituire a y $1/(1+x)$. Sappiamo che la serie geometrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n - 1 \qquad \text{per } |q| < 1\,.$$

Di conseguenza la serie appena scritta converge alla funzione

$$\frac{y}{1-y}$$

puntualmente in $(-1,1)$ ed uniformemente e totalmente solo nei compatti $[a,b] \subset (-1,1)$. Infatti

$$\sup_{y\in[0,1)} \Big| \sum_{n=1}^{\infty} y^n - \sum_{n=N}^{\infty} y^n \Big| = \sup_{y\in[0,1)} \Big| \sum_{n=N+1}^{\infty} y^n \Big| = +\infty$$

e anche

$$\sup_{y\in(-1,0]} \Big| \sum_{n=1}^{\infty} y^n - \sum_{n=N}^{\infty} y^n \Big| = \sup_{y\in(-1,0]} \Big| \sum_{n=N+1}^{\infty} y^n \Big| = \sup_{y\in[0,1)} \Big| \frac{y^{N+1}}{1-y} \Big| = +\infty$$

per cui non può esservi convergenza uniforme, e nemmeno totale, in $(-1,0]$ e in $[0,1)$. Vediamo ora nei compatti $[a,b] \subset (-1,1)$. Infatti: si consideri per semplicità $[0,b]$ con $0 < b < 1$. Denotiamo con $g(y)$ il limite di g_N, cioè $g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} y^n$. Si ha

$$\begin{aligned} \sup_{[0,b]} |g_N(y) - g(y)| &= \sup_{[0,b]} \Big| \sum_{n=1}^{N} y^n - \sum_{n=1}^{\infty} y^n \Big| = \sup_{[0,b]} \Big| \sum_{n=N+1}^{\infty} y^n \Big| \\ &\leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} b^n = \tfrac{b^{N+1}}{1-b} \end{aligned}$$

Considerando il limite per $N \to \infty$ si ottiene la convergenza uniforme. Analogamente si ottiene in $[a,0]$ con $-1 < a < 0$ e quindi in ogni $[a,b] \subset (-1,1)$. Questo si traduce, per la serie considerata, nella convergenza alla funzione

$$\frac{\frac{1}{1+x}}{1 - \frac{1}{1+x}} = \frac{1}{x}$$

puntualmente in $(-\infty,-2) \cup (0,+\infty)$ e uniformemente e totalmente negli insiemi $(-\infty,\alpha]$, $[\beta,+\infty)$ con $\alpha < -2$ e $\beta > 0$. Infatti la trasformazione $g(x) = 1/(1+x)$ manda l'intervallo $[a,0]$, con $-1 < a$, in $(-\infty, \frac{1-a}{a}]$, e l'intervallo $[0,b]$, con $b < 1$, in $[\frac{1-b}{b}, +\infty)$. Se, ad esempio, $a = -\frac{1}{1+\delta}$ con $\delta > 0$, cioè a compreso tra -1 e 0, si ottiene che $\frac{1-a}{a} = -2 - \delta$, cioè un numero strettamente minore di -2. Analogamente si vede che $\frac{1-b}{b}$ è strettamente positivo.

Veniamo ora all'esercizio proposto: poiché la serie data è il limite, per $N \to +\infty$, di $\sum_{n=1}^{N} \frac{x}{(1+x)^n}$ per le somme finite si ha

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{x}{(1+x)^n} = x \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(1+x)^n} .$$

Per cui l'insieme di convergenza puntuale contiene sicuramente l'insieme nel quale converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x)^n}$, cioè $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$. Si osservi però che la serie data converge anche per $x = 0$ (infatti ogni termine è identicamente nullo!). Perciò l'insieme di convergenza puntuale è $(-\infty, -2) \cup [0, +\infty)$ e la funzione limite è

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)\,, \\ 0 & x = 0\,, \end{cases}$$

(poiché $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x)^n} = 1/x$).
Per quanto riguarda le convergenze uniforme e totale si può ragionare come prima per ottenere che vi è convergenza negli insiemi del tipo $(-\infty, \alpha]$, $[\beta, +\infty)$ con $\alpha < -2$ e $\beta > 0$. Non può esservi convergenza uniforme, e di conseguenza nemmeno totale, nell'insieme $[0, +\infty)$ dal momento che la funzione limite è discontinua in tale insieme mentre le somme parziali sono ovviamente continue.
Cosa succederebbe se invece considerassimo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x)^n}$?
A questo proposito si veda anche l'Esercizio 1.12.

Soluzione 1.12 - Per quanto riguarda la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ si procede come nella soluzione dell'Esercizio 1.11 per ottenere la convergenza puntuale in $(-1, 1)$ e uniforme e totale nei compatti contenuti in $(-1, 1)$ alla funzione

$$\frac{1}{1-x} .$$

Ciò che può modificare gli insiemi di convergenza è la presenza di $f(x)$. L'unica cosa che può alterare il comportamento della serie è il fatto che $f(1)$

e/o $f(-1)$ siano 0 (se $f(1) \neq 0$ e $f(-1) \neq 0$ la serie in 1 e -1 non converge), escludendo il caso in cui $f(x) = 0$ per ogni $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ che farebbe banalmente convergere la serie in tale insieme. Concentriamoci quindi sul comportamento di f in 1 e -1. Cominciamo considerando $f(x) = |x+1|^\alpha |x-1|^\beta$ con $\alpha, \beta \geqslant 0$. Chiaramente la serie converge in $(-1,1)$ e non converge in $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$. Nel punto -1, nel quale la serie $\sum_n x^n$ non è determinata, si ha che per qualunque valore positivo di α $f(-1) = 0$ e questo fa sì che la serie in -1 converga. Analogamente nel punto 1 la serie converge (è identicamente nulla) per $\beta > 0$. Il limite puntuale è dato dalla funzione

$$\begin{cases} (x+1)^\alpha (1-x)^{\beta-1} & x \in (-1,1) \quad \text{se } \alpha, \beta \geqslant 0 \\ 0 & x = -1 \quad \text{se } \alpha > 0, \beta \geqslant 0 \\ 0 & x = 1 \quad \text{se } \alpha \geqslant 0, \beta > 0 \,. \end{cases}$$

Vediamo ora le convergenze uniforme e totale. Giacché in $[-1,0]$ vale la seguente stima

$$1 \leqslant |x-1|^\beta \leqslant 2^\beta$$

possiamo limitarci, per la convergenza totale in $[-1,0]$, a studiare la funzione $|x+1|^\alpha x^n$ dal momento che, dalla stima appena sopra, si ha

$$|x+1|^\alpha |x|^n \leqslant |x+1|^\alpha |x-1|^\beta x^n \leqslant 2^\beta |x+1|^\alpha |x|^n \,. \qquad (*)$$

Derivando la funzione $|x+1|^\alpha |x|^n$ si ottiene il massimo in $-\frac{n}{n+\alpha}$ e valutando la funzione in tal punto si ottiene che il valore massimo (per $|x+1|^\alpha |x|^n$) è dato da

$$\frac{\alpha}{\alpha+n}\left(\frac{n}{\alpha+n}\right)^n .$$

Poiché $(\frac{n}{\alpha+n})^n \to e^{-\alpha}$ e $\sum_{n=0}^\infty \frac{\alpha}{\alpha+n} = +\infty$, dalla prima delle due disuguaglianze in $(*)$ si deduce che la serie non può convergere totalmente in $[-1,0]$. In maniera del tutto analoga si può vedere che il massimo di $|x-1|^\beta |x|^n$ è assunto in $\frac{n}{n+\beta}$ e vale $\frac{\beta}{\beta+n}\left(\frac{n}{\beta+n}\right)^n$ e quindi la serie non converge totalmente in $[0,1]$. Però sui compatti $[a,b] \subset (-1,1)$, dalla convergenza totale della serie $\sum_n x^n$ e dalla limitatezza di f, vi è convergenza totale.
Veniamo ora alla convergenza uniforme. In $[-1,0]$ la serie è a segni alterni. Dal criterio di Leibniz, e usando la seconda disuguaglianza in $(*)$, ricaviamo

che

$$\sup_{x\in[-1,0]} \Big| \sum_{n=0}^{\infty} |x+1|^\alpha |x-1|^\beta x^n - \sum_{n=0}^{N} |x+1|^\alpha |x-1|^\beta x^n \Big| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{x\in[-1,0]} \Big| |x+1|^\alpha |x-1|^\beta |x|^{N+1} \Big| \leqslant 2^\beta \frac{\alpha}{\alpha+n} \Big(\frac{n}{\alpha+n} \Big)^n .$$

Tale quantità chiaramente tende a zero quando $n \to +\infty$, per cui la serie converge uniformemente in $[-1, 0]$.
In $[0, 1]$ la convergenza uniforme dipende dal valore del parametro β. Per $0 < \beta \geqslant 1$ la serie in 1 converge a zero, per $x < 1$ a $(1 + x)^\alpha (1 - x)^{\beta-1}$: di conseguenza il limite non è continuo e non può esservi convergenza uniforme.
Per $\beta > 1$ si ha

$$\sup_{x\in[0,1]} \Big| \sum_{n=0}^{\infty} f(x)x^n - \sum_{n=0}^{N-1} f(x)x^n \Big| = \sup_{x\in[0,1]} \Big| f(x)\frac{1}{1-x} - f(x)\frac{1-x^N}{1-x} \Big| =$$
$$= \sup_{x\in[0,1]} (x+1)^\alpha (1-x)^{\beta-1} x^N$$

Limitandoci a considerare $(1 - x)^{\beta-1} x^N$, poiché $(x + 1)^\alpha$ è compreso tra 1 e 2^α per $x \in [0, 1]$, valutando la derivata si ha

$$\frac{d}{dx}(1-x)^{\beta-1} x^N = 0 \quad \text{per } x = \frac{n}{n+\beta-1}$$

che è il punto di massimo (verificare!), nel quale la funzione assume il valore

$$\Big(\frac{\beta-1}{N+\beta-1} \Big)^{\beta-1} \Big(\frac{N}{N+\beta-1} \Big)^N$$

che tende a zero (verificare!) per ogni $\beta > 1$.

Nel caso generale possiamo concludere che se $f(-1) = 0$ vi è convergenza uniforme in $[-1, 0]$, nell'intervallo positivo la serie si comporta come $\sum_n x^n$ se $f(1) \neq 0$. Se invece $f(1) = 0$ ed esiste $\beta \in (0, 1]$ tale che

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{(1-x)^\beta} = \lambda \in \mathbf{R} ,$$

cioè se l'ordine di infinitesimo di f in 1 è minore o uguale di 1, il limite esiste in tutto $[0, 1]$, ma non è continuo, e quindi non vi può essere convergenza uniforme in $[0, 1]$, se invece esiste $\beta > 1$ tale che

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{(1-x)^\beta} = \lambda \in \mathbf{R} ,$$

cioè se l'ordine di infinitesimo di f in 1 è maggiore di 1, la serie converge uniformemente in tutto $[0,1]$. Per la totale bisognerà valutare il massimo e fare i conti.

Per quanto riguarda la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x)^n}$, proposta alla fine della soluzione dell'Esercizio 1.11, si può concludere che la serie converge uniformemente in $[0,+\infty)$.

Soluzione 1.13 - Converge totalmente su $\mathbf{R}$.

Soluzione 1.14 - Puntuale per ogni $x \in \mathbf{R}$ perché, ad esempio,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x+n}{x^2+n^4+\log n} \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x+n|}{n^4}$$

In generale vale, per $a, b > 0$, che $a^2+b^2 \geqslant 2ab$, per cui $2(a^2+b^2) \geqslant (a+b)^2$, da cui

$$\left| \frac{x+n}{x^2+n^4+\log n} \right| \leqslant 2\frac{|x+n|}{2(x^2+n^4)} \leqslant 2\frac{|x+n|}{(|x|+n^2)^2} \leqslant \frac{2}{|x|+n^2} \leqslant \frac{2}{n^2}$$

per cui la serie converge totalmente in $\mathbf{R}$.

Soluzione 1.15 - Per ogni $x \in \mathbf{R}$ $1/\log(n+x^2)$ è decrescente in n per cui la serie è convergente per ogni x. La stima del resto

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)} - \sum_{n=2}^{m-1} \frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)} \right| \leqslant \frac{1}{\log(m+x^2)} \leqslant \frac{1}{\log m} \to 0$$

quindi vi è convergenza uniforme su tutto $\mathbf{R}$. Ovviamente non vi è la totale: si ha che

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \left| \frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)} \right| = \frac{1}{\log n}$$

(il massimo è assunto per $x = 0$, **fare la derivata per esercizio!**) e la serie $\sum_n (\log n)^{-1}$ diverge. Non c'è convergenza totale nemmeno in nessun intervallo (a,b) (o $[a,b]$) poiché

$$\sup_{x \in (a,b)} \left| \frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)} \right| = \max \left\{ \frac{1}{\log(n+a^2)}, \frac{1}{\log(n+b^2)} \right\}.$$

Soluzione 1.16 - Per $x \geqslant 1$ si ha che

$$\frac{nx^n}{1+|x|^n n^2} \geqslant \frac{nx^n}{2|x|^n n^2} = \frac{1}{2n}$$

per cui la serie diverge. Per $x \in (-1,1)$ si ha che

$$\Big|\frac{nx^n}{1+|x|^n n^2}\Big| \leqslant n|x|^n$$

per cui vi è convergenza assoluta. Per $x \leqslant -1$

$$\frac{nx^n}{1+|x|^n n^2} = (-1)^n \frac{n|x|^n}{1+|x|^n n^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{n|x|^n}{1+|x|^n n^2} \leqslant \frac{1}{n}$$

Verifichiamo che è monotona decrescente in n: mi chiedo se

$$\frac{(n+1)|x|^{n+1}}{1+|x|^{n+1}(n+1)^2} \leqslant \frac{n|x|^n}{1+|x|^n n^2}$$

cioè se

$$n|x|^n + n(n+1)^2|x|^{2n+1} \geqslant (n+1)|x|^{n+1} + (n+1)n^2|x|^{2n+1}$$

il che è equivalente a

$$(n+1)|x| \leqslant n(n+1)|x|^{n+1} + n$$

che è vero per ogni $x \leqslant -1$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$. Usando il criterio di Leibniz si conclude che la serie converge in $(-\infty,-1]$.
Quindi converge puntualmente in $(-\infty,1)$.
Dalla stima in $(-1,1)$ si vede che vi è convergenza totale in $[0,a]$ per ogni $0 < a < 1$, ma non può esservi in $[0,1)$. Infatti

$$\sup_{[0,1)} \Big| \sum_{n=1}^{N} \frac{nx^n}{1+|x|^n n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1+|x|^n n^2} \Big| = \sup_{[0,1)} \Big| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{nx^n}{1+|x|^n n^2} \Big| = +\infty$$

in quanto le funzioni $\frac{nx^n}{1+|x|^n n^2}$ sono continue (anche in $x = 1$!!), ma la loro somma su n diverge a $+\infty$ in $x = 1$. Per x negativo si ha:

$$\Big| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1+|x|^n n^2} - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{nx^n}{1+|x|^n n^2} \Big| \leqslant \frac{m|x|^m}{1+|x|^m m^2} \leqslant \frac{1}{m} \to 0\,.$$

Conclusione: vi è convergenza puntuale in $(-\infty,1)$ e uniforme e totale su tutti gli insiemi del tipo $(-\infty,a]$ con $a < 1$.

Soluzione 1.17 - Questo è un esempio molto semplice si serie di funzioni non negative che converge uniformemente, ma non totalmente.
La funzione f è a supporto compatto e le f_n non sono altro che traslazioni di f. Di conseguenza $\sum f_n(x)$ in realtà è una somma finita, per cui c'è convergenza puntuale (e assoluta, visto che le f_n sono tutte non negative) su tutto $\mathbf{R}$. C'è convergenza uniforme? Si, su tutto $\mathbf{R}$, perché

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \Big| \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=N}^{\infty} f_n(x) \Big| = \sup_{x\in\mathbf{R}} \Big| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \Big| \leqslant \frac{1}{N+1} .$$

C'è convergenza totale? NO! perché il massimo di f_n è ovviamente $1/n$ assunto per $x_n = \pi/2 + n$ e la serie $\sum_n \frac{1}{n} = +\infty$. Converge, però, totalmente sui sottoinsiemi del tipo $(-\infty, a]$.
Ex: modificare le f_n in modo tale da avere convergenza totale su $\mathbf{R}$.

Soluzione 1.18 - Per $x < 0$ $\lim_{n\to\infty} xn^{-1}e^{-nx} = -\infty$ per cui la serie diverge. Per $x \geqslant 0$ la serie invece converge (per $x = 0$ è identicamente nulla, per $x > 0$ si può usare, ad esempio, il criterio del rapporto). Vediamo che in $[0, +\infty)$ la serie converge totalmente. Derivando si ottiene che il punto $x_n = 1/n$ è stazionario. Poiché $f_n(0) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ e $f_n \geqslant 0$ x_n risulta punto di massimo. Quindi

$$|f_n(x)| \leqslant f_n(1/n) = \frac{1}{n^2}\frac{1}{e} \to 0 .$$

Soluzione 1.19 - Per $x > 1$ converge e per $x \leqslant 1$ diverge a $+\infty$. Poiché la funzione $f_n(x) = n^{-x}$ è decrescente si ha che

$$\sup_{x\in(1,+\infty)} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n}$$

e la serie $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Idem per la convergenza uniforme:

$$\sup_{x\in(1,+\infty)} \Big| \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \Big| = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = +\infty .$$

Se invece si considera un qualunque insieme del tipo $[a, +\infty)$ con $a > 1$ si ha, sempre per il fatto che f_n è decrescente, che $\sup_{x\in[a,+\infty)} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n^a}$ e $\sum \frac{1}{n^a}$

converge per ogni $a > 1$. Concludendo si ha convergenza totale, e quindi anche uniforme, in tutti gli insiemi del tipo $[a, +\infty)$ con $a > 1$.

Soluzione 1.22 - Posso fare il cambio $y = (x+1)/x$ e studiare $\sum_{n=0}^{\infty}(n-3)y^n$. Il raggio di convergenza è (si vede facilmente) 1, per cui la serie converge puntualmente per $y \in (-1,1)$. La convergenza, al solito, è totale nei compatti $[a,b] \subset (-1,1)$, ma non in $(-1,1)$. Posso scrivere

$$(n-3)y^n = y^4(n-3)y^{n-4}$$

e vedere $(n-3)y^{n-4}$ come la derivata di y^{n-3}. Abbiamo

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(n-3)y^n &= -3-2y-y^2+\sum_{n=4}^{\infty}(n-3)y^n \\ &= -3-2y-y^2+\sum_{k=1}^{\infty}ky^{3+k}\end{aligned}$$

e

$$y^4\sum_{k=1}^{\infty}ky^{k-1} = y^4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d}{dy}y^k = y^4\frac{d}{dy}\sum_{k=1}^{\infty}y^k = y^4\frac{d}{dy}\frac{y}{1-y} = \frac{y^4}{(1-y)^2}$$

Conclusione:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n-3)y^n = -3-2y-y^2+\frac{y^4}{(1-y)^2}$$

dove la convergenza è puntuale per $y \in (-1,1)$ e totale sui compatti $[a,b] \subset (-1,1)$. La funzione $f(x) = (x+1)/x$ ha il grafico in Figura 1.7 per cui, tornando a considerare x, si ha che

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n-3)\Big(\frac{x+1}{x}\Big)^n = -3-2\frac{x+1}{x}-\Big(\frac{x+1}{x}\Big)^2+\frac{(x+1)^4}{x^2}$$

dove la convergenza è puntuale per $x \in (-\infty,-1/2)$ e totale negli insiemi del tipo $[a,b] \subset (-\infty,-1/2)$. Infatti

$$\left|\frac{x+1}{x}\right| < 1 \quad \text{per} \quad x \in (-\infty,-1/2)\,.$$

Soluzione 1.25 - Calcolando il seguente limite

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3}$$

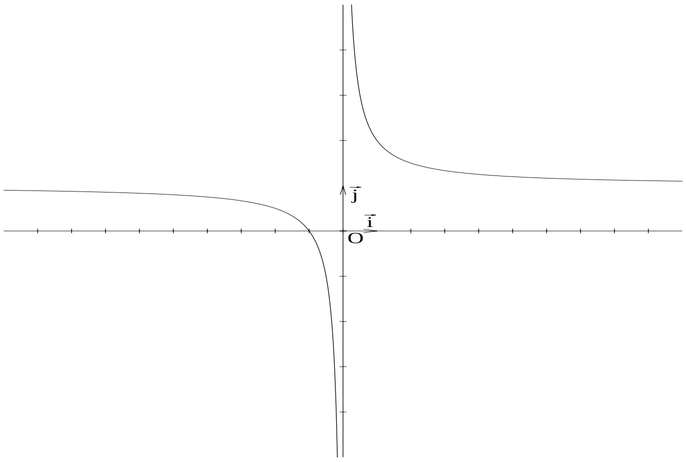

Figura 1.7:

si ha che il raggio è 3. Conclusione: la serie converge (puntualmente) in $(-3,3)$ e non converge (puntualmente) in $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$. Vediamo in 3 e -3 che succede.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}(-3)^n \quad \text{non converge,} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}3^n \quad \text{diverge}$$

Conclusione: si ha convergenza puntuale (solo) in $(-3,3)$. Vediamo gli altri tipi di convergenza.

Teorema 1.3 *Una serie di potenze centrata in* 0 *converge totalmente in ogni intervallo chiuso del tipo* $[-a,a]$ *con* $a<\rho$.

Si ha di conseguenza convergenza totale, e quindi uniforme, in ogni intervallo $[-a,a]$ con $a<3$. Vediamo se si ha convergenza uniforme anche in $(-3,3)$. Ragionando come al solito (si veda, ad esempio, la risoluzione dell'esercizio 1.11) si deduce che la serie non può convergere uniformemente in $(-3,3)$ e quindi nemmeno totalmente.
Si osservi che la serie ha come somma la funzione

$$f(x)=\frac{3}{3-x}\,.$$

Soluzione 1.26 - Si può fare il limite della radice n-esima di $\frac{n^\alpha+e^{\alpha n}}{n}$ oppure pensare la serie come (**perché?**)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^\alpha}{n}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\alpha n}}{n}x^n$$

e studiare separatamente le due serie. Seguiamo quest'ultima strada. Il primo termine:

$$\sqrt[n]{n^{\alpha-1}}\to 1 \qquad \text{quindi il raggio di convergenza è } 1\,,$$

il secondo termine:

$$\sqrt[n]{\frac{e^{\alpha n}}{n}}\to e^\alpha \qquad \text{quindi il raggio di convergenza è } \frac{1}{e^\alpha}\,.$$

Se $\alpha=0$: il raggio è lo stesso e la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}x^n$. Vediamo gli estremi: per $x=-1$ si, per $x=1$ no. Insieme di convergenza puntuale $[-1,1)$. La convergenza è uniforme? Non può esserlo dappertutto (vedi esercizio precedente).

Teorema 1.4 (Leibniz) *Sia $(a_n)_n$ una serie a termini positivi. Se $a_n\to 0$ ed è decrescente allora $\sum(-1)^n a_n$ converge. Inoltre*

$$\Big|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n-\sum_{n=0}^{m}(-1)^n a_n\Big|\leqslant|a_{m+1}|\,.$$

Sicuramente abbiamo convergenza totale negli insiemi del tipo $[a,b]$ con $-1<a<b<1$, non abbiamo convergenza uniforme, e quindi nemmeno totale, in $[0,1)$. Vediamo in $[-1,0]$: qui la serie è a segni alterni, per vedere se la serie è uniformemente convergente uso il criterio di Leibniz. Detta f la somma della serie e f_n le somme parziali devo vedere se vale

$$\lim_{n\to+\infty}\|f_n-f\|_\infty\to 0$$

cioè

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sup_{[-1,0]}&\Big|\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2}{k}|x|^k-\sum_{n=0}^{n}(-1)^k\frac{2}{k}|x|^k\Big|\\ &\leqslant\lim_{n\to+\infty}\sup_{[-1,0]}\frac{2}{n+1}|x|^{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n+1}\to 0\end{aligned}$$

quindi vi è convergenza uniforme in $[-1,0]$, ma non totale! Concludendo: per $\alpha = 0$ si ha che la serie converge puntualmente in $[-1,1)$, uniformemente in $[-1,b] \subset [-1,1)$ e totalmente in ogni $[a,b] \subset (-1,1)$.
Gli altri casi: se $\alpha > 0$ il raggio è $1/e^{\alpha}$. Il primo termine sicuramente converge totalmente in $[-1/e^{\alpha}, 1/e^{\alpha}]$, quindi limitiamoci a considerare il secondo. Negli estremi: per $x = -1/e^{\alpha}$ la serie converge, per $x = 1/e^{\alpha}$ la serie diverge, infatti si ha rispettivamente

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,.$$

Convergenza uniforme e totale come sopra:

$$\text{convergenza uniforme in } \left[-\tfrac{1}{e^{\alpha}}, b\right] \quad \text{per ogni } b < \tfrac{1}{e^{\alpha}}$$

$$\text{convergenza totale in } [a,b] \quad \text{per ogni } a > -\tfrac{1}{e^{\alpha}}\,,\ b < \tfrac{1}{e^{\alpha}}$$

Se $\alpha < 0$ il raggio è 1. Vediamo gli estremi: il secondo termine questa volta converge totalmente in $[-1,1]$. Il primo negli estremi è

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{1-\alpha}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-\alpha}}$$

che convergono entrambe. Vi è convergenza totale in $[-1,1]$.

Soluzione 1.27 - È facile vedere che

$$f^{(k)}(x) = f(x) \qquad \text{per ogni } k \in \mathbf{N}\,.$$

Per cui lo sviluppo di Taylor è dato da

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)(x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,.$$

Vediamo di studiare la convergenza di questa serie: puntuale in tutto $\mathbf{R}$, ad esempio con il criterio della radice n-esima. Non può essere uniforme in tutto $\mathbf{R}$ perché

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = +\infty\,.$$

Se anche ci limitiamo a $x \in (-\infty, 0]$ abbiamo (p_n il polinomio di grado n delle somme fino all'n-esimo termine)

$$\sup_{x \in (-\infty,0]} \Big| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \Big| = \sup_{x \in (-\infty,0]} |e^x - p_n(x)| = +\infty \, .$$

Vediamo cosa si può dire: se mi limito a considerare un intervallo $[a, b]$ ho che

$$\Big| \frac{x^k}{k!} \Big| \leqslant \frac{b^k}{k!}$$

per la crescenza di x^k. La serie data dai maggioranti converge. Concludendo: la serie di Taylor in $x = 0$ è data da $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ che converge puntualmente su tutto $\mathbf{R}$ e uniformemente e totalmente solo sui compatti.

Soluzione 1.29 - La serie dell'esercizio **non è** una serie di potenze. Tuttavia lo studio di tale serie può essere ricondotto allo studio di una serie di potenze.
Innanzitutto si osservi che

$$\lim_n \Big[\frac{n}{n+2} \frac{|x|^n}{(1+x^2)^n} \Big]^{1/n} = \frac{|x|}{1+x^2}$$

che è sempre minore di 1 (per esercizio vedere che $\frac{|x|}{1+x^2} \leqslant 1/2$). Di conseguenza la serie converge assolutamente per ogni $x \in \mathbf{R}$. Calcoliamo la somma della serie (per $|y| < 1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} \, y^n \, .$$

Si ha che

$$\frac{n}{n+2} \, y^n = \frac{n+2-2}{n+2} \, y^n = \Big[1 - \frac{2}{n+2} \Big] \, y^n = y^n - \frac{2}{y^2} \frac{1}{n+2} \, y^{n+2}$$

Ora mi chiedo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} \, y^n \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} y^n - \frac{2}{y^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} \, y^{n+2} \, .$$

La risposta è si, perché $\lim_n (a_n + b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n$ qualora i due limiti a destra (o almeno uno di essi) esistano e nel nostro caso le due serie a destra convergono entrambe (per $|y| < 1$). Prendiamo in esame il secondo termine:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}\, y^{n+2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^y t^{n+1} dt \stackrel{!}{=} \int_0^y \Big(\sum_{n=1}^{\infty} t^{n+1} \Big) dt = \\ &= \int_0^y \Big(\sum_{n=2}^{\infty} t^n \Big) dt = \int_0^y \frac{t^2}{1-t} dt\end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio con il punto esclamativo è lecito se la convergenza è uniforme!! (e lo è se y è fissato tra -1 e 1). Per integrare $\frac{t^2}{1-t}$ dividiamo t^2 per $1-t$ e scriviamo

$$t^2 = (1-t)(-1-t) + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{t^2}{1-t} = -(1+t) + \frac{1}{1-t}$$

e quindi integrando

$$\int_0^y \frac{t^2}{1-t} dt = -y - \frac{y^2}{2} - \log(1-y)\,.$$

Tirando le fila si ha

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}\, y^n &= \frac{y}{1-y} - \frac{2}{y^2}[\,-y - \frac{y^2}{2} - \log(1-y)] \\ &= \frac{y}{1-y} + \frac{2}{y} + 1 + \frac{2}{y^2} \log(1-y)\end{aligned}$$

Si osservi che questa funzione è regolare anche se sembra avere singolarità in $y = 0$. Infatti $\log(1-y) = -y + y^2/2 + o(y^2)$ e quindi

$$\begin{aligned}\frac{y}{1-y} + \frac{2}{y} + 1 + \frac{2}{y^2} \log(1-y) &= \frac{1}{y^2}\Big[\frac{y^3}{1-y} + 2y + y^2 + 2\log(1-y)\Big] = \\ &= \frac{1}{y^2}\Big[\frac{y^3}{1-y} + 2y + y^2 - 2y + y^2 + o(y^2)\Big]\end{aligned}$$

Tornando al nostro problema: poiché la quantità $\frac{x^n}{(1+x^2)^n}$ è sempre minore di 1 la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}\, \frac{x}{1+x^2}$$

converge puntualmente per ogni $x \in \mathbf{R}$; converge pure uniformemente e totalmente su $\mathbf{R}$ poiché $\frac{x}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{2}$. Si conclude sostituendo nell'espressione di sopra $\frac{x}{1+x^2}$ al posto di y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}\, \frac{x^n}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{1+x^2-x} - \frac{x}{1+x^2} - \frac{x^2}{2(1+x^2)^2} - \log\frac{1+x^2-x}{1+x^2}\,.$$

Soluzione 1.30 - Usiamo una conseguenza del seguente risultato.

Teorema 1.5 *Sia a_n serie a termini positivi. Se esiste*

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

allora esiste anche $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$ *e vale*

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \sqrt[n]{a_n}\,.$$

Il viceversa non è vero! Si consideri ad esempio la successione data da $a_n = 1/n$ se n è pari e $a_n = 1/2n$ se n è dispari. Si ha $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = 1$, mentre invece $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$ non esiste (il rapporto è $1/2$ se n è pari, 2 se n è dispari).

Allora calcoliamo il limite della radice n-esima calcolando il rapporto. (provare a farlo con la radice n-esima!!!)

$$\lim_n \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \lim_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$$

quindi vi è convergenza puntuale in $(-e, e)$ e non vi è in $(-\infty, -e) \cup (e, +\infty)$. Vediamo gli estremi:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \text{quindi per } x = n \quad e^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} \geqslant \frac{n^n}{n!}$$

per cui

$$\frac{n!}{n^n} e^n \geqslant 1\,. \tag{1.3}$$

La serie quindi non converge per $x = -e$ e diverge a $+\infty$ per $x = e$. Ovviamente converge totalmente e uniformemente in tutti gli intervalli $[a, b] \subset (-e, e)$. Come al solito si ha che la serie non può convergere uniformemente in $(-e, e)$.

Anziché la stima (1.3) si può usare, per studiare il comportamento della serie in $x = e$ la formula di Stirling

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}\,\left(1 + O(1/n)\right).$$

Soluzione 1.31 - Sappiamo che la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \text{per } |q| < 1\,.$$

Possiamo allora concludere che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \qquad \text{converge a} \qquad \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{per } |x| < 1\,.$$

Studiamo questa serie. Converge puntualmente in $(-1,1)$. Per $x = 1$ e per $x = -1$ ovviamente non converge. Al solito, la serie non convergerà uniformemente in $(-1,1)$, ma è facile vedere che converge totalmente in tutti i compatti $[a,b]$ contenuti in $(-1,1)$. Calcoliamo la derivata di $f(x) = \operatorname{arctg}\, x$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Integrando termine a termine si ha, posto $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k}$, grazie alla convergenza uniforme

$$\lim_n \int_0^x f_n(t)dt = \int_0^x \lim_n f_n(t)dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \operatorname{arctg}\, x\,.$$

Ora

$$\int_0^x (-1)^k t^{2k} dt = (-1)^k \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}$$

per cui

$$\operatorname{arctg}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

per ogni $x \in [-1,1]$ e la convergenza uniforme solo sui compatti contenuti in $(-1,1)$.

Soluzione 1.32 - Calcoliamo la derivata di $f(x) = \operatorname{sen} x$.

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= \cos x & \qquad f^{(1)}(0) &= 1 \\
f^{(2)}(x) &= -\operatorname{sen} x & \qquad f^{(2)}(0) &= 0 \\
f^{(3)}(x) &= -\cos x & \qquad f^{(3)}(0) &= -1 \\
f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen} x & \qquad f^{(4)}(0) &= 0
\end{aligned}$$

e poi il ciclo si ripete. Quindi lo sviluppo in 0 è dato da

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,.$$

Vediamo la convergenza. Per il criterio di Leibniz converge per ogni x reale. La convergenza è uniforme e totale solo sui compatti (in modo analogo all'esercizio precedente). In modo simile si calcola anche lo sviluppo del coseno

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\,.$$

Soluzione 1.33 - Si ha che

$$\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!}$$

per cui il limite della radice n-esima è 0: la serie converge per ogni $x \in \mathbf{R}$. Prima di studiare le convergenze uniforme e totale calcoliamo la somma della serie. Sappiamo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x\,.$$

Si ha che

$$\frac{n}{(n+1)!} x^n = x \frac{d}{dx} \Big[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{1}{x} \Big]$$

per cui, grazie alla convergenza uniforme posso invertire il segno di derivata con il limite e ottenere

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} x \frac{d}{dx} \Big[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{1}{x} \Big] \\
&= x \frac{d}{dx} \Big[\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \Big] \\
&= x \frac{d}{dx} \Big[\frac{1}{x} (e^x - 1 - x) \Big] \\
&= x \Big[-\frac{1}{x^2} (e^x - 1 - x) + \frac{1}{x} (e^x - 1) \Big] \\
&= e^x - \frac{1}{x} (e^x - 1)\,.
\end{aligned}$$

Vediamo la convergenza uniforme in $\mathbf{R}$:

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}\Big|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k+1)!}x^k-\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}x^k\Big| = \sup_{x\in\mathbf{R}}\Big|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k}{(k+1)!}x^k\Big| = +\infty$$

quindi non vi è convergenza uniforme in $\mathbf{R}$. Nemmeno se ci limitiamo a semirette $[a,+\infty)$, perché l'estremo superiore è $+\infty$ proprio perché consideriamo la semiretta fino a $+\infty$. Che succede se consideriamo $(-\infty,0]$?

$$\sup_{x\in(-\infty,0]}\Big|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k+1)!}x^k-\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}x^k\Big| =$$
$$= \sup_{x\in(-\infty,0]}\Big|e^x-\frac{1}{x}(e^x-1)-\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}x^k\Big| = +\infty$$

perché $f(x)=e^x-\frac{1}{x}(e^x-1)$ è limitata in $(-\infty,0]$, mentre un polinomio di grado n no!

(come, ad esempio, fatto per e^x). Per $x\in[-a,a]$ con a positivo

$$\Big|\frac{k}{(k+1)!}x^k\Big| \leqslant \frac{k}{(k+1)!}a^k\,.$$

La serie $\sum_n \frac{na^n}{(n+1)!}$ converge per ogni a reale per cui si ha convergenza totale e uniforme in ogni compatto.

Soluzione 1.34 - Spezzando il polinomio x^2-5x+6 come prodotto di $x-3$ e $x-2$ si ottiene che

$$f(x)=\frac{1}{x-3}-\frac{2}{x-2}\,.$$

Sapendo che, per $|q|<1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty}q^n$ converge al valore $\dfrac{1}{1-q}$ si può scrivere

$$\frac{1}{x-3}=-\frac{1}{3-x}=-\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{x}{3}\Big)^n$$

che converge per $|\frac{x}{3}|<1$, cioè per $|x|<3$. L'altro termine:

$$-\frac{2}{x-2}=\frac{2}{2-x}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{x}{2}\Big)^n$$

che converge per $|\frac{x}{2}| < 1$, cioè per $|x| < 2$. Sarà possibile effettuare la somma solo dove convergono entrambe, quindi sicuramente per $x \in (-2, 2)$ si ha che

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big[\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\Big] x^n \,.$$

Soluzione 1.35 - Si osservi che

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \text{e che} \qquad \frac{d}{dx}\frac{1}{(1-x)^2} = 2\,\frac{1}{(1-x)^3} \,.$$

Poiché la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge uniformemente in ogni intervallo chiuso $[a, b] \subset (-1, 1)$ e così pure la serie delle sue derivate (prime e seconde, ma non solo) si può affermare che (per quei valori di $x \in [a, b] \subset (-1, 1)$ con a, b arbitrari, ma $|a|, |b| < 1$, per cui per ogni $x \in (-1, 1)$)

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \frac{d}{dx}\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx} n x^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} \,.$$

Per cui dove vi è convergenza per entrambe le serie, e in questo caso entrambe convergono in $(-1, 1)$, vale

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{(1-x)^3} + \frac{3x^2}{(1-x)^3} = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} + \frac{3x^2}{2}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)(n+1)}{2}x^n + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n(n-1)}{2}x^n \\
&= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n+2)(n+1) + 3n(n-1)}{2}x^n \\
&= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty}(2n^2+1)x^n \,.
\end{aligned}$$

Soluzione 1.36 - La funzione f può essere scritta nei seguenti modi

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{x-2}{3x-2}\right) &= \log(x-2)-\log(3x-2) \qquad \text{NO!!}\\ &= \log(2-x)-\log(2-3x) \qquad \text{SI!!}\end{aligned}$$

Perché scartiamo il primo dei due? I due modi non sono equivalenti: la funzione f è definita quando il suo argomento è positivo, e cioè quando $x-2$ e $3x-2$ hanno lo stesso segno. Quindi f può essere spezzata come sopra nel primo modo se $x-2$ e $3x-2$ sono entrambi positivi, nel secondo modo se $x-2$ e $3x-2$ sono entrambi negativi. Per $x=0$, intorno al quale vogliamo sviluppare f, le funzioni $\log(x-2)$, $\log(3x-2)$ non sono definite, mentre $\log(2-x)$ e $\log(2-3x)$ si.
Per esercizio, e anche per convincersi di quanto appena detto, disegnare i grafici di $\log(\frac{x-2}{3x-2})$, $\log(x-2)$, $\log(3x-2)$, $\log(2-x)$ e $\log(2-3x)$.
Abbiamo trasferito quindi il problema nello scrivere lo sviluppo delle due funzioni $\log(2-x)$ e $\log(2-3x)$. Si ha, per $|x/2|<1$,

$$\frac{d}{dx}\log(2-x) = -\frac{1}{2-x} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

Integrando tra 0 e x, con $|x|<2$, poiché la serie sopra converge uniformemente

$$\log(2-t)\Big|_0^x = -\frac{1}{2}\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^n dt = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\left(\frac{t}{2}\right)^n dt$$

e quindi

$$\log(2-x)-\log 2 = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^x = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\frac{x^{n+1}}{n+1}\,.$$

Analogamente si ottiene, per $|3x/2|<1$ e quindi per $|x|<2/3$,

$$\log(2-3x)-\log 2 = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1}\,.$$

Concludendo:

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{x-2}{3x-2}\right) &= \log 2-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\frac{x^{n+1}}{n+1}-\log 2+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]\frac{x^{n+1}}{n}\end{aligned}$$

e l'insieme di convergenza è l'intersezione degli insiemi sui quali convergono separatamente le due serie. Concludiamo che

$$\log\left[\frac{x-2}{3x-2}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{1}{2^n}\right]\frac{x^n}{n}$$

e la convergenza è puntuale in $[-2/3, 2/3)$, uniforme in tutti gli insiemi del tipo $[-2/3, a]$ con $a \in (-2/3, 2/3)$ e totale in tutti gli insiemi del tipo $[b, c]$ con $b, c \in (-2/3, 2/3)$, $b < c$.
Infatti una delle due serie converge puntualmente almeno in $(-2, 2)$ e l'altra almeno in $(-2/3, 2/3) \subset (-2, 2)$, quindi la serie converge in $(-2/3, 2/3)$ e non converge in $(-\infty, -2/3) \cup (2/3, +\infty)$ (per verifica calcolare il limite della radice n-esima dei coefficienti). Negli estremi: è sufficiente studiare la seconda serie, poiché convergendo la prima in $(-2, 2)$ in particolare convergerà in $-2/3$ e $2/3$. Per $x = 2/3$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3}\frac{1}{n}$$

che diverge a $+\infty$, mentre per $x = -2/3$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\frac{1}{n} = \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

che converge.
La convergenza è uniforme in tutti gli intervalli del tipo $[-2/3, a]$ con $a < 2/3$ e totale negli intervalli del tipo $[b, c] \subset (-2/3, 2/3)$.

Soluzione 1.37 - L'insieme è $[-1, 1]$ per $\alpha < -1/2$, $[-1, 1)$ per $\alpha \geqslant -1/2$.

Soluzione 1.40 - Si può fare seguendo la soluzione dell'Esercizio 1.36 osservando che $1 + x - 2x^2 = (2x + 1)(1 - x)$.

Soluzione 1.42 - Attenzione! nella prima serie i coefficienti a_n sono dati da $1/n^2$, nella seconda no! Alcuni infatti sono zero. I coefficienti della seconda serie sono infatti

$$a_n = \begin{cases} 1/n & \text{se } n = k^2 \text{ con } k \in \mathbf{N}\,, \\ 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

Il comportamento però è lo stesso: infatti la prima converge totalmente in $[-1,1]$; e la serie converge sia in -1 che in 1. Per lo studio della seconda si può usare semplicemente il criterio della radice, valutando

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x|^{n^2}/n^2} = \lim_{n\to\infty} |x|^n \sqrt[n]{1/n^2}$$

si ottiene che la serie converge (assolutamente) per $|x| \leqslant 1$ e non converge per $|x| > 1$. La convergenza in $[-1,1]$ è totale.
A proposito della seconda serie si veda anche l'Osservazione 1.24.4 delle dispense di teoria di Analisi II (Albanese-Leaci-Pallara).

Soluzione 1.44 - Si osservi che i termini di questa serie sono "alcuni" dei termini della serie $\sum_k \frac{1}{k}x^k$. Infatti i coefficienti a_n sono dati da

$$a_n = \begin{cases} 1/n & \text{se } n = k^k \text{ con } k \in \mathbf{N}\,, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per cui

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{1/n} & \text{se } n = k^k \text{ con } k \in \mathbf{N}\,, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di conseguenza il limite $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ non esiste. Possiamo trattare la serie come una serie numerica, fissando x e valutando

$$\sqrt[n]{\left|\frac{x^{n^n}}{n^n}\right|} = \frac{x^{n^{n-1}}}{n}\,.$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ si ottiene che la serie converge per $x \in [-1,1]$.
Alternativamente, per chi conoscesse il *limsup* e che il raggio di convergenza è dato dal reciproco di $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, si ha che $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k^k]{k^k} = \lim_{h\to\infty} \sqrt[h]{h} = 1$. Il raggio quindi è 1. Per $x = 1$ e $x = -1$ la serie converge e quindi l'insieme di convergenza è $[-1,1]$. La convergenza è anche totale.
Si veda anche l'Osservazione 1.24.4 delle dispense di teoria di Analisi II (Albanese-Leaci-Pallara).

Soluzione 1.45 - Questo è un esempio in cui il limite di $a_n = (2+\operatorname{sen} n\pi/2)^n$ non esiste. Si ha che

$$2 + \operatorname{sen} n\pi/2 \quad \text{può assumere i valori } 1, 2, 3\,.$$

L'estremo superiore (si veda la definizione di raggio di convergenza nelle dispense) dei numeri per cui la serie converge è $1/3$ (l'inverso del massimo valore che può assumere a_n): infatti non può essere maggiore perché se lo fosse, diciamo $r > 1/3$, per tutti i valori $x \in (1/3, r)$ la serie convergerebbe. Ma per infiniti valori di $n \in \mathbf{N}$ si ha che

$$2 + \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \quad \text{assume il valore } 3$$

per cui se fissiamo $x > 1/3$ e minore di r si avrebbe per infinite volte che

$$(2 + \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2})^n x^n > 1$$

il che non farebbe convergere la serie.
Si veda anche l'Osservazione 1.24.4 delle dispense di teoria di Analisi II (Albanese-Leaci-Pallara).

Soluzione 1.46 - Poiché la funzione è dispari lo sviluppo è di soli seni. Si ha

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \frac{4}{\pi n} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

quindi lo sviluppo è

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} \operatorname{sen}(2n+1)x \,.$$

La media di f è nulla, per cui a_0 è nullo. Usando la formula (1.2) si ha che lo sviluppo di

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t) dt = |x| - \pi$$

è dato da (i coefficienti A_n di $\cos nx$ sono nulli, i coefficienti B_n di $\operatorname{sen} nx$ sono dati da $4/\pi n^2$ per n dispari, 0 altrimenti)

$$|x| - \pi = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)^2} \cos(2n+1)x$$

dove $A_0 = \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} [|x| - \pi] dx = -\pi^2/\pi = -\pi$. Per cui lo sviluppo di $|x|$ in $[-\pi, \pi]$ è (confrontare con l'Esercizio 1.49)

$$\pi - \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)^2} \cos(2n+1)x = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)^2} \cos(2n+1)x \,.$$

Soluzione 1.47 - La funzione è pari, per cui il suo sviluppo è fatto di soli coseni. Si ha che $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = 2\pi^3/3$ e

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \; dx &= x^2 \frac{\operatorname{sen} nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x \frac{\operatorname{sen} nx}{n} dx \\ &= 2x \frac{\cos nx}{n^2}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} 2 \frac{\cos nx}{n^2} dx = (-1)^n \frac{4\pi}{n^2}\end{aligned}$$

per cui lo sviluppo è dato da

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx \, .$$

Poiché l'estensione a tutto $\mathbf{R}$ è C^1 a tratti e continua si ha convergenza uniforme su tutto $\mathbf{R}$. In particolare per $x = \pi$ si ha

$$f(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} (-1)^n = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

da cui si ricava

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \, .$$

Soluzione 1.48 - Il periodo $2T$ è 2, quindi $T = 1$. Calcoliamo i coefficienti:

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \, .$$

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^{1} f(x) \cos nx\pi \; dx = \int_0^1 x \cos nx\pi \; dx \\ &= x \Big(\frac{1}{n\pi} \operatorname{sen} n\pi x \Big)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen} n\pi x \; dx \\ &= -\frac{1}{n\pi} \Big(-\frac{1}{n\pi} \cos n\pi x \Big)\Big|_0^1 \\ &= \begin{cases} -\dfrac{2}{n^2\pi^2} & n \text{ dispari} \\ \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \int_{-1}^{1} f(x)\cos nx\pi \; dx = \int_0^1 x \operatorname{sen} nx\pi \; dx \\
&= x\Big(-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\Big)\Big|_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x \; dx \\
&= (-1)^{n+1}\frac{1}{n\pi} + \frac{1}{n\pi}\Big(\frac{1}{n\pi}\operatorname{sen} n\pi x\Big)\Big|_0^1 = (-1)^{n+1}\frac{1}{n\pi}
\end{aligned}
$$

quindi lo svilupo è

$$
\frac{1}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)^2\pi^2}\cos(2n+1)\pi x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\pi}\operatorname{sen} n\pi x \, .
$$

Converge puntualmente alla funzione

$$
\begin{cases} f(x) & x \in (-1,1) \\ \frac{1}{2} & x = -1\,, x = 1\,. \end{cases}
$$

La convergenza uniforme c'è solo negli insiemi del tipo $[a,b] \subset (-1,1)$ visto che il limite non è continuo.
Valutiamo ora la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$. Per $x = 1$ la serie converge al valore $1/2$ per cui

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \frac{1}{4} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)^2\pi^2}\cos(2n+1)\pi + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\pi}\operatorname{sen} n\pi \\
&= \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)^2\pi^2}
\end{aligned}
$$

da cui

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.
$$

Ora per la somma $\sum_n \frac{1}{(2n)^2}$ possiamo procedere in due modi: sfruttare l'esercizio precedente dal quale sappiamo che $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ per cui otteniamo

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{24}\,,
$$

oppure, ignorando il risultato dell'esercizio precedente, osservare che $\sum_n \frac{1}{(2n)^2} = \sum_n \frac{1}{4n^2}$ per cui da

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}
$$

dedurre che
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$
e quindi
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\,\frac{4}{3}\,\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{24}\,.$$

Soluzione 1.49 - La estendo per periodicità a tutto **R** e per questione di semplicità di calcolo sviluppo la funzione $g(x) = |x|$ definita in $[-\pi, \pi]$ ed estesa per periodicità a tutto **R** (si veda la Figura 1.8). In questo modo anziché calcolare
$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = \int_0^{\pi} x \cos nx dx - \int_{\pi}^{2\pi} x \cos nx dx + \int_{\pi}^{2\pi} 2\pi \cos nx dx$$
calcolo

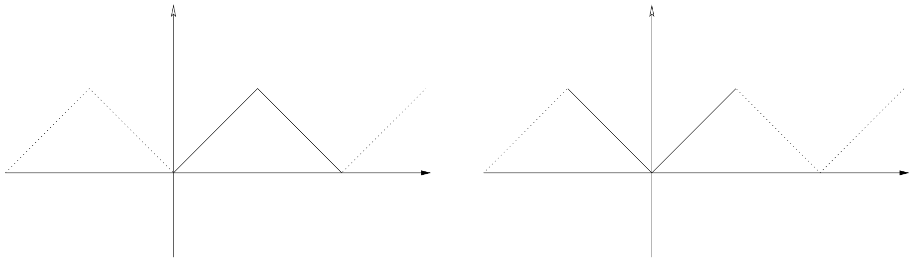

Figura 1.8:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx dx = 2 \int_0^{\pi} x \cos nx dx\,.$$
Quindi i coefficienti sono dati da:
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \pi$$
e per $n > 0$
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \Big[\frac{x}{n} \operatorname{sen} nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx dx \Big] \\ &= \frac{2}{\pi} \Big[0 + \frac{1}{n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} \Big] = \frac{2}{\pi n^2} [(-1)^n - 1] \end{aligned}$$

per cui

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ -\dfrac{4}{\pi n^2} & \text{se } n \text{ dispari}. \end{cases} \tag{1.4}$$

Lo sviluppo risulta quindi essere

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^2} \cos(2k+1)x\,. \tag{1.5}$$

La convergenza è puntuale e uniforme su tutto $\mathbf{R}$ (perché la funzione è continua e C^1 a tratti), in particolare sull'intervallo $[0, 2\pi]$ al quale eravamo interessati. In particolare se valutiamo la serie per $x = 0$ questa convergerà al valore $f(0) = 0$, per cui si ha

$$\frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^2} = 0 \qquad \text{da cui} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

Per l'altra serie sfruttiamo l'uguaglianza di Parceval (1.1):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)\,.$$

Per cui da $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = 2\pi^3/3$ otteniamo

$$\frac{2\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(2k+1)^4}$$

e infine

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^2}{16}\Big(\frac{2\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{2}\Big) = \frac{\pi^4}{96}\,.$$

Per considerare uno sviluppo in soli seni o di soli coseni in generale si fa così: data $h : [0, T] \to \mathbf{R}$ consideriamo la funzione $\tilde{h}$ definita in $[-T, T)$

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} h(x) & x \in [0, T] \\ h(-x) & x \in [-T, 0] \end{cases}$$

ed estendendo poi per periodicità a tutto $\mathbf{R}$ la funzione. Poiché la funzione risulta così pari il suo sviluppo sarà di soli coseni e

$$\int_{-T}^{T} \tilde{h}(x) \cos \frac{n\pi}{T} x dx = 2 \int_0^T h(x) \cos \frac{n\pi}{T} x\,.$$

Se vogliamo uno sviluppo di soli seni si considera

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} h(x) & x \in [0,T] \\ -h(-x) & x \in [-T,0]\,. \end{cases}$$

Nel nostro caso estendiamo la funzione nel modo seguente:

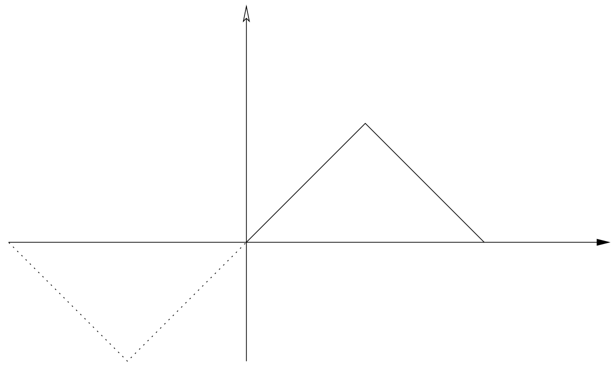

Figura 1.9:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} -x-2\pi & \text{se } x \in [-2\pi,-\pi] \\ x & \text{se } x \in [-\pi,\pi] \\ -x+2\pi & \text{se } x \in [\pi,2\pi] \end{cases}$$

e poi estendo $\tilde{f}$ periodicamente su tutto $\mathbf{R}$ (a questo punto avremo una funzione periodica di periodo 4π!). La restrizione di $\tilde{f}$ a $[0,2\pi]$ è sempre la nostra f. La funzione così estesa risulta essere dispari fornendo i coefficienti dei coseni nulli. Valutiamo i coefficienti:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi} g(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{2\pi}x dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n}{2}x dx = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n}{2}x dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n}{2}x dx = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{sen}\,\frac{n}{2}x dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} [-x+2\pi]\,\mathrm{sen}\,\frac{n}{2}x dx\,. \end{aligned}$$

Abbiamo che

$$\int x\,\mathrm{sen}\,\frac{n}{2}x dx = -\frac{2}{n}x\cos\frac{n}{2}x + \frac{4}{n^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{n}{2}x$$

per cui

$$\begin{array}{ll} \text{tra } 0 \text{ e } \pi & -\dfrac{2}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}+\dfrac{4}{n^2\pi}\,\mathrm{sen}\,\dfrac{n\pi}{2} \\ \text{tra } \pi \text{ e } 2\pi & \dfrac{1}{\pi}\Big[-\Big(-\dfrac{4\pi}{n}\cos n\pi+\dfrac{2\pi}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}+\dfrac{4}{n^2}\,\mathrm{sen}\,n\pi-\dfrac{4}{n^2}\,\mathrm{sen}\,\dfrac{n\pi}{2}\Big)+ \\ & \quad +2\pi\Big(-\dfrac{2}{n}\cos n\pi+\dfrac{2}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}\Big)\Big]\,. \end{array}$$

Sommando, poiché

$$\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}(-1)^{(n-1)/2} & n \text{ dispari}\\ 0 & n \text{ pari}\,,\end{cases}$$

si ha

$$b_n=\frac{8}{n^2\pi}\,\mathrm{sen}\,n\frac{\pi}{2}=\frac{8}{n^2\pi}\begin{cases}(-1)^{(n-1)/2} & n \text{ dispari}\\ 0 & n \text{ pari}\,,\end{cases}$$

La serie è data dalla somma dei seguenti termini

$$\sum_{n \text{ dispari}}\frac{8}{n^2\pi}\,\mathrm{sen}\,n\frac{\pi}{2}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8}{(2n+1)^2\pi}\,\mathrm{sen}\,\frac{2n+1}{2}x$$

Attenzione! Lo sviluppo trovato è lo sviluppo in soli seni della funzione $\tilde{f}$, quello in (1.5) è lo sviluppo della funzione f: convergono entrmabi (uniformemente) alla funzione originale nell'intervallo $[0,2\pi]$, ma a funzioni diverse nell'intervallo $[-2\pi,0]$ (si vedano le Figura 1.8 e Figura 1.9).
Ora valutiamo lo sviluppo della funzione g: si osservi che nell'intervallo $[-\pi,\pi]$ la funzione $f(x)=|x|$ è una primitiva della funzione g, e precisamente

$$f(x)=\pi+\int_{-\pi}^{x}g(t)dt\,,\qquad \text{cioè}\qquad f(x)-\pi=\int_{-\pi}^{x}g(t)dt\,.$$

Se denotiamo con α_n e β_n i coefficienti

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\cos nx dx\qquad \beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\,\mathrm{sen}\,nx dx$$

si ha che $\alpha_0=0$ e dalle formule (1.2) si ricava

$$\beta_n=-na_n\,,\qquad \alpha_n=nb_n$$

quindi, conoscendo a_n (si veda (1.4)) e b_n ($b_n = 0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$) si ricava immediatamente

$$\beta_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ \dfrac{4}{\pi n} & \text{se } n \text{ dispari} . \end{cases}$$

per cui

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \operatorname{sen}(2k+1)x$$

(si confronti con l'Esercizio 1.46).

Soluzione 1.50 - La funzione

$$f(x) = 1 - \frac{2|x|}{\pi}, \qquad x \in [-\pi, \pi] .$$

come si vede dal garfico, è una funzione pari per cui $b_n = 0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Si verifica facilmente che anche $a_0 = 0$. Gli altri coefficienti sono dati ($n > 0$)

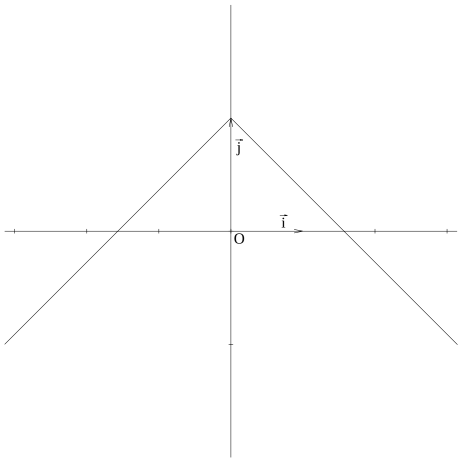

Figura 1.10:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big[\cos nt - \frac{2}{\pi}|t|\cos nt\Big]dt \\
&= -\frac{2}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}|t|\cos nt\ dt = -\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi} t\cos nt\ dt = \\
&= -\frac{4}{\pi^2}\Big[\frac{t}{n}\operatorname{sen} nt\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\operatorname{sen} nt\ dt\Big] \\
&= -\frac{4}{\pi^2}\Big[-\frac{1}{n}\Big(-\frac{1}{n}\cos nt\Big)\Big]\Big|_0^{\pi} = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \dfrac{8}{n^2\pi^2} & n \text{ dispari}\end{cases}
\end{aligned}
$$

per cui la serie è data da

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8}{(2n+1)^2\pi^2}\cos(2n+1)x$$

che converge uniformemente su tutto $\mathbf{R}$ (visto che il prolungamento periodico a tutto $\mathbf{R}$ di f è continuo e C^1 a tratti). La serie converge anche totalmente visto che

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]}\left|\frac{8}{(2n+1)^2\pi^2}\cos(2n+1)x\right| = \frac{8}{(2n+1)^2\pi^2}\,.$$

Per calcolare le due serie (già calcolate negli esercizi 1.48 e 1.49) si può valutare la funzione in $x=0$ e usare l'uguaglianza (1.1).