Capitolo 1

Funzioni di più variabili: insiemi di livello, limiti, continuità, derivabilità, differenziabilità

Ultimo aggiornamento: 1 maggio 2018

Esercizio 1.1 - Si disegnino e/o si scrivano gli insiemi di livello (e possibilmente il grafico) delle seguenti funzioni:

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$
2. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
3. $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left[(x^2 + y^2)\log(1 + x^2 + y^2)\right]$
4. funzioni radiali
5. $f(x,y) = (x - y)^2$
6. $f(x,y) = x^2 - y^2$
7. $f(x,y) = |x| + |y|$
8. $f(x,y) = |x|$

9. $f(x,y) = |x| - |y|$
10. $f(x,y) = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$ con $p > 1$
11. $f(x,y) = \max\{|x|, |y|\}$
12. $f(x,y) = \dfrac{1+xy}{x^2}$
13. $f(x,y) = \sqrt{xy + \log x}$,
14. $f(x,y) = e^{x^2+2y^2}$
15. $f(x,y,z) = \log \dfrac{z}{x^2+y^2}$
16. $f(x,y,z) = \operatorname{arctg} \dfrac{x^2+y^2}{(z-1)^2}$
17. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Esercizio 1.2 - Si dica qual è il più grande sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ nel quale è definibile ciascuna delle seguenti funzioni

1. $f(x,y) = \sqrt{xy + \log x}$,
2. $f(x,y) = \sqrt{xe^y - ye^x}$,
3. $f(x,y) = \sqrt{xy(xy-1)}$.

Esercizio 1.3 - Si calcoli, se esiste, il limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x}$.

Esercizio 1.4 - Si dica se i seguenti limiti esistono oppure no, ed eventualmente calcolarli:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^4+y^4)}{x^2+y^2}\,, \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^4)}{x^2+y^2}\,, \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^4+y^4)}{x^3+xy^2}\,.$$

Esercizio 1.5 - Si calcoli

$$\lim_{\substack{|(x,y)| \to +\infty \\ (x,y) \in A}} x^3 y e^{-xy}$$

dove $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geqslant 0\,, x \leqslant y \leqslant 2x\}$.

Esercizio 1.6 - Si dica se esiste il seguente limite:

$$\lim_{\substack{|(x,y)|\to+\infty\\(x,y)\in A}} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

dove $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \; |y \geqslant 1-x,\ y \leqslant \sqrt{x^2+1},\ y \geqslant \sqrt{x^2-1}\}$.

Esercizio 1.7 - Si calcoli $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^2 \log x}{(x-1)^2+y^2}$.

Esercizio 1.8 - Esiste il limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$?

Esercizio 1.9 - Si discuta l'esistenza del limite $\displaystyle\lim_{|(x,y,z)|\to+\infty} (x^4+y^2+z^2-x+3y-z)$.

Esercizio 1.10 - Si calcoli il gradiente della funzione $f(x,y) = xy^2$ nel punto $(2,3)$ e determinare quali sono le direzioni lungo le quali le derivate direzionali di f in $(2,3)$ sono massime e minime.

Esercizio 1.11 - Si dica per quali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ esiste il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|y|^\alpha \cos x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Esercizio 1.12 - Si dica se esistono i seguenti limiti

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x}{x^2+y^2};$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2};$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen} xy - \operatorname{tg} xy}{x^2+y^2};$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y \operatorname{sen} x + x \operatorname{tg} y}{x^2+y^2}.$$

Esercizio 1.13 - Si dica se la seguente funzione è continua su $\mathbf{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \operatorname{sen} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Si studi poi la derivabilità e la differenzibilità.

Esercizio 1.14 - Si studi continuità, derivabilità, differenziabilità della seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Esercizio 1.15 - Si studi continuità, derivabilità, differenziabilità della seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^4+y^4)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Esercizio 1.16 - Si studi continuità, derivabilità e differenziabilità in $\mathbf{R}^2$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y(1-\cos x)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Esercizio 1.17 - Si studi continuità, derivabilità e differenziabilità in $\mathbf{R}^2$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{ch}\sqrt{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1/2 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

dove $\operatorname{ch} t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$.

Esercizio 1.18 - Per ogni valore di $\alpha > 0$ si consideri la funzione

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha |y|}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Si determinino i valori di α per i quali f_α è continua e differenziabile in $\mathbf{R}^2$ (in particolare si studi f_α nei punti degli assi cartesiani).

Esercizio 1.19 - Per ogni valore di $\alpha > 0$ si consideri la funzione

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Si determinino i valori di α per i quali f_α è continua e differenziabile in $\mathbf{R}^2$ (in particolare si studi f_α nei punti degli assi cartesiani).

Esercizio 1.20 - Si studi continuità, derivabilità e differenziabilità in $\mathbf{R}^2$ della funzione

$$f(x,y) = |xy| \operatorname{arctg} xy.$$

(In particolare si studi f in $(0,0)$ e negli altri punti degli assi cartesiani).

Esercizio 1.21 - Si dica per quali valori di α, β, γ reali esiste finito il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{(3x^2+5y^2)^{\gamma/2}}\,.$$

Esercizio 1.22 - Si discuta l'esistenza dei seguenti limiti

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xe^{-y/x}\,, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^5}{x^2+y^5}\,.$$

Esercizio 1.23 - Si studi continuità, derivabilità, differenziabilità della seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^4}{x^6+y^4} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\,. \end{cases}$$

Esercizio 1.24 - Si dimostri che non esiste alcuna funzione f di classe $C^2(\mathbf{R}^2)$ tale che

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x \operatorname{sen} y\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = y\cos x\,.$$

Esercizio 1.25 - Si studi continuità, derivabilità, differenziabilità della seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x^2}\operatorname{arctg}(x^2+y^2) & x\neq 0 \\ 0 & x=0\,. \end{cases}$$

Esercizio 1.26 - Si dica per quali valori del parametro $\alpha\in\mathbf{R}$ la seguente funzione è continua, derivabile, differenziabile

$$f(x,y) = \begin{cases} |x|^\alpha \operatorname{sen} y & x\neq 0 \\ 0 & x=0\,. \end{cases}$$

Esercizio 1.27 - Si studi continuità, derivabilità, differenziabilità della seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^4+y^4} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\,. \end{cases}$$

Soluzioni

Soluzione 1.1 - Denotiamo con Γ_c, $c \in \mathbf{R}$, l'insieme di livello c, in questo caso l'insieme $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x,y) = c\}$. Dobbiamo risolvere $f(x,y) = c$ con $c \in \mathbf{R}$. È evidente che per $c < 0$ l'insime $\Gamma_c = \emptyset$. Per $c = 0$ Γ_c è fatto da un solo punto $\Gamma_0 = \{(0,0)\}$. Per $c > 0$ si hanno circonferenze di raggio $\sqrt{c}$.

1.-4. In generale per una funzione radiale, cioè che dipende solamente dalla distanza dall'origine, gli insiemi di livello possono essere l'insieme vuoto $\emptyset$, insiemi fatti da un solo punto oppure circonferenze in $\mathbf{R}^2$, sfere in $\mathbf{R}^3$ (ipersfere di codimensione 1 in $\mathbf{R}^n$). Possono essere anche corone circolari o tutto $\mathbf{R}^n$ o unione di più circonferenze. In generale insiemi a simmetria sferica. Si pensi ad una funzione radiale come ad una funzione $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ definita tramite un'altra funzione $g : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ nel modo seguente: $f(x_1, \ldots, x_n) = g(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2})$. Nel primo caso $g(t) = t^2$, nel secondo $g(t) = t$, nel terzo $g(t) = \operatorname{arctg}[t^2 \log(1 + t^2)]$.

5. $\Gamma_c = \emptyset$ se $c < 0$. Se $c = 0$ dobbiamo capire qual è l'insieme rappresentato da $(x - y)^2 = 0$. È dato dai punti di $\mathbf{R}^2$ che stanno sulla retta di equazione $x = y$. Se invece $c > 0$ si ha

$$(x-y)^2 = c \qquad \Longrightarrow \qquad y = x + \sqrt{c} \quad \text{oppure} \quad y = x - \sqrt{c}$$

quindi l'insieme di livello c con $c > 0$ è dato da coppie di rette

7. Risolvendo $|x| + |y| = c$ si ha per $c < 0$ l'insieme $\emptyset$, per $c = 0$ il solo punto $(0,0)$, per $c > 0$ le curve in Figura 1.1

11. Risolvendo $f(x,y) = c$ si ha per $c < 0$ l'insieme $\emptyset$, per $c = 0$ il solo punto $(0,0)$, per $c > 0$ le curve in Figura 1.2

12. Risolviamo

$$\frac{1 + xy}{x^2} = c\,.$$

Innanzitutto deve essere $x \neq 0$. Si ottiene (si veda anche Figura 1.3 per alcune curve di livello)

$$y = cx - \frac{1}{x}\,.$$

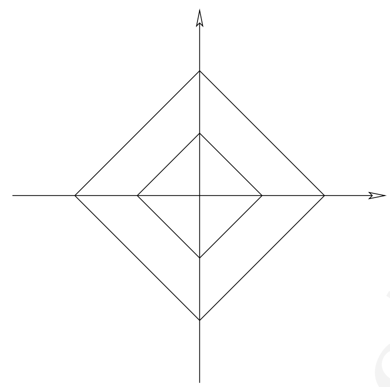


Figura 1.1:

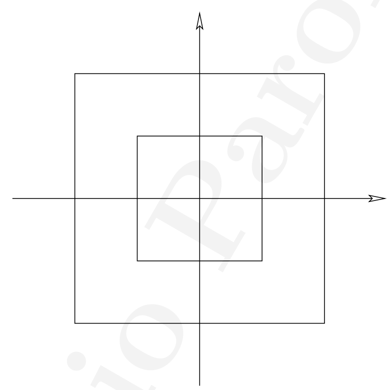


Figura 1.2:

13. Perché abbia senso l'espressione $f(x,y) = \sqrt{xy + \log x}$ bisogna che $xy + \log x$ sia definito e non negativo, cioè

$$x > 0 \qquad \text{e} \qquad y \geqslant -\frac{\log x}{x}.$$

Inoltre gli insiemi di livello saranno non vuoti per livelli non negativi. Allora, per $c \geqslant 0$, si avrà $f = c$ per

$$y = \frac{c - \log x}{x}$$

alcune delle quali disegnate in Figura 1.5. Quella più in grassetto corrisponde a $c = 0$.

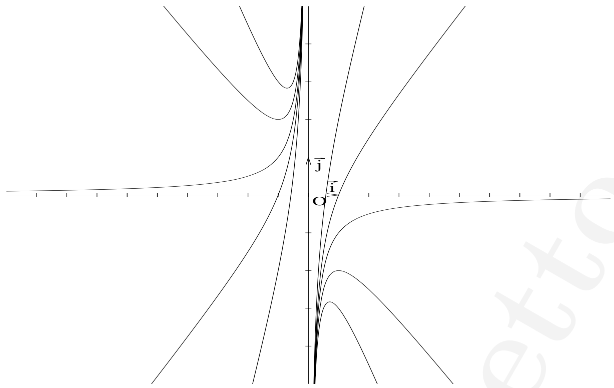
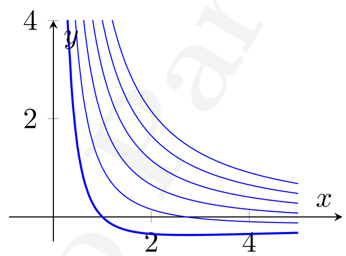


Figura 1.3:

Figura 1.5



14. Gli insiemi di livello positivo sono ellissi.

15. Sia $c \in \mathbf{R}$ e poniamo $f(x, y, z) = c$. Ciò è equivalente a
$$\frac{z}{x^2 + y^2} = e^c = k$$
con k costante positiva. Gli insiemi di livello sono quindi paraboloidi di equazione $z = k(x^2 + y^2)$ con k costante positiva.

17. Se $c = 0$ linsieme di livello è costituito dalla retta $x = 0$. Sia quindi $c \neq 0$: ponendo $2x/(x^2 + y^2) = c$ si ottiene
$$y^2 + \left(x - \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{c^2}$$

che, al variare di c in $(0,+\infty)$ e in $(-\infty,0)$, rappresentano delle circonferenze di raggio c^{-1} con centro nel punto $(c^{-1},0)$ come rappresentato in Figura 1.4.

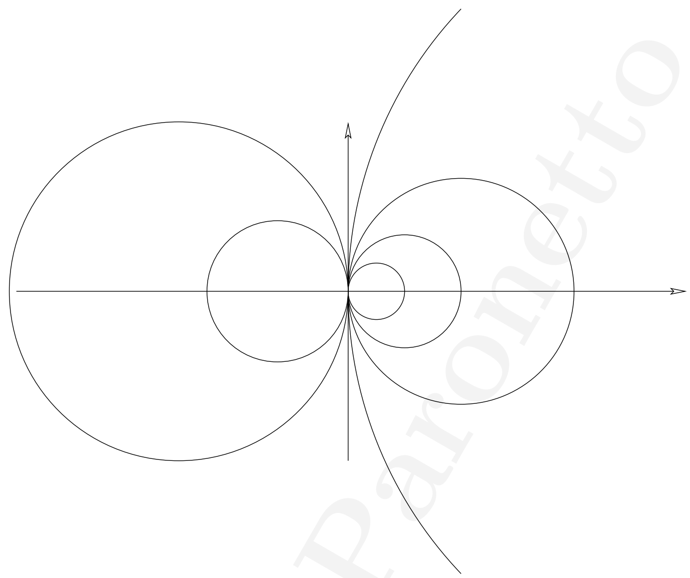


Figura 1.4:

Soluzione 1.3 - Se il limite esistesse in particolare si avrebbe

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{y^2}{x} = \lim_{(y^2,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x}$$

ma il primo limite è uguale a 0, il secondo a 1. Esistono curve lungo le quali il limite è $+\infty$?

Soluzione 1.4 - Il secondo non esiste. Infatti

$$\frac{\operatorname{sen}(x^2+y^4)}{x^2+y^2} = \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^4)}{x^2+y^4}\frac{x^2+y^4}{x^2+y^2}.$$

Si ha che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^4)}{x^2+y^4} = 1.$$

Rimane da trattare il secondo, ma questo non esiste. Infatti

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2+y^4}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1,$$
$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2+y^4}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{y^4}{y^2}=0.$$

Il primo esiste ed è zero. Infatti

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\operatorname{sen}(x^4+y^4)}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\operatorname{sen}(x^4+y^4)}{x^4+y^4}\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}=0$$

poiché

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\operatorname{sen}(x^4+y^4)}{x^4+y^4}=1,\qquad \text{e}\qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}=0.$$

Infatti

$$\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}=\frac{x^4}{x^2+y^2}+\frac{y^4}{x^2+y^2}\leqslant\frac{x^4}{x^2}+\frac{y^4}{y^2}=x^2+y^2.$$

Si noti che in questo caso può essere utile in alternativa passare alle coordinate polari:

$$\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\quad\text{diventa}\quad\frac{\rho^4(\cos^4\vartheta+\operatorname{sen}^4\vartheta)}{\rho^2}=\rho^2(\cos^4\vartheta+\operatorname{sen}^4\vartheta)\leqslant 2\rho^2$$

per cui

$$0\leqslant\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}=\lim_{\rho\to 0}\rho^2(\cos^4\vartheta+\operatorname{sen}^4\vartheta)\leqslant\lim_{\rho\to 0}2\rho^2=0.$$

Si faccia molta attenzione all'uso delle coordinate polari nei limiti. Nel terzo limite l'uso delle coordinate polari potrebbe tranne in inganno se non si usano con attenzione. Come al solito possiamo eliminare la funzione seno poiché

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\operatorname{sen}(x^4+y^4)}{x^4+y^4}=1$$

e limitarci a studiare la quantità $\dfrac{x^4+y^4}{x^3+xy^2}$. Passando alle coordinate polari si ottiene

$$\frac{\rho^4(\cos^4\vartheta+\operatorname{sen}^4\vartheta)}{\rho^3(\cos^3\vartheta+\cos\vartheta\operatorname{sen}^2\vartheta)}=\rho\,\frac{\cos^4\vartheta+\operatorname{sen}^4\vartheta}{\cos^3\vartheta+\cos\vartheta\operatorname{sen}^2\vartheta}.\tag{1.1}$$

Ora, passando ali limite per $\rho \to 0^+$, si può essere tentati di concludere che il limite sia 0, ma in realtà questo limite non esiste, come mostriamo immediatamente. Basta osservare, ad esempio, che

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x^4+y^4)}{x^3+xy^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x^4}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x^4}{x^4}x=0$$

mentre

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}(x^4+y^4)}{x^3+xy^2}=+\infty$$

quindi il limite non esiste. Perché il limite (1.1) non esiste? In realtà

$$\lim_{\rho\to 0}\rho\,\frac{\cos^4\vartheta+\operatorname{sen}^4\vartheta}{\cos^3\vartheta+\cos\vartheta\operatorname{sen}^2\vartheta}=0,$$

ma quando si fa questo limite mandando ρ a 0 tenendo ϑ fissato (in questo caso $\vartheta\neq\pi/2$) è come si facesse un limite lungo una semiretta. E sappiamo bene che questo non basta a concludere.

Soluzione 1.5 - In A vale la seguente stima

$$x^2\leqslant xy\leqslant 2x^2$$

da cui otteniamo

$$e^{-2x^2}\leqslant e^{-xy}\leqslant e^{-x^2}\qquad\text{e}\qquad x^4\leqslant x^3y\leqslant 2x^4$$

quindi

$$x^4e^{-2x^2}\leqslant x^3ye^{-xy}\leqslant 2x^4e^{-x^2}\,.$$

Poiché $\lim_{x\to+\infty}x^4e^{-2x^2}=\lim_{x\to+\infty}2x^4e^{-x^2}=0$ si conclude che

$$\lim_{|(x,y)|\to+\infty}x^3ye^{-xy}=0\,.$$

Soluzione 1.7 - Usiamo le coordinate polari: $x-1=\rho\cos\vartheta$, $y=\rho\operatorname{sen}\vartheta$. Vale: $(x,y)\to(1,0)$ se e solo se $(x-1,y)\to(0,0)$ se e solo se $\rho\to 0$ indipendentemente da ϑ. Il limite, se esiste, può essere quindi riscritto nelle nuove variabili come segue

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\operatorname{sen}^2\vartheta\log(1+\rho\cos\vartheta)}{\rho^2}=\lim_{\rho\to 0}\operatorname{sen}^2\vartheta\log(1+\rho\cos\vartheta)=0\,.$$

Attenzione! Non sempre l'uso delle coordinate polari è di aiuto nello svolgere i limiti (si veda ad esempio la soluzione dell'esercizio 1.8).

Soluzione 1.8 - Se si passa in coordinate polari si ottiene

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3 \cos^2\vartheta \operatorname{sen}\vartheta}{\rho^4 \cos^4\vartheta + \rho^2 \operatorname{sen}^2\vartheta} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho \cos^2\vartheta \operatorname{sen}\vartheta}{\rho^2 \cos^4\vartheta + \operatorname{sen}^2\vartheta}$$

che non esiste!! Se esistesse dovrebbe essere indipendente dal valore di ϑ. Ad esempio

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} = 0 \qquad \text{e se } y = x^2 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2 x^2}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}\,.$$

Soluzione 1.9 - Si può mostrare che esiste $\alpha > 0$ tale che $x^4 \geqslant x^2 - \alpha$ (si veda per esercizio che la disuguaglianza vale con $\alpha = 1/4$. È il valore minore?). Quindi

$$f(x,y,z) = x^4 + y^2 + z^2 - x + 3y - z \geqslant x^2 - \frac{1}{4} + y^2 + z^2 - x + 3y - z\,.$$

Sia $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Si ha, poiché $-1 \leqslant \frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}, \frac{z}{\rho} \leqslant 1$,

$$f(x,y,z) \geqslant \rho^2 + \rho\Big(-\frac{x}{\rho} + \frac{3y}{\rho} - \frac{z}{\rho}\Big) - \frac{1}{4} \geqslant \rho^2 - 5\rho - \frac{1}{4}$$

e $|(x,y,z)| \to +\infty$ significa $\rho \to +\infty$ per cui il limite è $+\infty$.

Soluzione 1.10 - Le derivate parziali di f sono

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy.$$

Nel punto $(2,3)$ sono

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,3) = 9, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 12.$$

Banalmente, poiché $f \in C^1$, si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial v}(2,3) = \langle \nabla f(2,3), v\rangle = 9v_1 + 12v_2.$$

Questa quantità è massima e minima quando v è parallelo a $\nabla f(2,3)$, per cui, poiché $|\nabla f(2,3)| = \sqrt{9^2+12^2} = 15$, si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial v}(2,3) \text{ è massima per } v = \left(\frac{9}{15}, \frac{12}{15}\right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(2,3) \text{ è minima per } v = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right).$$

Soluzione 1.11 - Passando alle coordinate polari si ha

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^\alpha |\operatorname{sen}\vartheta|^\alpha \cos(\rho\cos\vartheta)}{\rho} = \lim_{\rho\to 0} \rho^{\alpha-1} |\operatorname{sen}\vartheta|^\alpha \Big(1 - \frac{1}{2}\rho^2\cos^2\vartheta + o(\rho^3)\Big)$$

che è uguale a 0 se $\alpha > 1$. Per $\alpha \leqslant 1$ il limite non esiste: infatti se si considerano, ad esempio, prima $\vartheta = 0$ e poi $\vartheta = \pi/2$ e poi si esegue il limite per $\rho \to 0$ si ottengono due risultati diversi.

Soluzione 1.12 - Prima di tutto si osservi che $\left|\frac{ab}{a^2+b^2}\right| \leqslant \frac{1}{2}$. Poi, considerando lo sviluppo di Taylor della funzione seno al terzo ordine, si ha

$$\frac{x\operatorname{sen} y - y\operatorname{sen} x}{x^2+y^2} = \frac{1}{3}\frac{yx^3 - xy^3 + o(x^3) + o(y^3)}{x^2+y^2}$$

e a questo punto dividiamo in tre parti il numeratore. Dapprima, per la disuguaglianza scritta all'inizio, si ha

$$\left|\frac{yx^3 - xy^3}{x^2+y^2}\right| \leqslant \left|\frac{yx}{x^2+y^2}\right| \left|x^2 - y^2\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|x^2 - y^2\right|$$

e questa quantità tende a zero quando $(x,y) \to (0,0)$; poi

$$\left|\frac{o(x^3)}{x^2+y^2}\right| \leqslant \left|\frac{o(x^3)}{x^2}\right|$$

e anche questa quantità tende a zero quando $(x,y) \to (0,0)$. Analogamente si tratta il termine $\frac{o(y^3)}{x^2+y^2}$. Si conclude che il limite è zero.

Soluzione 1.13 - Ricordo: se una funzione è di classe C^1 sicuramente è differenziabile, ma non è detto che il viceversa sia vero: ecco un esempio in cui ciò non accade.

È chiaramente continua in ogni $(x, y) \neq (0, 0)$. Vediamo se lo è anche in $(0, 0)$. Se il limite esiste si ha

$$0 \leqslant \limsup_{(x,y)\to(0,0)} \left|(x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right| \leqslant \limsup_{(x,y)\to(0,0)} |(x^2 + y^2)| = 0$$

per cui il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x)$ esiste ed è zero. Poiché $f(0) = 0$ concludiamo che f è continua.
Per studiare la derivabilità e la differenziabilità si osservi prima che la funzione è radiale: possiamo infatti esprimerla come

$$f(x, y) = \varphi(\rho)$$

dove

$$\varphi : [0, +\infty) \to \mathbf{R}\,, \qquad \varphi(\rho) = \begin{cases} 0 & \rho = 0 \\ \rho^2 \operatorname{sen} \rho^{-1} & \rho > 0\,. \end{cases}$$

La funzione φ estesa per simmetria anche a $\rho < 0$ ($\varphi(\rho) = \rho^2 \operatorname{sen} \rho^{-1}$ per $\rho < 0$) è derivabile in $\rho = 0$ (e ovviamente anche per gli altri valori di ρ): infatti il calcolo del limite del rapporto incrementale è

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 \operatorname{sen} \rho^{-1}}{\rho} = 0\,.$$

Ma se calcoliamo la derivata in un altro punto si ottiene

$$\frac{d}{d\rho}\varphi(\rho) = 2\rho \operatorname{sen} \rho^{-1} - \rho^2 \rho^{-2} \cos \rho^{-1} = 2\rho \operatorname{sen} \rho^{-1} - \cos \rho^{-1}$$

il cui limite per $\rho \to 0$ non esiste. Concludiamo che la derivata esiste, ma non è continua nel punto 0. Questo si traduce per la funzione f nel fatto che f è differenzibile in $(0, 0)$, e il suo differenziale in quel punto è l'applicazione nulla, ma le derivate, che esistono, non sono continue nel punto $(0, 0)$.

Soluzione 1.14 - Ovviamente l'unico punto in cui fare le verifiche è l'origine in quanto negli altri punti la funzione è differenziabile.
In coordinate polari la funzione diventa (per $\rho \neq 0$)

$$\tilde{f}(\rho, \vartheta) = f(\rho \cos \vartheta, \rho \operatorname{sen} \vartheta) = \frac{\rho^3 \cos^2 \vartheta \operatorname{sen} \vartheta}{\rho^2}$$

e $\lim_{\rho\to 0} \tilde{f}(\rho, \vartheta) = 0$, $f(0, 0) = 0$ per cui f risulta continua anche nell'origine.
Vediamo se è derivabile: fissiamo un vettore $v = (v_1, v_2)$ di norma 1 ($v_1^2 + v_2^2 = 1$) e calcoliamo il limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((0, 0) + tv) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \; \frac{t^2 v_1^2 t v_2}{t^2 v_1^2 + t^2 v_2^2} = v_1^2 v_2\,,$$

di conseguenza esistono le derivate direzionali in ogni direzione e si ha

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = v_1^2 v_2\,. \tag{1.2}$$

Vediamo ora se f è differenziabile nel punto $(0,0)$. Se lo è deve esistere un'applicazione *lineare* L, denotata anche con $\mathrm{d}f_{(0,0)}$, tale che

$$\lim_{h\to(0,0)} \frac{f((0,0)+h) - f(0,0) - \mathrm{d}f_{(0,0)}h}{|h|} = 0\,;$$

inoltre la differenziabilità implica (si veda Osservazione 3.4 delle dispense di teoria) l'esistenza di tutte le derivate parziali e direzionali e

$$\mathrm{d}f_{(0,0)}v = \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \nabla f(0,0)\cdot v = \frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0)v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)v_2\,.$$

Poiché l'applicazione deve essere lineare, e l'applicazione in (1.2) non lo è, si deduce che f non può essere differenziabile.
(Per convincersi si effettui comunque il calcolo del limite

$$\lim_{h\to(0,0)} \frac{f((0,0)+h) - f(0,0) - \mathrm{d}f_{(0,0)}h}{|h|}$$

sostituendo al differenziale il valore del gradiente moltiplicato scalarmente per un vettore h, sapendo da (1.2) che le derivate parziali sono entrambe nulle).

Soluzione 1.15 - Si ha

$$0 \leqslant f(x,y) \leqslant \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\;\frac{\operatorname{sen}(x^4+y^4)}{x^4+y^4} \leqslant (x^2+y^2)\frac{\operatorname{sen}(x^4+y^4)}{x^4+y^4}$$

visto che $\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = \frac{x^4}{x^2+y^2} + \frac{y^4}{x^2+y^2} \leqslant \frac{x^4}{x^2} + \frac{y^4}{y^2}$. Usando questa disuguaglianza si mostra che f è continua, derivabile, differenziabile (il differenziale è l'applicazione nulla).

Soluzione 1.21 - Risposta: $\alpha + \beta - \gamma > 0$ (suggerimento: usare le coordiante polari).

Soluzione 1.22 - Non esistono.

Soluzione 1.23 - In $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ è continua, derivabile, differenziabile. Per vedere la continuità nell'origine si osservi che

$$x^3 y^2 \leqslant \frac{1}{2}(x^6 + y^4)$$

(abbiamo usato la disuguaglianza $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, $a, b \in \mathbf{R}$: mostrarla per esercizio). Quindi

$$0 \leqslant |f(x,y)| \leqslant \frac{1}{2} y^2 \tag{1.3}$$

e di conseguenza

$$0 \leqslant \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| \leqslant \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2} y^2 = 0\,.$$

Vediamo la derivabilità: sia $t \in \mathbf{R}$ e v vettore di norma 1:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+tv) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\ \frac{t^7 v_1^3 v_2^4}{t^6 v_1^6 + t^4 v_2^4} = \lim_{t\to 0}\ \frac{t^6 v_1^3 v_2^4}{t^6 v_1^6 + t^4 v_2^4}\,.$$

Questo limite è zero: si ricordi infatti che $v = (v_1, v_2)$ è fissato. Se $v_2 = 0$ la quantità $t^6 v_1^3 v_2^4$ è identicamente nulla, se $v_2 \neq 0$ il limite è zero. Si può vedere in altro modo sfruttando la stima (1.3)

$$\lim_{t\to 0} \left| \frac{f((0,0)+tv) - f(0,0)}{t} \right| \leqslant \lim_{t\to 0} \left| \frac{1}{t}\ \ \frac{t^2 v_2^2}{2} \right| = 0\,.$$

Analogamente si mostra la differenziabilità: poiché le derivate parziali sono nulle l'applicazione lineare candidata a rappresentare il differenziale è l'applicazione nulla. Quindi per verificare che

$$\lim_{h\to(0,0)} \frac{f((0,0)+h) - f(0,0) - \mathrm{d}f_{(0,0)}h}{|h|} = 0$$

è sufficiente calcolare

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{h_1^3 h_2^4}{h_1^6 + h_2^4}\ \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}\,.$$

Si ha, usando ancora la stima (1.3)

$$\left| \frac{h_1^3 h_2^4}{h_1^6 + h_2^4}\ \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right| \leqslant \frac{1}{2}\ \frac{h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leqslant \frac{1}{2}\ \frac{h_2^2}{\sqrt{h_2^2}} = \frac{1}{2}\ |h_2|$$

e quindi passando al limite per $|h| \to 0$ si conclude.

Soluzione 1.24 - Se esistesse, per il teorema di Schwarz, si avrebbe che $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$, ma è semplice verificare che ciò non è vero.