Capitolo 2

Funzioni di più variabili, continuità, derivabilità, differenziabilità

Ultimo aggiornamento: 19 aprile 2004

Esercizio 2.1 - Disegnare o scrivere gli insiemi di livello (e il grafico) delle seguenti funzioni:

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$
2. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
3. $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left[(x^2 + y^2)\log(1 + x^2 + y^2)\right]$
4. funzioni radiali
5. $f(x,y) = (x - y)^2$
6. $f(x,y) = x^2 - y^2$
7. $f(x,y) = |x| + |y|$
8. $f(x,y) = |x|$
9. $f(x,y) = |x| - |y|$

10. $f(x,y) = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$ con $p > 1$

11. $f(x,y) = \max\{|x|, |y|\}$

12. $f(x,y) = \dfrac{1+xy}{x^2}$

13. $f(x,y) = e^{x^2+2y^2}$

14. $f(x,y,z) = \log \dfrac{z}{x^2+y^2}$

15. $f(x,y,z) = \operatorname{arctg} \dfrac{x^2+y^2}{(z-1)^2}$

16. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Esercizio 2.2 - Si calcoli, se esiste, il limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x}$.

Esercizio 2.3 - Dire se la seguente funzione è continua su $\mathbf{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \operatorname{sen} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Studiare poi la derivabilità e la differenzibilità.

Esercizio 2.4 - Si dica se il seguente limite esiste o no, ed eventualmente calcolarlo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^4+y^4)}{x^3+xy^2} .$$

Esercizio 2.5 - Calcolare

$$\lim_{|(x,y)|\to+\infty} x^3 y e^{-xy}$$

con $(x,y) \in A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geqslant 0 \,, x \leqslant y \leqslant 2x\}$.

Esercizio 2.6 - Si calcoli $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^2 \log x}{(x-1)^2+y^2}$.

Esercizio 2.7 - Esiste il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}$?

Esercizio 2.8 - Discutere l'esistenza del limite $\lim_{|(x,y,z)|\to+\infty} (x^4+y^2+z^2-x+3y-z)$.

Esercizio 2.9 - Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ esiste il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|y|^\alpha \cos x}{\sqrt{x^2+y^2}} .$$

Esercizio 2.10 - Studiare continuità, derivabilità, differenziabilità della seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) . \end{cases}$$

Esercizio 2.11 - Studiare continuità, derivabilità, differenziabilità della seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^4+y^4)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) . \end{cases}$$

Esercizio 2.12 - Dire per quali valori di α, β, γ reali esiste finito il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{(3x^2+5y^2)^{\gamma/2}} .$$

Esercizio 2.13 - Discutere l'esistenza dei seguenti limiti

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x e^{-y/x} , \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^5}{x^2+y^5} .$$

Esercizio 2.14 - Studiare continuità, derivabilità, differenziabilità della seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y^4}{x^6+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) . \end{cases}$$

Esercizio 2.15 - Si dimostri che non esiste alcuna funzione f di classe $C^2(\mathbf{R}^2)$ tale che

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x \operatorname{sen} y\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = y \cos x\,.$$

Esercizio 2.16 - Studiare continuità, derivabilità, differenziabilità della seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x^2} \operatorname{arctg}(x^2+y^2) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0\,. \end{cases}$$

Esercizio 2.17 - Si dica per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ la seguente funzione è continua, derivabile, differenziabile

$$f(x,y) = \begin{cases} |x|^\alpha \operatorname{sen} y & x \neq 0 \\ 0 & x = 0\,. \end{cases}$$

Esercizio 2.18 - Studiare continuità, derivabilità, differenziabilità della seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^4+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Soluzioni

Soluzione 2.1 - Denotiamo con Γ_c, $c \in \mathbf{R}$, l'insieme di livello c, in questo caso l'insieme $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x, y) = c\}$. Dobbiamo risolvere $f(x, y) = c$ con $c \in \mathbf{R}$. È evidente che per $c < 0$ l'insime $\Gamma_c = \emptyset$. Per $c = 0$ Γ_c è fatto da un solo punto $\Gamma_0 = \{(0, 0)\}$. Per $c > 0$ si hanno circonferenze di raggio $\sqrt{c}$.

1. In generale per una funzione radiale, cioè che dipende solamente dalla distanza dall'origine, gli insiemi di livello possono essere l'insieme vuoto $\emptyset$, insiemi fatti da un solo punto oppure circonferenze in $\mathbf{R}^2$, sfere in $\mathbf{R}^3$ (ipersfere di codimensione 1 in $\mathbf{R}^n$). Possono essere anche corone circolari o tutto $\mathbf{R}^n$ o unione di più circonferenze. In generale si pensi ad una funzione radiale come ad una funzione radiale $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ definita tramite un'altra funzione $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ nel modo seguente: $g(x_1, \ldots, x_n) = f(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2})$.

5. $\Gamma_c = \emptyset$ se $c < 0$. Se $c = 0$ dobbiamo capire qual è l'insieme rappresentato da $(x - y)^2 = 0$. È dato dai punti di $\mathbf{R}^2$ che stanno sulla retta di equazione $x = y$. Se invece $c > 0$ si ha

$$(x - y)^2 = c \qquad \Longrightarrow \qquad y = x + \sqrt{c} \quad \text{oppure} \quad y = x - \sqrt{c}$$

quindi l'insieme di livello c con $c > 0$ è dato da coppie di rette

7. Risolvendo $|x| + |y| = c$ si ha per $c < 0$ l'insieme $\emptyset$, per $c = 0$ il solo punto $(0, 0)$, per $c > 0$ le curve in Figura 2.1

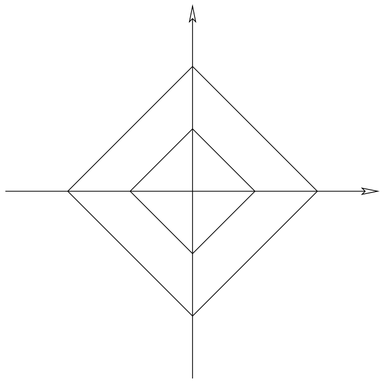

Figura 2.1:

11. Risolvendo $f(x,y) = c$ si ha per $c < 0$ l'insieme $\emptyset$, per $c = 0$ il solo punto $(0,0)$, per $c > 0$ le curve in Figura 2.2

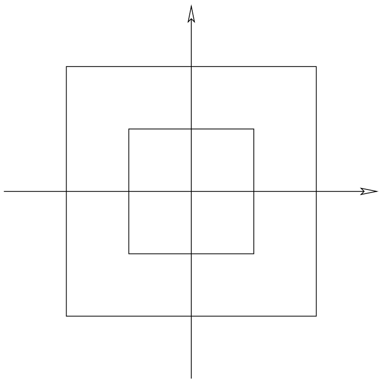

Figura 2.2:

12. Risolviamo

$$\frac{1+xy}{x^2} = c\,.$$

Innanzitutto deve essere $x \neq 0$. Si ottiene (si veda anche Figura 2.3 per alcune curve di livello)

$$y = cx - \frac{1}{x}\,.$$

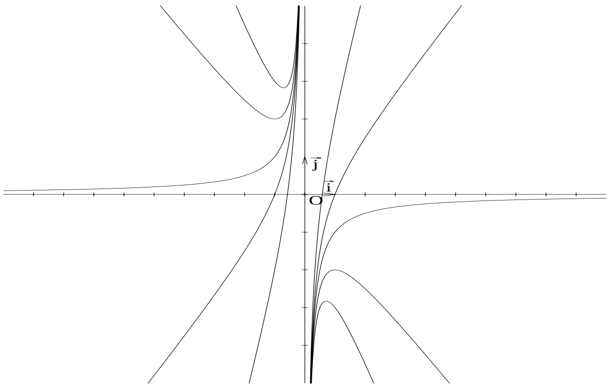

Figura 2.3:

14. Sia $c \in \mathbf{R}$ e poniamo $f(x, y, z) = c$. Ciò è equivalente a

$$\frac{z}{x^2 + y^2} = e^c = k$$

con k costante positiva. Gli insiemi di livello sono quindi paraboloidi di equazione $z = k(x^2 + y^2)$ con k costante positiva.

16. Se $c = 0$ linsieme di livello è fatto dal solo punto $(0, 0)$. Sia quindi $c \neq 0$: ponendo $2x/(x^2 + y^2) = c$ si ottiene

$$y^2 + \left(x - \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{c^2}$$

che, al variare di c in $(0, +\infty)$ e in $(-\infty, 0)$, rappresentano delle circonferenze di raggio c^{-1} con centro nel punto $(c^{-1}, 0)$ come rappresentato in Figura 2.4.

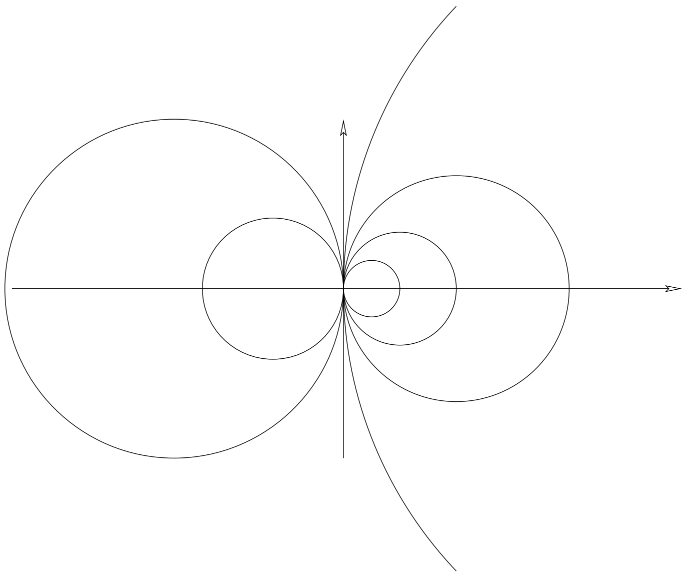

Figura 2.4:

Soluzione 2.2 - Se il limite esistesse in particolare si avrebbe

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{y^2}{x} = \lim_{(y^2,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x}$$

ma il primo limite è uguale a 0, il secondo a 1. Esistono curve lungo le quali il limite è $+\infty$?

Soluzione 2.3 - Ricordo: se una funzione è di classe C^1 sicuramente è differenziabile, ma non è detto che il viceversa sia vero: ecco un esempio in cui ciò non accade.
È chiaramente continua in ogni $(x, y) \neq (0, 0)$. Vediamo se lo è anche in $(0, 0)$. Se il limite esiste si ha

$$0 \leqslant \limsup_{(x,y)\to(0,0)} \left|(x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right| \leqslant \limsup_{(x,y)\to(0,0)} |(x^2 + y^2)| = 0$$

per cui il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x)$ esiste ed è zero. Poiché $f(0) = 0$ concludiamo che f è continua.
Per studiare la derivabilità e la differenziabilità si osservi prima che la funzione è radiale: possiamo infatti esprimerla come

$$f(x, y) = \varphi(\rho)$$

dove

$$\varphi : [0, +\infty) \to \mathbf{R}, \qquad \varphi(\rho) = \begin{cases} 0 & \rho = 0 \\ \rho^2 \operatorname{sen} \rho^{-1} & \rho > 0\,. \end{cases}$$

La funzione φ estesa per simmetria anche a $\rho < 0$ ($\varphi(\rho) = \rho^2 \operatorname{sen} \rho^{-1}$ per $\rho < 0$) è derivabile in $\rho = 0$ (e ovviamente anche per gli altri valori di ρ): infatti il calcolo del limite del rapporto incrementale è

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 \operatorname{sen} \rho^{-1}}{\rho} = 0\,.$$

Ma se calcoliamo la derivata in un altro punto si ottiene

$$\frac{d}{d\rho}\varphi(\rho) = 2\rho \operatorname{sen} \rho^{-1} - \rho^2 \rho^{-2} \cos \rho^{-1} = 2\rho \operatorname{sen} \rho^{-1} - \cos \rho^{-1}$$

il cui limite per $\rho \to 0$ non esiste. Concludiamo che la derivata esiste, ma non è continua nel punto 0. Questo si traduce per la funzione f nel fatto che f è differenzibile in $(0, 0)$, e il suo differenziale in quel punto è l'applicazione nulla, ma le derivate, che esistono, non sono continue nel punto $(0, 0)$.

Soluzione 2.4 - Si noti che

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^4 + y^4)}{x^3 + xy^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^4}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^3}{x^3} \operatorname{sen} x = 0$$

mentre

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}(x^4+y^4)}{x^3+xy^2}=+\infty$$

quindi il limite non esiste.

Soluzione 2.5 - In A vale la seguente stima

$$x^2 \leqslant xy \leqslant 2x^2$$

da cui otteniamo

$$e^{-2x^2} \leqslant e^{-xy} \leqslant e^{-x^2} \qquad \text{e} \qquad x^4 \leqslant x^3y \leqslant 2x^4$$

quindi

$$x^4e^{-2x^2} \leqslant x^3ye^{-xy} \leqslant 2x^4e^{-x^2}\,.$$

Poiché $\lim_{x\to+\infty} x^4e^{-2x^2} = \lim_{x\to+\infty} 2x^4e^{-x^2} = 0$ si conclude che

$$\lim_{|(x,y)|\to+\infty} x^3ye^{-xy} = 0\,.$$

Soluzione 2.6 - Usiamo le coordinate polari: $x-1=\rho\cos\vartheta$, $y=\rho\operatorname{sen}\vartheta$. Vale: $(x,y)\to(1,0)$ se e solo se $(x-1,y)\to(0,0)$ se e solo se $\rho\to 0$ indipendentemente da ϑ. Il limite, se esiste, può essere quindi riscritto nelle nuove variabili come segue

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\operatorname{sen}^2\vartheta\log(1+\rho\cos\vartheta)}{\rho^2}=\lim_{\rho\to 0}\operatorname{sen}^2\vartheta\log(1+\rho\cos\vartheta)=0\,.$$

Attenzione! Non sempre l'uso delle coordinate polari è di aiuto nello svolgere i limiti (si veda ad esempio la soluzione dell'esercizio 2.7).

Soluzione 2.7 - Se si passa in coordinate polari si ottiene

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^3\cos^2\vartheta\operatorname{sen}\vartheta}{\rho^4\cos^4\vartheta+\rho^2\operatorname{sen}^2\vartheta}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho\cos^2\vartheta\operatorname{sen}\vartheta}{\rho^2\cos^4\vartheta+\operatorname{sen}^2\vartheta}$$

che non esiste!! Se esistesse dovrebbe essere indipendente dal valore di ϑ. Ad esempio

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=0 \qquad \text{e se } y=x^2 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^2x^2}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}\,.$$

Soluzione 2.8 - Si può mostrare che esiste $\alpha > 0$ tale che $x^4 \geqslant x^2 - \alpha$ (si veda per esercizio che la disuguaglianza vale con $\alpha = 1/4$. È il valore minore?). Quindi

$$f(x,y,z) = x^4 + y^2 + z^2 - x + 3y - z \geqslant x^2 - \frac{1}{4} + y^2 + z^2 - x + 3y - z\,.$$

Sia $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Si ha, poiché $-1 \leqslant \frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}, \frac{z}{\rho} \leqslant 1$,

$$f(x,y,z) \geqslant \rho^2 + \rho\Big(-\frac{x}{\rho} + \frac{3y}{\rho} - \frac{z}{\rho}\Big) - \frac{1}{4} \geqslant \rho^2 - 5\rho - \frac{1}{4}$$

e $|(x,y,z)| \to +\infty$ significa $\rho \to +\infty$ per cui il limite è $+\infty$.

Soluzione 2.9 - Passando alle coordinate polari si ha

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^\alpha |\operatorname{sen}\vartheta|^\alpha \cos(\rho\cos\vartheta)}{\rho} = \lim_{\rho\to 0} \rho^{\alpha-1} |\operatorname{sen}\vartheta|^\alpha \Big(1 - \frac{1}{2}\rho^2\cos^2\vartheta + o(\rho^3)\Big)$$

che è uguale a 0 se $\alpha > 1$. Per $\alpha \leqslant 1$ il limite non esiste: infatti se si considerano, ad esempio, prima $\vartheta = 0$ e poi $\vartheta = \pi/2$ e poi si esegue il limite per $\rho \to 0$ si ottengono due risultati diversi.

Soluzione 2.10 - Ovviamente l'unico punto in cui fare le verifiche è l'origine in quanto negli altri punti la funzione è differenziabile.
In coordinate polari la funzione diventa (per $\rho \neq 0$)

$$\tilde f(\rho,\vartheta) = f(\rho\cos\vartheta, \rho\operatorname{sen}\vartheta) = \frac{\rho^3\cos^2\vartheta\operatorname{sen}\vartheta}{\rho^2}$$

e $\lim_{\rho\to 0} \tilde f(\rho,\vartheta) = 0$, $f(0,0) = 0$ per cui f risulta continua anche nell'origine.
Vediamo se è derivabile: fissiamo un vettore $v = (v_1, v_2)$ di norma 1 ($v_1^2 + v_2^2 = 1$) e calcoliamo il limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+tv) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\, \frac{t^2 v_1^2 t v_2}{t^2 v_1^2 + t^2 v_2^2} = v_1^2 v_2\,,$$

di conseguenza esistono le derivate direzionali in ogni direzione e si ha

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = v_1^2 v_2\,. \tag{2.1}$$

Vediamo ora se f è differenziabile nel punto $(0,0)$. Se lo è deve esistere un'applicazione *lineare* L, denotata anche con $\mathrm{d}f_{(0,0)}$, tale che

$$\lim_{h\to(0,0)} \frac{f((0,0)+h)-f(0,0)-\mathrm{d}f_{(0,0)}h}{|h|}=0\,;$$

inoltre la differenziabilità implica (si veda Osservazione 3.4 delle dispense di teoria) l'esistenza di tutte le derivate parziali e direzionali e

$$\mathrm{d}f_{(0,0)}v=\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\nabla f(0,0)\cdot v=\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0)v_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)v_2\,.$$

Poiché l'applicazione deve essere lineare, e l'applicazione in (2.1) non lo è, si deduce che f non può essere differenziabile.
(Per convincersi si effettui comunque il calcolo del limite

$$\lim_{h\to(0,0)} \frac{f((0,0)+h)-f(0,0)-\mathrm{d}f_{(0,0)}h}{|h|}$$

sostituendo al differenziale il valore del gradiente moltiplicato scalarmente per un vettore h, sapendo da (2.1) che le derivate parziali sono entrambe nulle).

Soluzione 2.11 - Si ha

$$0\leqslant f(x,y)\leqslant \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\;\frac{\operatorname{sen}(x^4+y^4)}{x^4+y^4}\leqslant (x^2+y^2)\frac{\operatorname{sen}(x^4+y^4)}{x^4+y^4}$$

visto che $\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}=\frac{x^4}{x^2+y^2}+\frac{y^4}{x^2+y^2}\leqslant\frac{x^4}{x^2}+\frac{y^4}{y^2}$. Usando questa disuguaglianza si mostra che f è continua, derivabile, differenziabile (il differenziale è l'applicazione nulla).

Soluzione 2.12 - Risposta: $\alpha+\beta-\gamma>0$ (suggerimento: usare le coordiante polari).

Soluzione 2.13 - Non esistono.

Soluzione 2.14 - In $\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ è continua, derivabile, differenziabile. Per vedere la continuità nell'origine si osservi che

$$x^3y^2\leqslant\frac{1}{2}(x^6+y^4)$$

(abbiamo usato la disuguaglianza $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, $a, b \in \mathbf{R}$: mostrarla per esercizio). Quindi

$$0 \leqslant |f(x,y)| \leqslant \frac{1}{2}y^2 \tag{2.2}$$

e di conseguenza

$$0 \leqslant \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| \leqslant \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2}y^2 = 0\,.$$

Vediamo la derivabilità: sia $t \in \mathbf{R}$ e v vettore di norma 1:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+tv) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\ \frac{t^7 v_1^3 v_2^4}{t^6 v_1^6 + t^4 v_2^4} = \lim_{t\to 0} \frac{t^6 v_1^3 v_2^4}{t^6 v_1^6 + t^4 v_2^4}\,.$$

Questo limite è zero: si ricordi infatti che $v = (v_1, v_2)$ è fissato. Se $v_2 = 0$ la quantità $t^6 v_1^3 v_2^4$ è identicamente nulla, se $v_2 \neq 0$ il limite è zero. Si può vedere in altro modo sfruttando la stima (2.2)

$$\lim_{t\to 0} \Big| \frac{f((0,0)+tv) - f(0,0)}{t} \Big| \leqslant \lim_{t\to 0} \Big| \frac{1}{t}\ \frac{t^2 v_2^2}{2} \Big| = 0\,.$$

Analogamente si mostra la differenziabilità: poiché le derivate parziali sono nulle l'applicazione lineare candidata a rappresentare il differenziale è l'applicazione nulla. Quindi per verificare che

$$\lim_{h\to(0,0)} \frac{f((0,0)+h) - f(0,0) - \mathrm{d}f_{(0,0)}h}{|h|} = 0$$

è sufficiente calcolare

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{h_1^3 h_2^4}{h_1^6 + h_2^4}\ \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}\,.$$

Si ha, usando ancora la stima (2.2)

$$\Big| \frac{h_1^3 h_2^4}{h_1^6 + h_2^4}\ \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \Big| \leqslant \frac{1}{2}\ \frac{h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leqslant \frac{1}{2}\ \frac{h_2^2}{\sqrt{h_2^2}} = \frac{1}{2}\ |h_2|$$

e quindi passando al limite per $|h| \to 0$ si conclude.

Soluzione 2.15 - Se esistesse, per il teorema di Schwarz, si avrebbe che $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$, ma è semplice verificare che ciò non è vero.