Capitolo 3

Massimi e minimi di funzioni

Ultimo aggiornamento: 18 febbraio 2017

Ricordiamo i seguenti risultati (si vedano rispettivamente il Teorema 2.39 e Teorema 3.19 delle dispense).

Teorema A Una funzione $f : K \to \mathbf{R}$ continua in K compatto di $\mathbf{R}^n$. ammette sia massimo che minimo.

Teorema B Sia $f : \Omega \to \mathbf{R}$, Ω aperto di $\mathbf{R}^n$, $f \in C^1(\Omega)$. Se $x_0 \in \Omega$ è un punto di minimo o di massimo per f allora $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$ per $i = 1, ...n$.

Esempi

a) Le ipotesi del Teorema A sono ottimali.

   1. K limitato, ma non chiuso, f continua - Ad esempio $f : (0,1) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x$, non ammette né massimo né minimo.
   2. K chiuso, ma non limitato, f continua - Ad esempio $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, non ammette né massimo né minimo.
   3. f non continua e K compatto - Ad esempio, $f : [-1,1] \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = x + 1$ per $x \in [-1,0)$, $f(0) = 0$ mentre $f(x) = x - 1$ per $x \in (0,1]$.

b) Le informazioni che si ottengono da $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ riguardano solo i punti interni, quindi se non si trovano soluzioni a tale sistema di equazioni non significa che non ci siano il massimo e il minimo.

1. Ad esempio $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x$, ha derivata sempre non nulla all'interno di $[0,1]$ e comunque ammette sia massimo che minimo.

Vediamo schematicamente una traccia di come procedere per trovare i punti di massimo e di minimo per una funzione di più variabili $f : K \to \mathbf{R}$ (in alcune situazioni):

se K è compatto (cioè limitato e chiuso):

1. prima si cercano eventuali candidati all'interno di K risolvendo, dove f è differenziabile, le equazioni
$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0\,, \qquad i = 1, ...n;$$
2. poi si considera il bordo di K, parametrizzandolo (il bordo può avere parti di dimensione $n-1$, $n-2$, ... 0) oppure usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.
Se esistono punti all'interno di K nei quali f non è differenziabile e l'insieme in cui f non è differenziabile è unione di parti di dimensione $n-1$, $n-2$, ... 0 queste vanno trattate come si tratta il bordo;
3. si valuta la funzione nei punti trovati (al punto 1. e al punto 2.) e nei punti del bordo di dimensione 0, i "vertici", se questi sono un numero finito, per vedere qual è il massimo e il minimo della funzione; se invece si vuole studiare la natura di ogni singolo punto si può studiare la matrice hessiana nei punti interni se f è sufficientemente regolare.

Se K non è limitato:

4. si procede come ai punti 1., 2., 3. e in più va controllato il comportamento all'infinito (dentro K) della funzione.

Curve di livello:

1. un modo differente per trovare i massimi e minimi è quello di studiare gli insiemi di livello della funzione, cosa che talvolta risulta più semplice e può evitare di fare calcoli inutilmente (si veda, ad esempio, lo svolgimento dell'Esercizio 3.4, ma anche 3.22, 3.23, 3.25).

Osservazione - A volte un problema di massimo o minimo può essere modificato per semplificare i calcoli. Sia $f : A \to \mathbf{R}$ la funzione di cui si vogliono trovare il valore minimo e il valore massimo e siano $x_1 \in A$ punto di minimo, $x_2 \in A$ punto di massimo, cioè

$$f(x_1) \leqslant f(x) \quad \text{e} \quad f(x_2) \geqslant f(x) \quad \text{per ogni } x \in A\,.$$

Se $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è una funzione monotona crescente si avrà

$$g(f(x_1)) \leqslant g(f(x)) \quad \text{e} \quad g(f(x_2)) \geqslant g(f(x)) \quad \text{per ogni } x \in A\,.$$

Quindi il punto di minimo (e non il valore minimo!) di $g \circ f : A \to \mathbf{R}$ è lo stesso della funzione f (idem per il massimo). Di conseguenza il problema può essere trasformato nel cercare il punto di minimo e il punto di massimo per una funzione $g \circ f$ per un'opportuna g (si vedano ad esempio gli svolgimenti dell'Esercizio 3.4 e dell'Esercizio 3.29).

Suggerimenti - Anche se viene scelta (per motivi didattici) e proposta una soluzione non è detto che questa sia l'unica o la migliore. Consigliamo, quindi, di svolgere in più modi, quando possibile, i vari esercizi.
Un'altra cosa: a volte può essere vantaggioso usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange (si vedano, ad esempio, l'Esercizio 3.42, 3.43, 3.45), ma in generale, se possibile, per trovare gli estremi di una funzione sul bordo di un insieme (o in generale su un vincolo) consigliamo di parametrizzare, abbassando così il numero di parametri invece di aumentarlo.
Per esercitarsi comunque è bene provare con più metodi lo stesso esercizio. A tal proposito si veda ad esempio lo svolgimento dell'Esercizio 3.50, un esempio di funzione definita in un sottoinsieme di $\mathbf{R}^3$ svolto sia parametrizzando il bordo, che usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Massimi e minimi su compatti o chiusi

Esercizio 3.1 - Trovare i punti di massimo e minimo e i valori massimo e minimo della funzione $f : A \to \mathbf{R}$ dove $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} \leqslant 1\}$ e $f(x, y) = x^3 - y^2$.

Esercizio 3.2 - Trovare i punti di massimo e minimo e i valori massimo e minimo della funzione $f : A \to \mathbf{R}$ dove $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ e $f(x, y) = x^3 + y^2$.

Esercizio 3.3 - Trovare massimo e minimo di $f(x,y,z) = x + y - z^2$ nell'insieme $C = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 \leqslant 0\,,\ 0 \leqslant z \leqslant 2\}$.

Esercizio 3.4 - Trovare la massima e la minima distanza dall'origine dell'insieme $D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 \leqslant 3\,,\ z - y = 1\}$.

Esercizio 3.5 - Trovare massimo e minimo della funzione $f(x,y,z) = z^2 + xy$ in $C = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \leqslant 1\}$.

Esercizio 3.6 - Trovare massimo e minimo della funzione $f(x,y) = x^2 - y^2 + e^{x^2+y^2}$ in $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant r\}$.

Esercizio 3.7 - Trovare massimo e minimo della funzione $f(x,y) = x^2 - y^2 + e^{x^2+y^2}$ in $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant r\}$.

Esercizio 3.8 - Trovare massimo e minimo della funzione $f(x,y) = (x^2 + 2y^2)e^{-2x-y}$ in $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$.

Esercizio 3.9 - Trovare massimo e minimo della funzione $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x^4 - y^4)$ in $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

Esercizio 3.10 - Trovare massimo e minimo della funzione $f(x,y,z) = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2 - z^2)$ in $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$.

Esercizio 3.11 - Si determinino, se esistono, il massimo e il minimo di

$$f(x,y,z) = \frac{x^2 - y^2}{1 + z^2}$$

nell'insieme (illimitato) $E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

Esercizio 3.12 - Si determinino, se esistono, il massimo e il minimo di

$$f(x,y) = |y - 1|(2 - y - x^2)$$

nell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant 2 - x^2 - y^2\}$.

Esercizio 3.13 - Si determinino, se esistono, il massimo e il minimo di

$$f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

nell'insieme $E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + 4y^2 + 4z^2 \leqslant 4\,, x \geqslant 0\}$.

Esercizio 3.14 - Siano dati tre punti P_1, P_2, P_3 nel piano. Si vogliono unire i tre punti con dei segmenti partenti da un quarto punto P in modo tale da minimizzare la somma delle lunghezze dei vari segmenti.

Esercizio 3.15 - Si determinino, se esistono, il massimo e il minimo di

$$f(x, y, z) = 2x^2 - y^2 - z^2 - x$$

nell'insieme $E_1 \cup E_2$ dove $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\,, z \leqslant 0\}$, $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 - (z-1)^2 \leqslant 0\,, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$.

Esercizio 3.16 - Si determinino, se esistono, il massimo e il minimo di

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + (y-1)^2}$$

nell'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{|x|}\}$.

Esercizio 3.17 - Sia $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ una matrice simmetrica (a coefficienti reali). Data la forma bilineare

$$\langle Ax, y \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_j y_i$$

massimizzare e minimizzare la funzione

$$f(x) = \frac{\langle Ax, x \rangle}{|x|^2} = \frac{\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_j x_i}{|x|^2}$$

definita per $|x| \neq 0$.

Massimi e minimi su compatti osservando le curve (o gli insiemi) di livello

Esercizio 3.18 - Rifare gli esercizi 3.1, 3.2 utilizzando lo studio degli insiemi di livello.

Esercizio 3.19 - Trovare massimo e minimo della funzione $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$ nei seguenti insiemi: $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 0 \leqslant x \leqslant 1\,, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$, $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\,, -\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}\}$, $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 4x^2 + \frac{64}{9}(y - \frac{5}{8})^2 = 1\}$, $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 2\}$, $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 0 \leqslant y \leqslant x\}$.

Esercizio 3.20 - Trovare massimo e minimo della funzione $f(x,y) = |x| - |y|$ in $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$.

Esercizio 3.21 - Trovare massimo e minimo della funzione $f(x,y) = \operatorname{arctg} \log(x^2 + y^2)$ in $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 + 4y^2 \geqslant 1\}$.

Esercizio 3.22 - Trovare massimo e minimo della funzione $f(x,y) = (y - x^2)^3$ nell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + 2 \leqslant y \leqslant \sqrt{4 - x^2}\}$.

Esercizio 3.23 - Trovare massimo e minimo della funzione $f(x,y) = (x + y)^2$ nell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.

Esercizio 3.24 - Trovare massimo e minimo della funzione $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ nel rettangolo di vertici $(1,0), (e,0), (e,1), (1,1)$.

Esercizio 3.25 - Trovare massimo e minimo della funzione $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ nell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.

Esercizio 3.26 - Trovare massimo e minimo della funzione $f(x,y) = (y - x^2)^3$ nell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.

Esercizio 3.27 - Fare l'esercizio 3.13 usando gli insiemi di livello.

Esercizio 3.28 - Trovare massimo e minimo della funzione $f(x,y) = y - g(x)$ nell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| + |y| \leqslant 1\}$ dove $g(x) = \sqrt{x}$ per $x \geqslant 0$ e $g(x) = -\sqrt{-x}$ per $x < 0$.

Massimi e minimi su illimitati e natura dei punti critici

Per studiare la natura di un punto critico di una funzione (nel caso tale funzione sia di classe C^2) si può studiare la matrice hessiana in quel punto. Per una generica matrice simmetrica A valgono le seguenti disuguaglianze (si veda l'Esercizio 3.17)

$$\lambda |x|^2 \leqslant (A \cdot x, x) \leqslant \Lambda |x|^2 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbf{R}^n\,.$$

dove λ e Λ sono rispettivamente il minimo e il massimo autovalore di A.
Ora se $f : \Omega \in \mathbf{R}$ è di classe C^2, Ω aperto di $\mathbf{R}^n$, $x_0 \in \Omega$ e, denotata con $H_f(x_0)$ la matrice hessiana di f valutata in x_0, si ha che tutti gli autovalori di $H_f(x_0)$ sono positivi (in particolare $\lambda > 0$) si ha che $\lambda|x|^2 \leqslant (H_f(x_0) \cdot x, x)$, cioè $H_f(x_0)$ è definita positiva, e quindi x_0 è un punto di minimo locale. Viceversa, se tutti gli autovalori sono negativi (in particolare $\Lambda < 0$) da $(H_f(x_0) \cdot x, x) \leqslant \Lambda|x|^2$ ricaviamo che $H_f(x_0)$ è definita negativa e in particolare x_0 è punto di massimo locale.
Un altro caso favorevole è quando la matrice $H_f(x_0)$ ammette un autovalore positivo ed uno negativo: infatti restringendo la funzione agli autospazi relativi a tali autovalori si trova che tali restrizioni ammettono rispettivamente minimo e massimo (si veda ad esempio l'Esercizio 3.31). Da ciò si conclude che il punto è di sella (cioè non è né di minimo, né di massimo).
Per fare ciò ci si può aiutare con lo studio dei minori principali, oppure ricordando che il determinante e la traccia di una matrice sono invarianti rispetto a trasformazioni che rendono diagonale la matrice, per cui il determinante è il prodotto degli autovalori, la traccia la somma degli autovalori.

Ma che succede se il determinante della matrice hessiana è nullo? Come per una funzione di una variabile si potrebbero studiare le derivate di ordine successivo, ma nel caso di funzioni di n variabili si hanno applicazioni k-lineari da $\mathbf{R}^n \times \ldots \times \mathbf{R}^n$ (k volte) in $\mathbf{R}$, dove k è l'ordine di derivazione (il gradiente va da $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}$, la matrice hessiana da $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}$ e così via). Questo rende di fatto complicato lo studio delle derivate successive.
Fintanto che, anche se un autovalore è nullo, ne troviamo uno positivo ed uno negativo, possiamo comunque concludere (si veda l'Esercizio 3.34) che il punto è di sella. Se invece gli autovalori sono tutti maggiori o uguali a zero, oppure tutti minori o uguali a zero, la cosa è più complicata. Per capire il comportamento della funzione si può restringere la funzione a curve passanti per il punto critico; ad esempio, si possono considerare tutte le rette passanti per tale punto, ma come al solito **ma ciò non è, o può non essere, sufficiente!** (si veda a tal proposito l'Esercizio 3.35).

Esercizio 3.29 - Determinare i punti critici della funzione $f(x, y) = \operatorname{senh}(x^4 + y^3 - 4x^2 - 3y^2)$ all'interno dell'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x|(1+(y-2)^2)-2 < 0\}$, studiarne la natura e stabilire se f ammette massimo e minimo.

Esercizio 3.30 - Determinare i punti critici della funzione $f(x, y) = x^4 +$

$y^4 - 4xy$ in $\mathbf{R}^2$, studiarne la natura e stabilire se f ammette massimo e minimo in $\mathbf{R}^2$.

Esercizio 3.31 - Studiare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 + 2\,.$$

Esercizio 3.32 - Si consideri la funzione $f(x,y,z) = x^2+y^4+y^2+z^3-2xz$. Studiarne i punti critici.

Esercizio 3.33 - Studiare i punti critici della funzione $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy + y^3 - 8x^3 - 6xy^2 + 12yx^2$.

Esercizio 3.34 - Studiare i punti critici della funzione $f(x,y,z) = \frac{3}{4}x^2 + 8y^2 + 7xy + z^4$.

Esercizio 3.35 - Studiare i punti critici della funzione $f(x,y) = y^2-4x^2y+3x^4$.

Esercizio 3.36 - Si studi la natura dei punti critici della funzione $f(x,y) = 3x^6 + 4x^3 - 4x^3y - 2y + y^2 + 1$.

Esercizio 3.37 - Cercare i punti di massimo e minimo di $f(x,y) = xe^{-xy}$ nell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leqslant\ x \leqslant y \leqslant 2x\}$,

Esercizio 3.38 - Trovare, se esistono, i punti di massima e minima distanza dell'insieme $E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\,, z = 1 - 3xy\}$.

Esercizio 3.39 - Trovare, se esistono, i punti di massimo e minimo di $f(x,y,z) = 3x^2+2y^2+z^2$ nell'insieme $E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x+4y-6z+5 = 0\}$.

Esercizio 3.40 - Trovare, se esistono, i punti di massimo e minimo di

$$f(x,y) = \frac{2x-2y+1}{x^2+y^2+1}$$

in $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| \leqslant y \leqslant 1 + |x|\}$.

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Esercizio 3.41 - Trovare fra tutti i triangoli di perimetro $2p$ quello di area massima.
(Ricordiamo la formula di Erone: dato un triangolo T di lati di lunghezza x, y, z si ha che l'area è data da $A(T) = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$ dove $2p$ è il perimetro).

Esercizio 3.42 - Minimizzare la funzione $f(x_1, \dots x_n) = x_1 + \dots x_n$ sotto il vincolo $\Pi_{i=1}^n x_i = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$, $x_j > 0$.

Esercizio 3.43 - Massimizzare fra tutti i parallelepipedi di superficie assegnata S il volume.

Esercizio 3.44 - Fra tutti i parallelepipedi di volume V assegnato trovare quello che ha superficie minima.

Esercizio 3.45 - Trovare massimo e minimo di $f(x, y) = xy$ nell'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant x + 2/\sqrt[3]{5}\,, 3x^5 + 5y^3 \leqslant 8\}$,

Esercizio 3.46 - Trovare massimo e minimo, se esistono, di $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2$ nell'insieme $E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2yz = 1\}$.

Esercizio 3.47 - Trovare massimo e minimo di $f(x, y, z) = x + 3y - z$ nell'insieme M definito da $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z = 0\,, z = 2x + 4y\}$.

Esercizio 3.48 - Trovare la massima e la minima distanza dall'origine dell'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 - xy + y^2 = 1\}$.

Esercizio 3.49 - Trovare il massimo e il minimo della funzione

$$f(x) = \frac{\langle v, x\rangle}{|x|} = \frac{v_1x_1 + \ldots + v_nx_n}{\sqrt{x_1^2 + \ldots x_n^2}}$$

in $\mathbf{R}^n \setminus \{(0, \ldots 0)\}$, dove v è un vettore assegnato di modulo 1.

Esercizio 3.50 - Si trovino il massimo e il minimo della funzione $f(x, y, z) = 2x^2 - y^2 - z^2 - x$ nell'insieme $E = E_1 \cup E_2$ dove

$$E_1 := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\,, z \leqslant 0\}\,,$$
$$E_2 := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 - (z-1)^2 \leqslant 0\,, 0 \leqslant z \leqslant 1\}\,.$$

Soluzioni

Soluzione 3.1 - Per il teorema di Weierstrass f ammette sia massimo che minimo. All'interno si ha

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y \end{cases}$$

che ha soluzione solo per $(x,y) = (0,0)$ che è all'interno di A.

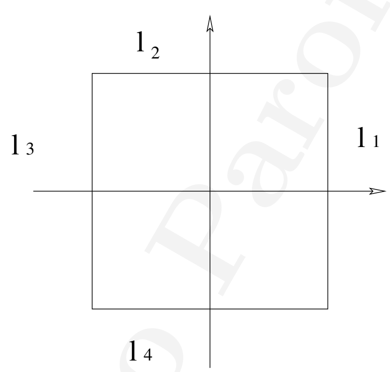

Figura 3.1:

Vediamo il bordo. Prendiamo in considerazione il lato l_1: parametrizziamo con la seguente funzione

$$\varphi : (-1,1) \to \mathbf{R}\,, \qquad \varphi(t) = (1,t)$$

e consideriamo $f \circ \varphi : (-1,1) \to \mathbf{R}$. Si ha

$$\frac{d}{dt}(f \circ \varphi)(t) = \frac{d}{dt} f(\varphi(t)) = \frac{d}{dt} f(1,t) = \frac{d}{dt}(1-t^2) = -2t = 0$$

per $t = 0$ che corrisponde al punto $(1, \varphi(0)) = (1,0)$. Chiaramente in casi semplici come questo si può considerare direttamente la funzione f ristretta all'insieme l_1 e derivare rispetto a y la funzione $f(1,y) = 1 - y^2$, ma in tal caso si presti molta attenzione! Bisogna sempre ricordare che alla base c'è una parametrizzazione e quindi non si possono sostituire le variabili con

leggerezza (si veda un esempio in cui si può cadere in inganno nell'Esercizio 3.11).
Analogamente si parametrizzano gli altri lati e derivando si ottengono i punti $(0,1)$ sul lato l_2, $(-1,0)$ sul lato l_3, $(0,-1)$ sul lato l_4. Abbiamo quindi i seguenti candidati:

$(0,0)$	punto critico interno
$(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$	punti "critici" di bordo
$(1,1)\,,(-1,1),(-1,-1),(1,-1)$	vertici

A questo punto valutando la funzione f su tutti e nove i punti si trova che il punto di massimo è $(1,0)$ e il valore massimo di f è $f(1,0)=1$, i punti di minimo sono $(-1,1)$ e $(-1,-1)$ e il valore minimo di f è $f(-1,1)=f(-1,-1)=-2$.

Soluzione 3.2 - Come nell'esercizio precedente si ottiene solamente il punto $(0,0)$ stazionario per f. Vediamo il bordo: lo si può parametrizzare con la

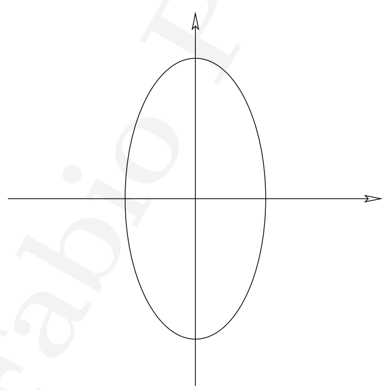

Figura 3.2:

funzione
$$\varphi(t)=\Big(\frac{1}{2}\cos t,\,\operatorname{sen} t\Big)$$
con $t\in[0,2\pi)$ (in questo caso non è importante l'intervallo che si sceglie, si potrebbe considerare un qualunque intervallo $[a,a+2\pi)$, quindi se anche $t=0$ fosse punto critico per $f\circ\varphi$ non va scartato perché cambiando l'intervallo di definizione di φ lo si può forzare ad essere un punto interno!!).

Deriviamo allora $f \circ \varphi(t) = \frac{1}{8}\cos^3 t + \operatorname{sen}^2 t$ e otteniamo

$$\operatorname{sen} t \cos t\Big(2 - \frac{3}{8}\cos t\Big) = 0$$

che si annulla se $\operatorname{sen} t = 0$, $\cos t = 0$ oppure $(2 - \frac{3}{8}\cos t) = 0$. Quest'ultmia non è mai 0 per cui rimangono i valori $t = 0$ corrispondente a $(1/2, 0)$, $t = \pi/2$ corrispondente a $(0, 1)$, $t = \pi$ corrispondente a $(-1/2, 0)$, $t = 3\pi/2$ corrispondente a $(0, -1)$. Si conlude valutando f in questi quattro punti e nell'origine per ottenere che $(-1/2, 0)$ è il punto di minimo ($-1/8$ il valore minimo), $(0, -1)$ e $(0, 1)$ i punti di massimo (1 il valore massimo).
Per esercizio studiare il bordo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Soluzione 3.3 - L'insieme C è quello rappresentato nella Figura 3.3. Il gradiente all'interno non si annulla mai (non si annulla mai da nessuna parte). Vediamo sul bordo. Cominciando parametrizzando la parte di cono descritta da $z^2 = x^2 + y^2$. Si può considerare una funzione

$$\phi : \Omega_1 \to \mathbf{R}^3\,, \qquad \phi(s,t) = (s, t, \sqrt{s^2 + t^2})$$

dove $\Omega_1 = \{(s,t) \in \mathbf{R}^2 \mid s^2 + t^2 \leqslant 4, (s,t) \neq (0,0)\}$. Il punto $(0,0)$ non viene considerato perché non è possibile trovare una funzione differenziabile da un aperto di $\mathbf{R}^2$ alla porzione di cono con il vertice del nostro caso. Allora la

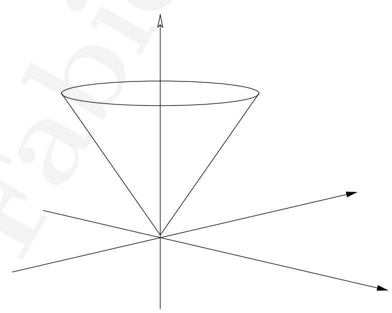

Figura 3.3:

funzione $f(\phi(s,t)) = s + t - s^2 - t^2$ ha derivate parziali

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial s} f(\phi(s,t)) = 1 - 2s \\ \dfrac{\partial}{\partial t} f(\phi(s,t)) = 1 - 2t \end{cases}$$

che si annullano per $(s,t) = (1/2, 1/2)$, punto che corrisponde a $\phi(1/2, 1/2) = (1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$. Ora parametrizziamo il cerchio: considero la funzione $\psi : \Omega_2 \to \mathbf{R}^3$, $\psi(s,t) = (s,t,2)$ dove $\Omega_2 = \{(s,t) \in \mathbf{R}^2 \mid s^2 + t^2 \leqslant 4\}$. La funzione $f \circ \psi(s,t) = s + t - 4$ non ha mai gradiente nullo. Ora passiamo alla circonferenza rappresentata dall'intersezione di $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ e $z = 2$. La parametrizzo con

$$\varphi(t) = (2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t, 2)$$

e ottengo che

$$\frac{d}{dt}(f \circ \varphi)(t) = -2\,\mathrm{sen}\, t + 2\cos t$$

che si annulla quando $\mathrm{sen}\, t = \cos t$, cioè per $t = \pi/4$ e $t = 5\pi/4$ che corrispondono ai due punti $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$ e $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2)$. Conclusione: testo la funzione nei punti $(1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2)$ e $(0,0,0)$ che è un vertice. Il massimo è $1/2$ assunto nel punto $(1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$, il minimo $-2\sqrt{2} - 4$ assunto nel punto $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2)$.

Soluzione 3.4 - Risolviamo l'esercizio in diversi modi. Prima di tutto trasformiamo il problema: la distanza di un generico punto in $\mathbf{R}^3$ dall'origine è data da

$$d((x,y,z),(0,0,0)) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.$$

Chiaramente minimizzare e massimizzare su un compatto questa funzione oppure il suo quadrato, cioè $x^2 + y^2 + z^2$, è equivalente (per convincersi della cosa si cominci a pensare in dimensione 1 alla funzione $f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ e $g(x) = x^2$). Per cui è più conveniente utilizzare la funzione $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ che è più semplice da derivare e regolare in ogni punto (mentre la funzione distanza sopra non è differenziabile nell'origine). L'insieme D è dato dall'intersezione di un cilindro lungo l'asse z a base ellittica e il piano di equazione $z - x = 1$. Per cui si studia la funzione $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ su D. La funzione f è continua e D è compatto per cui ammette sia massimo che minimo.
Il piano $z - y = 1$ può essere visto come un grafico ($z = y + 1$) e quindi la parametrizzazione più semplice risulta

$$\phi : E \to \mathbf{R}^3\,, \qquad \phi(u,v) = (u, v, v+1)$$

dove $E = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 \mid u^2 + 2v^2 \leqslant 3\}$. Definiamo la funzione $\tilde{f}(u,v) = f(\phi(u,v)) = u^2 + v^2 + (v+1)^2 = u^2 + 2v^2 + 2v + 1$. Annullando le derivate parziali si ottiene

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u} f(\phi(u,v)) = 2u = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial v} f(\phi(u,v)) = 4v + 2 = 0 \end{cases}$$

per cui l'unico punto stazionario è $(0, -1/2)$ che appartiene ad E e che corrisponde al punto $(0, -1/2, 1/2)$ dell'insieme D. Sul bordo parametrizzato con $\vartheta \mapsto (\sqrt{3}\cos\vartheta, \sqrt{3/2}\,\mathrm{sen}\,\vartheta)$ la funzione diventa

$$3\cos^2\vartheta + 3\,\mathrm{sen}^2\vartheta + 2\sqrt{\frac{3}{2}}\,\mathrm{sen}\,\vartheta + 1$$

la cui derivata si annulla per $\cos\vartheta = 0$, cioè per $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, $\vartheta = \frac{3\pi}{2}$ che corrispondono ai punti $(0, \sqrt{3/2})$ e $(0, -\sqrt{3/2})$ dell'insieme E e ai punti $(0, \sqrt{3/2}, \sqrt{3/2} + 1)$, $(0, -\sqrt{3/2}, 1 - \sqrt{3/2})$ dell'insieme D. Valutando la funzione nei tre punti ottenuti si ha

$$\begin{aligned} &\tilde{f}(0, -1/2) = \frac{1}{2}\,, \\ &\tilde{f}(0, \sqrt{3/2}) = 4 + 2\sqrt{\frac{3}{2}}\,, \\ &\tilde{f}(0, -\sqrt{3/2}) = 4 - 2\sqrt{\frac{3}{2}} = 4 - \sqrt{6} > \frac{1}{2}\,, \end{aligned}$$

per cui il punto $(0, -1/2, 1/2)$ di D, che corrisponde a $(0, -1/2)$ di E, è il punto di minima distanza dall'origine, il punto $(0, \sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}+1)$ di D, che corrisponde a $(0, \sqrt{3/2})$ di E, è il punto di massima distanza dall'origine.
Si sarebbe potuto studiare il punto interno valutando la matrice hessiana:

$$H_{\tilde{f}}(u,v) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

che è definita positiva, per cui $(0, -1/2)$ è di minimo (locale, ma a posteriori anche assoluto).
Vediamo studiando le curve di livello di $\tilde{f}$ come si può risolvere il problema.
La quantità

$$u^2 + 2v^2 + 2v + 1$$

può essere riscritta

$$u^2 + 2\Big(v + \frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{1}{2}$$

per cui risolvere $\tilde{f}(u,v) = c$ con $c \in \mathbf{R}$, cioè trovare l'insieme di livello c della funzione $\tilde{f}$, è equivalente a risolvere

$$u^2 + 2\Big(v + \frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{1}{2} = c\,, \qquad\qquad c \geqslant \frac{1}{2}$$

che sono ellissi, come le curve tratteggiate in Figura 3.4 (l'ellisse in neretto rappresenta il bordo di E). Per $c < 1/2$ l'insieme di livello c è l'insieme vuoto.

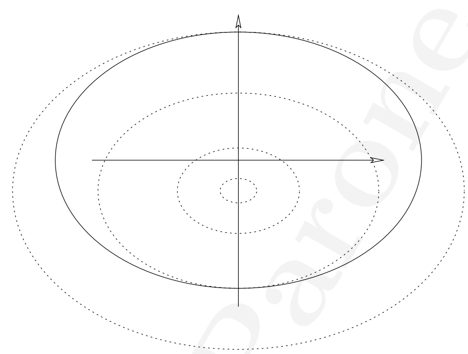

Figura 3.4:

Soluzione 3.11 - L'insieme in questione è un cilindro infinito, in particolare non è compatto, quindi non è detto che il minimo e il massimo esistano. Le tre derivate parziali poste uguali a zero

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{1+z^2} = 0 \\ \dfrac{2y}{1+z^2} = 0 \\ (x^2-y^2)\dfrac{2z}{(1+z^2)^2} = 0 \end{cases}$$

che forniscono i punti $(0,0,z)$ interni ad E. All'infinito (per $|z| \to +\infty$) la funzione tende a 0, ma è facile vedere che la funzione assume sia valori positivi che negativi. Vediamo sul bordo: dobbiamo parametrizzare la superficie $\partial E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1\}$.
!!! Si può essere tentati dall'inserire nell'espressione di f la quantità $1 - x^2$

al posto di y^2 e considerare così

$$\tilde{f}(x,z) = \frac{2x^2-1}{1+z^2}\,.$$

Questo corrisponde a considerare le due parametrizzazioni

$$\psi_1 : [-1,1]\times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3\,, \qquad \psi_1(x,z) = (x, \sqrt{1-x^2}, z)$$
$$\psi_2 : [-1,1]\times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3\,, \qquad \psi_2(x,z) = (x, -\sqrt{1-x^2}, z)$$

Annullando le derivate di $\tilde{f}$ si ottengono le soluzioni $x = 0$ e $z = 0$ che corrispondono ai due punti $(0,1,0)$ e $(0,-1,0)$ (che risultano i punti di massimo per la funzione f). A questo punto però vanno anche considerati gli estremi -1 e 1 del dominio di ψ_1 e ψ_2 che corrispondono ai punti

$$(1,0,0) \quad \text{e} \qquad (-1,0,0)$$

nei quali va valutata poi f. Se si considera la quantità $1-y^2$ al posto di x^2 si stanno considerando le due parametrizzazioni

$$\eta_1 : [-1,1]\times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3\,, \qquad \eta_1(y,z) = (\sqrt{1-y^2}, y, z)$$
$$\eta_2 : [-1,1]\times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3\,, \qquad \eta_2(y,z) = (-\sqrt{1-y^2}, y, z)$$

si considera $\hat{f}(y,z) = \frac{1-2y^2}{1+z^2}$ e annullando le derivate si trovano i due punti $(1,0,0)$ e $(-1,0,0)$ ai quali vanno aggiunti i punti corrispondenti agli estremi $\eta_1(-1) = \eta_2(-1) = (0,-1,0)$ e $\eta_1(1) = \eta_2(1) = (0,1,0)$.
Se parametrizziamo la superficie con

$$\varphi(\vartheta, z) = (\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta, z)$$

e consideriamo

$$f(\varphi(\vartheta,z)) = \frac{\cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta}{1+z^2}$$

derivando si ottengono

$$\begin{cases} \dfrac{4\cos\vartheta\operatorname{sen}\vartheta}{1+z^2} = 0 \\ \dfrac{(\cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta)2z}{1+z^2} = 0 \end{cases}$$

per cui si hanno le soluzioni $\operatorname{sen}\vartheta = 0$ o $\cos\vartheta = 0$ e $z = 0$, che corrispondono ai punti quattro $(0, 1, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(1, 0, 0)$ e $(-1, 0, 0)$, due di massimo, due di minimo.
Perché in questo modo abbiamo trovato quattro punti, mentre per $\tilde{f}$ e $\hat{f}$ solamente due?

Soluzione 3.14 - Indichiamo con (x, y) un generico punto P del piano e i tre punti dati

$$P_1 = (x_1, y_1), \quad P_2 = (x_2, y_2), \quad P_3 = (x_3, y_3).$$

Vogliamo minimizzare

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{j=1}^{3} d(P_j, P) = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \\ &\quad + \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} + \sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2}. \end{aligned}$$

Derivando si ottiene

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \frac{x - x_j}{\sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}} \\ f_y(x, y) = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \frac{y - y_j}{\sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}} \end{cases}$$

Accoppiando queste due equazioni otteniamo

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{P - P_j}{d(P, P_j)} = (0, 0)$$

e chiamando $v_j(x, y)$ il vettore $\frac{P - P_j}{d(P, P_j)}$ si ha

$$v_1 + v_2 + v_3 = (0, 0)\,. \tag{3.1}$$

La risposta è quindi che l'unico punto stazionario è dato da $P = (x, y)$ in modo tale che i tre vettori di lunghezza 1 soddisfino l'uguaglianza (3.1), il che significa che i tre vettori sono disposti in modo tale da formare tre angoli di $120°$. Vediamo una dimostrazione di questo fatto: senza perdita di generalità possiamo supporre che uno dei tre vettori sia $(-1, 0)$ (è sempre possibile ruotare v_1, v_2, v_3 in modo che venga soddisfatta tale richiesta) e vediamo come sono distribuiti gli altri due rispetto a questo. Siano allora

$$v_1 = (-1, 0), \qquad v_2 = (\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta), \qquad v_2 = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$$

con ϑ, α incogniti. Inserendo queste scritture in (3.1) si ottiene che

$$\begin{cases} \cos\vartheta + \cos\alpha = 1 \\ \operatorname{sen}\vartheta + \operatorname{sen}\alpha = 0 \end{cases}$$

Si ricava che $\vartheta = \pi/3$, $\alpha = 5\pi/3$ e cioè ricaviamo che il punto P è posizionato all'interno del triagolo che ha come vertici i tre punti P_1, P_2, P_3 e in modo tale che i segmenti unenti P ai punti P_j, $j = 1, 2, 3$ formino tre angoli di $120°$ (o $2\pi/3$).
Infine poiché il limite all'infinito di f è $+\infty$ tale punto sarà di minimo.

Soluzione 3.16 - L'insieme E, in Figura 3.5, non è compatto, quindi l'esistenza del massimo e del minimo non è garantita. Annullando le derivate si ottiene il punto critico $(0, 1)$. Si vede facilmente che

$$f(x, y) \leqslant f(0, 1) \qquad \text{per ogni } (x, y) \in \mathbf{R}^2 \tag{3.2}$$

(studiare l'hessiana per esercizio).
All'infinito: poiché $y \leqslant 1/|x|$ si ha che $(y-1)^2 \leqslant (1/|x| - 1)^2$ quindi

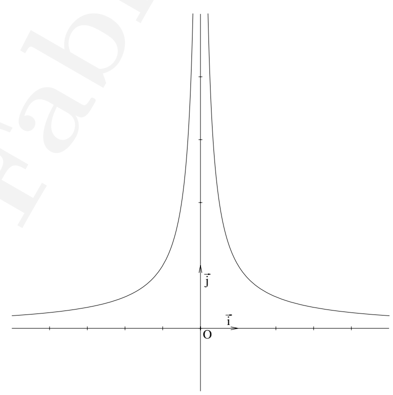

Figura 3.5:

$$\frac{1}{1 + x^2 + (\frac{1}{|x|} - 1)^2} \leqslant \frac{1}{1 + x^2 + (y-1)^2} \leqslant \frac{1}{1 + x^2}\,.$$

Se si considera quindi il limite per $|(x,y)| \to +\infty$ in E si hanno due possibilità: o $|x| \to +\infty$ (e $y \to 0$) oppure $y \to +\infty$ (e in questo caso $|x| \to 0$). Nel primo dei due casi dalla stima di sopra si ottiene che $f(x,y) \to 0$. Nel secondo caso possiamo stimare la f come segue, visto che $|x| \leqslant 1/y$:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{y^2}+(\frac{1}{|x|}-1)^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2+(y-1)^2} \leqslant \frac{1}{1+(y-1)^2}\,.$$

Conlcusione:

$$\lim_{\substack{|(x,\,y)|\,\to\,+\infty\\ (x,\,y)\,\in\,E}} f(x,y) = 0$$

(in realtà $\lim_{|(x,y)|\to+\infty} f(x,y) = 0$! mostrarlo per esercizio). Poiché f è sempre positiva, il limite all'infinito è zero e inoltre dalla stima (3.2) si conclude che la funzione ha un punto di massimo assoluto in $(0,1)$ e non ha minimo.

Soluzione 3.17 - Derivando la funzione f rispetto a x_k si ha:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_jx_i = 2\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(x_1^2+\ldots+x_n^2) = 2x_k$$

quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{2|x|^2\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j - 2x_k\langle Ax,x\rangle}{|x|^4} = \frac{2\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j - 2x_kf(x)}{|x|^2}$$

per ogni $k = 1,\ldots n$. Di conseguenza, annullando le derivate, si ha

$$\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j - x_kf(x) = 0 \qquad \text{per ogni } k = 1,\ldots n$$

e ciò è equivalente a dire che

$$Ax = f(x)x$$

cioè x è un autovettore e $f(x)$ è un autovalore. Senza bisogno di trovare le soluzioni x sicuramente $f(x)$ è un autovalore, quindi il minimo valore assunto da f è il minimo autovalore di A e il massimo valore assunto da f è il massimo autovalore di A.

Volendo risolvere il problema con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si osservi innanzitutto che la funzione f può essere ridefinita sulla ipersfera in $\mathbf{R}^n$

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| = 1\}$$

dato che

$$f(x) = \frac{\langle Ax, x\rangle}{|x|^2} = \left\langle A\frac{x}{|x|}, \frac{x}{|x|}\right\rangle$$

e quindi

$$f(\alpha x) = f(x) \qquad \text{per ogni } \alpha \neq 0\,.$$

Per cui ci si può limitare a considerare

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_jx_i$$

definita in S^{n-1}. Si consideri la funzione

$$H(x,\lambda) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_jx_i + \lambda(x_1^2 + \ldots + x_n^2 - 1)$$

visto che cerchiamo i punti stazionari in S^{n-1} e $|x| = 1$ se e solo se $|x|^2 = 1$. Le derivate forniscono (la matrice è simmetrica)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial x_k} = 2\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j + 2\lambda x_k = 0 \qquad k = 1, \ldots n \\ \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} = x_1^2 + \ldots + x_n^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Dalle prime n equazioni si ricava che

$$A \cdot x + \lambda x = 0$$

il che significa che x deve essere un autovettore (e λ un autovalore). I punti stazionari di H in $\mathbf{R}^{n+1}$ sono quindi tutte le $(n+1)$-uple (x,λ) con x autovettore di norma 1 e λ autovalore di A.
Si osservi come dalle equazioni sopra si ricava

$$x_k(a_{kk} + \lambda) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} a_{kj}x_j = 0$$

che nel caso in cui A sia diagonale fornisce subito il fatto che gli autovalori sono gli elementi della diagonale e gli autovettori sono del tipo $(0, \dots 0, 1, 0 \dots 0)$.

Soluzione 3.22 - L'insieme E è quello in Figura 3.6, quelle tratteggiate sono curve di livello (parabole). Risolveremo il problema senza fare calco-

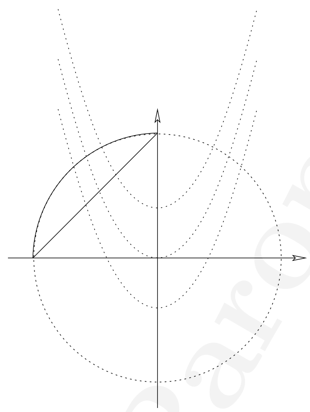

Figura 3.6:

li, ma osservando gli insiemi di livello della funzione (svolgere per esercizio i calcoli, anche per confronto, studiando il gradiente, la matrice hessiana e studiando sul bordo il comportamento della funzione come di solito).
Fissiamo $c \in \mathbf{R}$ e vediamo dove $f(x, y) = c$: la risposta è l'insieme Γ_c rappresentato dall'intersezione di E con la parabola di equazione (si veda anche la Figura 3.6)

$$y = x^2 + \sqrt[3]{c}$$

Chiaramente il valore massimo (rispettivamente il minimo) che assume f è il massimo c (rispettivamente il minimo c) per cui Γ_c non è vuoto (cioè il massimo c per cui la parabola $y = x^2 + \sqrt[3]{c}$ interseca l'insieme E). Concludendo: il minimo sarà assunto nel vertice di E dato dal punto $(-2, 0)$ e il massimo nel vertice di E dato dal punto $(0, 2)$.
Per calcolare i valori basta valutare la funzione in questi due punti o trovare i valori di c per cui le parabole passano per questi punti (farlo per esercizio!!).
Per concludere i valori minimo e massimo sono rispettivamente -64 e 8.

Soluzione 3.23 - La funzione è continua su un compatto, quindi sicuramente ammette massimo e minimo. L'insieme su cui è definita f e tre suoi insiemi di livello sono disegnati in Figura 3.7 (le linee tratteggiate allo stesso modo fatto parte dello stesso insieme di livello). Si fissi $c \in \mathbf{R}$ e si denoti

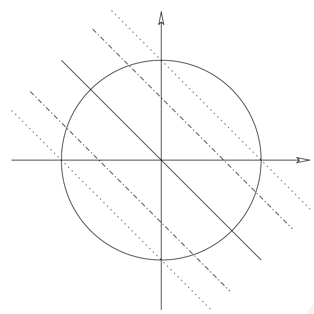

Figura 3.7:

con $\Gamma_c = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x, y) = c\}$. Chiaramente per $c < 0$ l'insieme Γ_c è il vuoto, per $c = 0$ si ha che $\Gamma_c = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = -x\}$, per $c > 0$ $\Gamma_c = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = -x + \sqrt{c}\} \cup \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = -x - \sqrt{c}\}$. Per cui il minimo di f è 0 assunto in tutto l'insieme $\Gamma_0 \cap E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = -x, [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]\}$, il massimo è assunto dove l'insieme di livello interseca E sul bordo e precisamente nei punti $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ (trovare le equazioni dell rette!). Il valore massimo è $f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 8$.

Soluzione 3.25 - L'insieme E è una corona circolare e gli insiemi di livello sono delle ellissi (si veda Figura 3.8), come si può facilmente ricavare ponendo

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 = c\,, \qquad c \geqslant 0\,.$$

Minore è il valore c e minori sono i semiassi dell'ellisse, l'insieme sul quale la funzione assume il valore costante c. Per cui i punti di minimo sono $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ dove l'ellisse descritta da $x^2 + 2y^2 = 1$ interseca la parte di bordo di E data dal cerchio di raggio 1 (quindi il valore minimo è 1), i punti di massimo sono $(0, 2)$ e $(0, -2)$ dove l'ellisse descritta da $x^2 + 2y^2 = 8$ interseca la parte di bordo di E data dal cerchio di raggio 2 (quindi il valore minimo è 8).

Soluzione 3.28 - Le curve di livello sono date dall'equazione (si veda la figura 3.9)

$$y = g(x) + c\,, \qquad c \in \mathbf{R}\,.$$

Man mano che aumentiamo il valore di c le curve traslano lungo l'asse y.

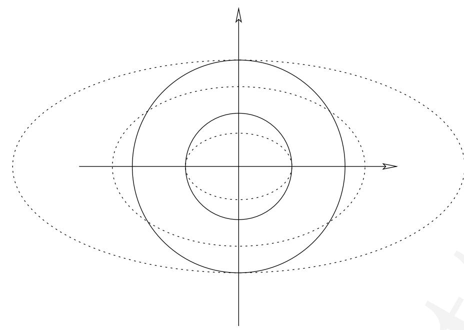

Figura 3.8:

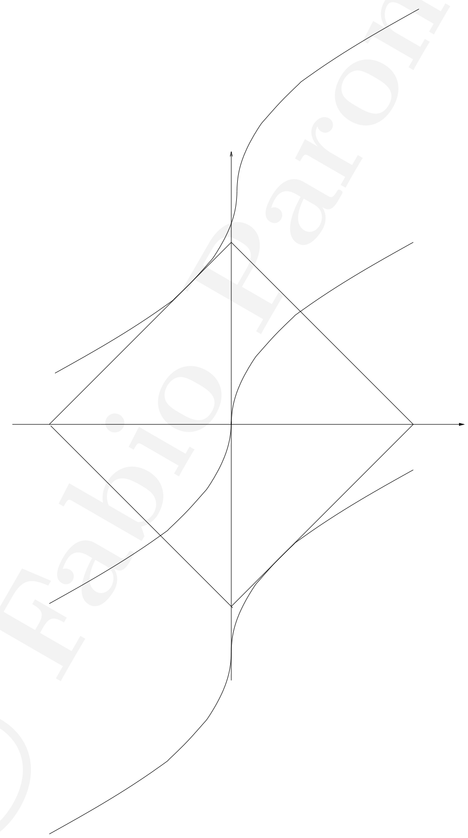

Figura 3.9:

Per trovare il punto di massimo è sufficiente imporre che la curva di livello c sia tangente al bordo dell'insieme E. Cerchiamo x imponendo che la curva

$y = g(x) + c$ sia tangente alla retta $y = x + 1$ per un qualche valore di x compreso tra -1 e 0. Per far ciò imponiamo

$$g'(x) = 1\,, x \in (-1, 0)\,, g(x) + c = x + 1\,.$$

Si ricava che

$$\frac{1}{2\sqrt{-x}} = 1$$

da cui $x = -1/4$. Imponiamo ora che $-\sqrt{1/4} + c = -1/4 + 1$ e troviamo che $c = 5/4$. Il valore massimo è quindi $5/4$ assunto nel punto che ha come prima coordinata $-1/4$. L'altra si ricava dall'uguaglianza $y = x + 1$: il punto di massimo è quindi $(-1/4, 3/4)$.
Analogamente si ricava che $(1/4, -3/4)$ è il punto di minimo e il valore minimo è $-5/4$.

Soluzione 3.29 - La funzione $\operatorname{senh} t = (e^t - e^{-t})/2$ è strettamente crescente per cui i punti critici, e la loro natura, sono gli stessi per la funzione

$$g(x, y) = x^4 + y^3 - 4x^2 - 3y^2\,.$$

Attenzione: a questo punto è possibile studiare la funzione g anziché f perché $\operatorname{senh} t$ è *strettamente* crescente e quindi la sua derivata è sempre diversa da zero, se fosse solamente crescente (non decrescente) ciò non sarebbe possibile. Un'altra cosa: se si avesse una funzione strettamente decrescente il ragionamento può essere applicato comunque, con l'attenzione che la natura dei punti viene mutata, un punto di massimo per g sarebbe un minimo per f e viceversa.
Vediamo ora di capire com'è fatto l'insieme E. La disequazione $|x|(1 + (y - 2)^2) - 2 < 0$ è equivalente a

$$|x| < \frac{2}{1 + (y-2)^2}\,,$$

per cui l'insieme E è un insieme illimitato come quello in Figura 3.10. Per ricavarlo si noti che la diseguaglianza denota la parte interna alle due curve di equazione $x = \frac{2}{1+(y-2)^2}$ e $x = -\frac{2}{1+(y-2)^2}$.
Veniamo ai conti: posto il gradiente di g uguale a $(0, 0)$ si trovano i punti $(0, 0), (0, 2), (\sqrt{2}, 0), (\sqrt{2}, 2), (-\sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, 2)$. Attenzione: i punti $(-\sqrt{2}, 0)$

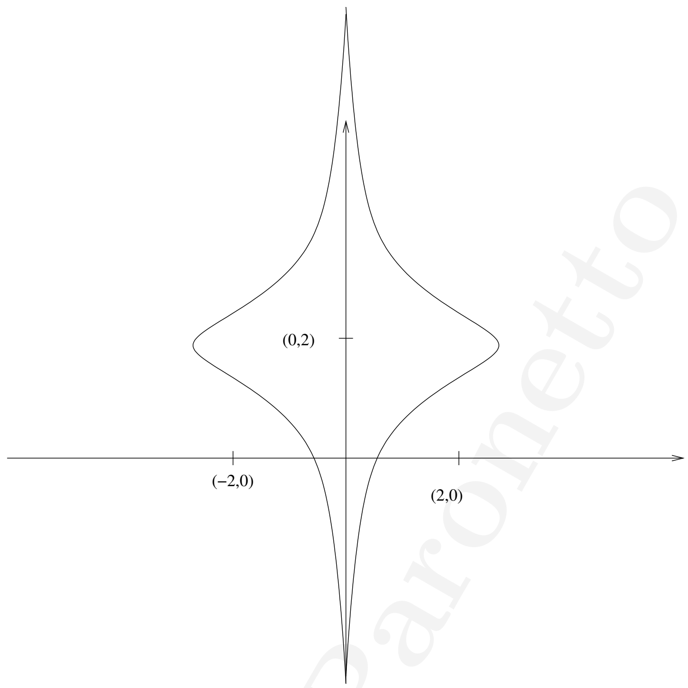

Figura 3.10:

e $(\sqrt{2}, 0)$ non appartengono ad E, per cui non ci interessano.
Calcolando le derivate seconde si ottiene che la matrice hessiana è

$$H_g(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 8 & 0 \\ 0 & 6y - 6 \end{pmatrix}$$

Questo è il caso più fortunato: la matrice è diagonale per cui conosciamo già gli autovalori il cui segno ci fornisce le informazioni sulla natura dei punti:

$$H_g(0,0) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \qquad \text{punto di massimo locale}$$

$$H_g(0,2) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{punto di sella}$$

$$H_g(\pm\sqrt{2},0) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \qquad \text{punti di sella}$$

$$H_g(\pm\sqrt{2},2) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{punti di minimo locale}$$

La funzione f ammette massimo e minimo su $\mathbf{R}^2$? (assoluti). NO! Infatti

$$\lim_{|x|\to+\infty} g(x,0) = +\infty\,, \qquad \lim_{y\to-\infty} g(0,y) = -\infty\,,$$

per cui poiché il seno iperbolico va a $-\infty$ a $-\infty$ e a $+\infty$ a $+\infty$ anche f risulta illimitata sia dal basso che dall'alto.

Soluzione 3.30 - Annullando il gradiente si arriva alle equazioni

$$\begin{cases} x^3 = y \\ y^3 = x \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x^9 = x \\ y^3 = x \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x(x^8-1) = 0 \\ y^3 = x \end{cases}$$

per cui le soluzioni sono $(0,0), (1,1), (-1,-1)$. La matrice hessiana è

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo il punto $(0,0)$:

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Valutiamo il segno degli autovalori: anche se Δ_1, il determinante del minore principale 1×1 (di fatto il termine $[H_f(0,0)]_{11}$ della matrice) è nullo, si

ha che $\Delta_2 = -16$ è anche il determinante della matrice nonché il prodotto degli autovalori: ne deduciamo che necessariamente uno è positivo e l'altro negativo per cui $(0,0)$ è di sella.
Per quanto riguarda il punto $(1,1)$ si ha che

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

che si può verificare essere definita positiva, per cui $(1,1)$ è di minimo locale. Si può calcolare anche il determinante che è positivo, da cui si deduce che il prodotto dei due autovalori è positivo $(144-16)$, per cui si potrebbero avere due autovalori positivi o due negativi. Ma un altro invariante è la traccia, la somma degli elementi sulla diagonale, che è anche la somma degli autovalori. La traccia è 24 per cui se la somma degli autovalori è positiva deduciamo che il segno dei due autovalori non può essere altro che positivo. Lo stesso vale per il punto $(-1,-1)$.
Per concludere si vede che

$$\lim_{|(x,y)|\to+\infty} f(x,y) = +\infty$$

per cui la funzione non ammette massimo e ammette due punti di minimo assoluto.

Soluzione 3.31 - Anullando il gradiente si ottiene

$$\begin{cases} 4x^3 - 4(x-y) = 0 \\ 4y^3 + 4(x-y) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 4x^3 + 4y^3 = 0 \\ 4y^3 + 4(x-y) = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava che $x = -y$ e quindi dalla seconda $4y(y^2 - 2) = 0$. Per cui le soluzioni sono $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. La matrice hessiana è

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}.$$

Si ha che

$$H_f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = H_f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}.$$

che è definita positiva, per cui i due punti sono di minimo locale, ma

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

ha determinante 0 e quindi almeno uno dei due autovalori è 0. La traccia è -8, il determinante è 0 e quindi un autovalore è -8. Si può concludere per il momento solamente che il punto in questione non è di minimo.
Come fare per stabilire la natura del punto $(0,0)$? Un modo possibile è studiare il segno di f per capire se il punto in questione è di sella: si osservi che

$$f(x,x) = 2x^4 + 2$$

e quindi $(0,0)$ risulta di minimo per f ristretta alla retta $x = y$. Sapendo che un autovalore è negativo si può concludere che il punto $(0,0)$ è di sella.
Alternativamente senza conoscere gli autovalori (senza sapere in particolare che uno dei due è negativo) si può restringere f ad un'altra curva, per esempio la retta $x = -y$. Infatti

$$f(x,-x) = 2x^4 - 8x^2 - 2$$

ha un massimo in $x = 0$ ($\frac{d}{dx}(2x^4 - 8x^2 - 2)|_{x=0} = 0$, $\frac{d^2}{dx^2}(2x^4 - 8x^2 - 2)|_{x=0} = -8$). Anche in questo caso si conclude che $(0,0)$ è un punto di sella per f.

Soluzione 3.32 - Al solito si calcolino le derivate parziali e le si annullino. Si ottiene

$$\begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ 4y^3 + 2y = 0 \\ 3z^2 - 2x \end{cases}$$

da cui si ottengono i punti $(0,0,0)$ e $(2/3, 0, 2/3)$. La matrice hessiana è data da

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 12y^2 + 2 & 0 \\ -2 & 0 & 6z \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$H_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Valutando i determinanti dei minori pricipali: $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 4$, $\Delta_3 = -8$. La matrice non è definita positiva e il prodotto degli autovalori (Δ_3) è negativo: gli autovalori potrebbero essere tutti negativi oppure due positivi e uno negativo. Abbiamo che $\Delta_1 > 0$ e $\Delta_2 > 0$, ma questo non ci aiuta a concludere. Se Δ_1 fosse stato negativo avremmo potuto concludere che la matrice è definita negativa. Un altro invariante è la *traccia* della matrice, ossia la somma degli elementi sulla diagonale che corrisponde alla somma degli autovalori: poiché la somma è 4 si può dedurre che i tre autovalori non possono essere tutti negativi. Conclusione: $(0,0,0)$ non è né di massimo, né di minimo ed è quindi di sella.

$$H_f(2/3,0,2/3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 22/3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

i cui minori hanno determinanti $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 44/3$, $\Delta_3 = 88/3$, per cui il punto $(2/3,0,2/3)$ è di minimo locale.

Soluzione 3.33 - Le derivate prime di f sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -24x^2 + 24xy + 2x - 2y - 6y^2\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 2y - 2x + 3y^2 - 12xy + 12x^2$$

che si annullano in $(0,0)$, unico punto critico. Studiamo le derivate seconde. La matrice hessiana in $(0,0)$ è

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

che ha determinante nullo: almeno uno dei due autovalori è nullo. In realtà solo uno visto che la traccia è positiva, ma questo non ci aiuta a capire la natura del punto. Gli autovalori dovrebbero essere 0 e 4 dato che il determinante è 0 e la traccia 4, ma in dimensione più alta non è possibile determinare gli autovalori in questo modo (se conosco la somma e il prodotto di n numeri posso determinare gli n numeri solo se $n = 2$). Calcoliamo allora il polinomio caratteristico e le sue radici:

$$P(\lambda) = (2-\lambda)(2-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 4\lambda\,.$$

Le radici effettivamente sono 0 e 4. L'autospazio relativo all'autovalore 4 si trova facilmente risolvendo

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

che fornisce la retta $x + y = 0$. Restringere a tale retta la funzione f non ci fornisce alcuna informazione, se non quella che f ristretta a tale retta

ha un minimo, cosa però che già sappiamo poiché tale retta è l'autospazio corrispondente ad un autovalore positivo.
Si faccia per esercizio questa (inutile) verifica valutando la quantità $f(x,-x)$ e derivandola rispetto a x due volte in $x=0$.
Il problema ora è capire la natura del punto $(0,0)$ e per fare ciò può aiutare restringere f prima a delle rette, se ciò non bastasse si vedrà qualche altra curva. L'unica retta che possiamo escludere è proprio la retta $x+y=0$.
Un primo tentativo che si può fare è considerare la retta che rappresenta il nucleo della matrice hessiana di f in $(0,0)$, retta che si ottiene risolvendo

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che fornisce la retta $y=x$, ma, lo ripetiamo, questa è *una* scelta fra le infinite possibili. Valutiamo

$$f(x,x) = -x^3$$

che non è convessa, per cui il punto $(0,0)$ non è di minimo. Se la funzione fosse più complicata si studia derivando per $x=0$ la funzione $f(x,x)$ (farlo per esercizio: la derivata prima è zero, la seconda pure, la terza finalmente è -6 il che implica che $x=0$ è un flesso).
Se per curiosità vogliamo vedere il comportamento di f lungo tutte le rette consideriamo dapprima le rette del tipo $y=\alpha x$ e otteniamo

$$f(x,\alpha x) = (12\alpha+\alpha^3-8-6\alpha^2)x^3+(1+\alpha^2-2\alpha)x^2 = (\alpha-2)^3x^3+(\alpha-1)^2x^2$$

e derivando due volte in zero

$$\frac{d^2}{dx^2}(f(x,\alpha x)) = 2(\alpha-1)$$

da cui si deduce che la restrizione di f lungo le infinite rette corrispondenti a $\alpha<1$ risulta concava. Si osservi che la retta corrispondente ad $\alpha=1$ non l'abbiamo ritrovata, ed infatti tale restrizione non è concava, come già visto, ma ha un flesso.
Per completare lo studio, a questo punto inutile, di f ristretta alle rette consideriamo $x=0$ e la funzione diventa

$$f(0,y) = y^2+y^3$$

che nuovamente è concava in un intorno di $y=0$.
Attenzione! questo modo di procedere funziona solo in negativo! Se restringendo la funzione ad una qualunque retta o a tutte le rette si trovasse

una funzione convessa non potremmo concludere nulla. A tal proposito si vedano gli esercizi 3.35 e 3.36.

Soluzione 3.34 - Derivando f si ottiene che l'unico punto critico è $(0, 0, 0)$. La matrice hessiana in quel punto è data da

$$H_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 3/2 & 7 & 0 \\ 7 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

che ha determinante nullo, per cui almeno uno degli autovalori è nullo, e traccia positiva, per cui non conosciamo il segno dei due autovalori (potrebbero essere tutti e due positivi oppure uno positivo e l'altro nullo, non entrambi negativi). Il polinomio caratteristico è dato da

$$P(\lambda) = \lambda[(3/2 - \lambda)(16 - \lambda) - 49]$$

che si annulla per $\lambda = 0$ e per le soluzioni di $(3/2 - \lambda)(16 - \lambda) - 49 = 0$. Risolvendo si ottengono due soluzioni, una positiva e una negativa (si osservi come tutte le entrate della matrice siano positive anche se un autovalore è negativo). Concludiamo che lungo una curva la funzione è concava, lungo un'altra è convessa e quindi il punto in questione è di sella.
Per esercizio si calcolino i due autovalori e i relativi autospazi e si valuti f ristretta a tali autospazi (che saranno due rette passanti per l'origine).

Soluzione 3.35 - Dai conti si ricava che $(0, 0)$ è l'unico punto critico e che la matrice hessiana di f in $(0, 0)$ è la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se proviamo a restringere f lungo la retta $y = 0$, nucleo della matrice, troviamo che tale restrizione ammette minimo in 0. Poiché l'altro autovalore è positivo si potrebbe essere tentati di conludere che tale punto è di minimo. Se restringiamo f a tutte le rette per l'origine troviamo ancora che tali restrizioni ammettono minimo nell'origine. Ma ciò non basta. Ad esempio, si verifica che la restrizione della funzione alla curva $y = 2x^2$ è negativa.
Infatti la funzione è $f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$ e quindi è chiaramente positiva se $y > 3x^2$ e per $y < x^2$ (è il prodotto di due quantità che hanno lo

stesso segno), ma per $x^2 < y < 3x^2$ le due quantità $y - x^2$ e $y - 2x^2$ hanno segno discorde (e si annulla lungo le due curve $y = x^2$ e $y = 2x^2$) per cui in tale regione la funzione è negativa. Si conclude che in un qualunque intorno dell'origine f assume valori sia positivi che negativi e si annulla nell'origine. Di conseguenza il punto è di sella, anche se la restrizione a tutte le rette ammette minimo nell'origine.

Soluzione 3.36 - La funzione ha un solo punto critico, $(0, 1)$, che risulta di sella (non basta restringere f a tutte le rette per $(0, 1)$, e nemmeno a tutte le parabole!).

Soluzione 3.37 - L'insieme E è illimitato (quello tratteggiato in Figura 3.11) e le derivate parziali non si annullano mai contemporaneamente su E. Infatti

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{-xy}(1 - xy) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -x^2 e^{-xy} \end{cases}$$

e la derivata rispetto a y non è mai zero all'interno di E! Vediamo sul bordo:

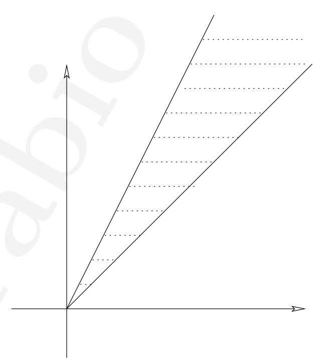

Figura 3.11:

parametrizzando il bordo con le curve $t \mapsto (t, t)$ e $t \mapsto (t, 2t)$ con $t \in (0, +\infty)$ si ottiene prima

$$\frac{d}{dt} f(t, t) = \frac{d}{dt} t e^{-t^2} = e^{-t^2}(1 - 2t^2)$$

che si annulla per $t = 1/\sqrt{2}$ che corrisponde al punto $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, poi

$$\frac{d}{dt} f(t, 2t) = \frac{d}{dt} t e^{-2t^2} = e^{-t^2}(1 - 4t^2)$$

che si annulla per $t = 1/2$, che corrisponde al punto $(1/2, 1)$. Vediamo all'infinito: poiché in E

$$x^2 \leqslant xy \leqslant 4x^2 \Rightarrow -4x^2 \leqslant -xy \leqslant -x^2$$

si ha che

$$x e^{-4x^2} \leqslant f(x, y) \leqslant x e^{-x^2}$$

per cui

$$\lim_{\substack{|(x,y)| \to +\infty \\ (x,y) \in E}} f(x, y) = 0 \,.$$

Esaminiamo i candidati, i due punti trovati e il vertice:

$$\begin{aligned}
& f(0,0) = 0\,, && \text{minimo} \\
& f(1/2, 1) = \tfrac{1}{2} e^{-1/2}\,, && \text{massimo} \\
& f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2}\,. &&
\end{aligned}$$

Soluzione 3.38 - I punti $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ sono di minima distanza, $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ e $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ di massima.

Soluzione 3.39 - Traccia - Il vincolo può essere visto come grafico per cui una delle parametrizzazioni possibili e più semplici è

$$(u, v) \mapsto \Big(u, v, \frac{1}{6}(2u + 4v + 5)\Big)$$

(ma anche $(u, v) \mapsto (\frac{1}{2}(6v - 4u - 5), u, v)$ e $(u, v) \mapsto (u, \frac{1}{4}(6v - 2u - 5), v)$ vanno bene). Ci si riduce così ad una funzione di due variabili

$$f(u, v, \frac{1}{6}(2u + 4v + 5))\,.$$

Soluzione 3.42 - Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange consideriamo la funzione

$$H(x_1, \ldots x_n, \lambda) = x_1 + \ldots + x_n + \lambda(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n - 1)\,.$$

La derivata parziale rispetto a x_j di H è $1 - \lambda x_1 \ldots x_{j-1} \cdot x_{j+1} \ldots x_n = 1 - \lambda \frac{x_1 \ldots x_{j-1} x_j x_{j+1} \ldots x_n}{x_j}$, quindi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial x_j} = 1 - \lambda\, \dfrac{x_1 \ldots x_{j-1} x_j x_{j+1} \ldots x_n}{x_j} = 1 - \dfrac{\lambda}{x_j} = 0\,, \qquad j = 1, \ldots n \\ \\ x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 1 \end{cases}$$

da cui si deduce che $\lambda = x_j$ per $j = 1, \ldots n$. Si noti che non è necessario risolvere il sistema per concludere perché il valore di λ non è indispensabile. Per cui si deduce che la soluzione (l'unica) del sistema è tale che $x_1 = x_2 = \ldots x_n$ (che sarà uguale anche al valore di λ, ma non è importante). Se tutti i valori devono essere uguali e il loro prodotto è 1 si ha necessariamente

$$x_j = 1 \qquad \text{per ogni } j \in \{1, \ldots n\}\,.$$

Per vedere che questo è un punto di minimo per la somma usiamo l'induzione: mostriamo che $x_1 + \ldots x_n \geqslant n$ ogni volta che $\Pi_{i=1}^n x_i = 1$.
Se $n = 2$: dobbiamo vedere che $x_1 + x_2 \geqslant 2$ sapendo che $x_1 x_2 = 1$. Per esercizio mostrare (derivando) che la funzione, definita per $x_1 > 0$, soddisfa

$$f(x_1) = x_1 + \frac{1}{x_1} \geqslant 2\,.$$

Supponiamo quindi che l'affermazione sia vera per n e mostriamola per $n+1$. Siano quindi x_j, $j = 1, \ldots n+1$, $n+1$ numeri tali che $x_1 \cdot \ldots x_{n+1} = 1$. È chiaro che se questi numeri non sono tutti uguali a 1 (e avremmo concluso) ne esiste uno minore di uno e uno maggiore. Diciamo che siano $x_n < 1$, $x_{n+1} > 1$. Chiamando $y = x_n x_{n+1}$ si hanno n numeri $x_1, \ldots, x_{n-1}, y$ il cui prodotto è 1 e quindi, per l'ipotesi induttiva, sappiamo che

$$x_1 + \ldots + x_{n-1} + y = x_1 + \ldots + x_{n-1} + x_n \cdot x_{n+1} \geqslant n\,.$$

Vogliamo però mostrare che questa somma è maggiore o uguale a $n+1$:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + \ldots + x_{n+1} & = & (x_1 + \ldots + x_{n-1} + x_n x_{n+1}) + x_n + x_{n+1} - x_n x_{n+1} \\ & \geqslant & n + x_n + x_{n+1} - x_n x_{n+1} = \\ & = & n + x_{n+1}(1 - x_n) + x_n = \\ & = & n + 1 + x_{n+1}(1 - x_n) + x_n - 1 = \\ & = & n + 1 + (x_{n+1} - 1)(1 - x_n) \geqslant n + 1 \end{array}$$

perché stiamo assumendo $x_{n+1} - 1 > 0$ e $1 - x_n > 0$.
Conseguenza interessante: da questo fatto si può mostrare che la media geometrica è minore o uguale della media aritmetica ($a_j > 0$)

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \frac{a_1 + \ldots a_n}{n} \tag{3.3}$$

Infatti è sufficiente considerare le quantità

$$x_j := \frac{a_j}{\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}}$$

il cui prodotto è 1, per cui per quanto mostrato si ha $\sum_{j=1}^{n} x_j \geqslant n$, cioè

$$\frac{a_1 + \ldots a_n}{\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}} \geqslant n\,.$$

Soluzione 3.43 - Il volume è dato dal prodotto delle lunghezze dei tre lati. Indicando con x, y, z le tre lunghezze la funzione da massimizzare è allora $f(x, y, z) = xyz$. La superficie di ogni singola faccia è il prodotto delle lunghezze dei due lati che la determinano, per cui il vincolo è $2(xy + xz + yz) = S$. Uso il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: si consideri la funzione $H(x, y, z, \lambda) = xyz + 2\lambda(xy + xz + yz) - \lambda S$ e le sue derivate parziali

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial x} = yz + 2\lambda(y + z) \\ \dfrac{\partial H}{\partial y} = xz + 2\lambda(x + z) \\ \dfrac{\partial H}{\partial z} = xy + 2\lambda(x + y) \\ \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} = 2(xy + xz + yz) - S \end{cases}$$

Dalla prima e dalla seconda equazione si ricava che

$$2\lambda = -\frac{yz}{y + z} = -\frac{xz}{x + z}$$

e da cui (si ricordi che $x, y, z > 0$) $x = y$. Analogamente dalla prima e dalla terza si ricava $x = z$, per cui si conclude che $x = y = z$. Questa è la soluzione, che corrisponde a dire che se c'è un parallelepipedo di volume massimo questo deve essere un cubo. Vediamo si stabilire quanti punti ci sono che verificano questa condizione: si sa che $2(xy+xz+yz) = S$ e d'altra parte che $x = y = z$. Quindi esiste solo un punto sul vincolo dato da

$$2(x^2 + x^2 + x^2) = S \qquad \Rightarrow \qquad x = \sqrt{\frac{S}{6}}\,.$$

Il volume corrispondente a questo valore è

$$\Big[\sqrt{\frac{S}{6}}\,\Big]^3 = \Big(\frac{S}{6}\Big)^{3/2}\,.$$

Vediamo in due modi che $(\sqrt{S/6})^3$ è il massimo valore possibile per il volume. Si può utilizzare la formula (3.3). Infatti presi $a_1 = xy, a_2 = yz, a_3 = xz$ si ha da (3.3)

$$\sqrt[3]{xy\ yz\ xz} = (xyz)^{2/3} \leqslant \frac{xy + xz + yz}{3} = \frac{S}{6}$$

da cui

$$f(x, y, z) = xyz \leqslant \Big[\frac{S}{6}\Big]^{3/2}$$

ogniqualvolta la somma $2(xy + xz + yz) = S$.
Un altro modo è il seguente: la funzione volume $f(x, y, z) = xyz$ è sempre positiva e ha un unico punto critico. Vediamo che all'infinito la funzione tende a zero (o equivalentemente che $1/f(x, y, z)$ tende a $+\infty$) quando $|(x, y, z)| \to +\infty$ sul vincolo:

$$\frac{S}{2}\frac{1}{xyz} = \frac{xy + yz + xz}{xyz} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\,.$$

È chiaro che quando $|(x, y, z)| \to +\infty$ sul vincolo $M = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3\ |x > 0\,, y > 0\,, z > 0\,,\ 2(xy + yz + xz) = S\}$ non tutte le variabili possono andare a $+\infty$, e almeno una delle tre deve quindi convergere a 0. Per cui

$$\lim_{\substack{|(x,y,z)| \to +\infty \\ (x,y,z) \in M}} f(x, y, z) = 0\,.$$

Soluzione 3.45 - L'insieme E è quello delimitato dalle curve in Figura 3.12 e dall'asse $y = 0$. Infatti abbiamo le seguenti limitazioni: $y \geqslant 0$ e

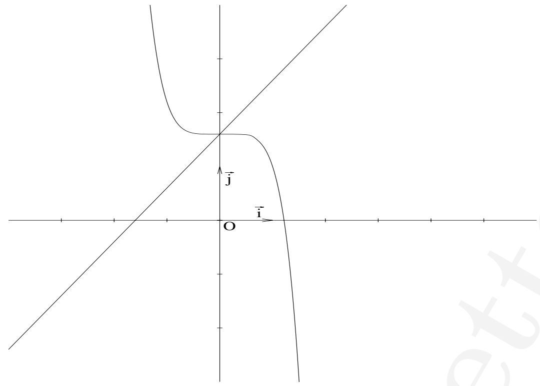

Figura 3.12:

$y \leqslant x + 2/\sqrt[3]{5}$ che definiscono due semipiani. La terza $3x^5 + 5y^3 \leqslant 8$ può essere vista come

$$y \leqslant \left(\frac{8-3x^5}{5}\right)^{1/3}.$$

Le derivate parziali si annullano solo nell'origine, che non appartiene all'interno di E, quindi va scartato. Vediamo il bordo. Prima la parte in cui $y = 0$: chiaramente $f(x,0) = 0$ (provare ad usare i moltiplicatori). La parte di bordo che appartiene alla retta si può parametrizzare con $\varphi(t) = (t, t + 2/\sqrt[3]{5})$ con $t \in (-2/\sqrt[3]{5}, 0)$.
Si ottiene $f(\varphi(t)) = t^2 + t2/5^{1/3}$ la cui derivata è

$$2t + \frac{2}{5^{1/3}}$$

che si annulla per $t = -1/5^{1/3}$. Quindi il punto $\varphi(-1/5^{1/3}) = (-1/5^{1/3}, 1/5^{1/3})$ è un punto candidato. Sull'ultimo tratto di bordo usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: cerchiamo i punti stazionari (in $\mathbf{R}^3$) della funzione

$$H(x,y,\lambda) = xy + \lambda(3x^5 + 5y^3 - 8).$$

Derivando si ottiene

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial x} = y + 15\lambda x^4 = 0 \\ \dfrac{\partial H}{\partial y} = x + 15\lambda y^2 = 0 \\ \dfrac{\partial H}{\partial z} = 3x^5 + 5y^3 - 8 = 0 \end{cases}$$

Dalla prima e dalla seconda si ha che $15\lambda = -y/x^4 = -x/y^2$ da cui

$$y^3 = x^5\,.$$

Inserendo quest'informazione nella terza equazione si ricava

$$x = 1\,, \quad y = 1\,.$$

Valutando f nei punti $(-1/5^{1/3}, 1/5^{1/3})$, $(1,1)$, $(x,0) \in E$, e il vertice $(0, 2/5^{1/3})$ si ottiene

$$\begin{aligned}
&f(-1/5^{1/3}, 1/5^{1/3}) = -\tfrac{1}{\sqrt[3]{25}}\,, && \text{minimo}\\
&f(1,1) = 1\,, && \text{massimo}\\
&f(x,0) = 0\,, &&\\
&f(0, 2/5^{1/3}) = 0\,. &&
\end{aligned}$$

Soluzione 3.46 - Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si consideri la funzione

$$H(x,y,z,\lambda) = 2x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2yz - 1)$$

e annullando le sue derivate si ottiene

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial H}{\partial x} = 4x + 2\lambda xyz = 0\\
\dfrac{\partial H}{\partial y} = 2y + \lambda x^2 z = 0\\
\dfrac{\partial H}{\partial z} = 2z + \lambda x^2 y = 0\\
x^2yz = 1
\end{cases}$$

Dalla seconda e dalla terza si ottiene

$$\lambda = -\frac{2y}{x^2z} = -\frac{2z}{x^2y} \qquad \Longrightarrow \qquad z^2 = y^2\,.$$

Dalla quarta equazione si ricava che $x^2 = 1/yz$ per cui yz è positivo (o sia y che z sono positivi, o entrambi sono negativi, quindi la possibilità $z = -y$

va scartata).
Dalla prima equazione, sfruttando $y = z$ e $x^2 = 1/yz$, si ha

$$4x + 2\Big(-\frac{2y}{x^2 z}\Big)xyz = 4\Big(x - \frac{1}{x^3}\Big) = 0$$

da cui si ricava che $x = 1$ oppure $x = -1$. Per cui i punti trovati sono

$$P_1 = (1,1,1)\,, P_2 = (1,-1,-1)\,, P_3 = (-1,1,1)\,, P_4 = (-1,-1,-1)\,.$$

Si ha che $f(P_i) = 4$ per ogni i. Come fare per capire se sono massimi o minimi? Dalla risoluzione dell'Esercizio 3.42 sappiamo che se $y, z > 0$ e $x^2yz = 1$ allora $x^2 + y + z \geqslant 3$ da cui $2x^2 + 2y + 2z \geqslant 6$. Si ha usando $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$

$$2x^2 + (y^2 + 1) + (z^2 + 1) \geqslant 2x^2 + 2y + 2z \geqslant 6$$

da cui

$$2x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 4\,.$$

Se $y, z < 0$ considero $-y$ e $-z$ che sono positivi e il cui prodotto è sempre yz e ripeto il ragionamento. Conclusione:

$$f(x,y,z) \geqslant 4 \qquad \text{sul vincolo}$$

per cui P_i, $i = 1,2,3,4$, sono tutti punti di minimo.

Un altro modo è il seguente: la funzione f è strettamente convessa, ha un unico punto di minimo (in $\mathbf{R}^3$) che è $(0,0,0)$ e va all'infinito per $|(x,y,z)| \to \infty$ (gli insiemi di livello sono ellissoidi, per cui man mano che mi allontano dall'origine la funzione cresce).
Si osservi che il vincolo è illimitato, se per caso una delle variabili tende a zero è chiaro che le altre debbono crescere per bilanciare: ad esempio se $x \to 0^+$ è chiaro che almeno una tra y e z debbono andare all'infinito

$$yz = \frac{1}{x^2}\,.$$

Anche sul vincolo quindi accade che

$$\lim_{\substack{|(x,y,z)| \to +\infty \\ (x,y,z) \in E}} f(x,y,z) = +\infty\,.$$

Di conseguenza poiché f cresce allontandanandosi dall'origine i punti trovati non possono essere che di minimo.

Soluzione 3.47 - Con due vincoli considero la funzione

$$H(x,y,z,\lambda,\mu) = x + 3y - z + \lambda(x^2 + y^2 - z) + \mu(z - 2x - 4y)\,.$$

Si trovano i punti $P_1 = (1 + \sqrt{5/2}, 2 + \sqrt{5/2}, 10 + 6\sqrt{5/2})$ e $P_2 = (1 - \sqrt{5/2}, 2 - \sqrt{5/2}, 10 - 6\sqrt{5/2})$ che sono rispettivamente di minimo e di massimo.

Soluzione 3.48 - Con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange cerchiamo i punti stazionari liberi della funzione

$$H(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 - xy + y^2 - 1)$$

($x^2 + y^2$ è il quadrato della distanza di un punto (x,y) dall'origine). Annullando le derivate si ottiene

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda x - \lambda y = 0 \\ 2y + 2\lambda y - \lambda x = 0 \\ x^2 - xy + y^2 - 1 = 0\,. \end{cases}$$

Sommando la prima e la seconda si ottiene $(2+\lambda)(x+y) = 0$ da cui si ricava

$$x = y \qquad \text{oppure} \qquad x = -y$$

e infine le quattro soluzioni

$$(1,1)\,,\ (-1,-1)\,,\ \Big(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)\,,\ \Big(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big)\,.$$

Per concludere l'esercizio la minima distanza è $\sqrt{2/3}$ e la massima $\sqrt{2}$.

Si osservi che il luogo di zeri della funzione $(x,y) \mapsto x^2 - xy + y^2 - 1$ è un'ellisse che può anche scritta nella forma

$$\frac{1}{4}(x+y)^2 + \frac{3}{4}(x-y)^2 = 1$$

(si osservi che la massima e la minima distanza dell'insieme E dall'origine rappresentano rispettivamente la distanza di un punto che sta sulla retta $x = y$ e un punto che sta sulla retta $x = -y$ dall'origine). Per trovare l'espressione fornita sopra si imponga

$$\alpha(x + ay)^2 + (1 - \alpha)\left(x - \frac{1}{a}y\right)^2 = x^2 - xy - y^2$$

e si trovino α ed a. Il perché di questa scrittura è presto detto: se $x^2 - xy - y^2 = 1$ rappresenta un'ellisse gli assi debbono essere due rette ortogonali, quindi del tipo

$$bx + cy = d\,, \qquad b'x + c'y = d'\,.$$

Dal momento che non vi sono termini lineari in x e in y possiamo supporre $d = d' = 0$, cioè le rette passanti per l'origine. Poiché le due rette sono ortogonali si ricava che

$$b\,b' = -c\,c'\,.$$

Poiché inoltre le due rette non sono evidentemente gli assi principali possiamo supporle entrambe come grafici rispetto ad una delle due variabili. A questo punto dividendo per b la prima espressione e per b' la seconda si ricavano le espressioni (più semplici)

$$x + ay = 0\,, \qquad x + a'y = 0\,.$$

dove $a = c/b$ e $a' = c'/b'$ e da quanto ricavato sopra si deve avere che $-aa' = 1$ cioè

$$a' = -\frac{1}{a}\,.$$

Ora mettendo dei coefficienti generici, ma positivi, davanti alle due espresioni $(x + ay)$ e $(x - y/a)$ ci si rende conto che la somma dei due coefficienti deve essere 1 (il coefficiente di x^2 deve essere 1).
A questo punto si risolva l'esercizio parametrizzando l'ellisse.

Soluzione 3.49 - Provare a risolverlo anche senza l'ausilio del metodo dei moltiplicatori di Lagrange studiando le derivate di f.

Possiamo trasformare il problema nel modo seguente: studiare la funzione

$$g(x) = \langle v, x\rangle = v_1x_1 + \ldots + v_nx_n$$

limitatamente all'insieme $V = \{x \in \mathbf{R}^n \,|\, |x| = 1\} = \{x \in \mathbf{R}^n \,|\, |x|^2 = 1\}$. A questo punto introduciamo la funzione ausiliaria

$$H(x_1, \dots x_n, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} v_i x_i + \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1 \right)$$

e ne cerchiamo i punti stazionari liberi. Impondendo le derivate uguali a zero si ha

$$\frac{\partial H}{\partial x_j} = v_j + 2\lambda x_j = 0 \qquad \text{per ogni } j \text{ tra } 1 \text{ e } n$$

unite all'equazione $|x|^2 = 1$. Ricaviamo che se $v_j = 0$ necessariamente anche $x_j = 0$, se $v_j \neq 0$ si ha che anche $x_j \neq 0$ e quindi conludiamo che

$$x_k = -\frac{1}{2\lambda} v_k \qquad \text{per ogni } k \text{ tra } 1 \text{ e } n.$$

Morale: x è proporzionale a v ed è quindi del tipo $x = \alpha v$ per qualche $\alpha \in \mathbf{R}$. Poiché deve avere modulo 1 α può essere solamente 1 o -1. Abbiamo quindi che il massimo è assunto da g per $x = v$ e il minimo per $x = -v$.

Soluzione 3.50 - Cominciamo a valutare le derivate di f ed eguagliarle a zero.

$$\begin{cases} f_x(x, y, z) = 4x - 1 = 0 \\ f_y(x, y, z) = -2y = 0 \\ f_y(x, y, z) = -2z = 0 \end{cases}$$

che si annulla solo nel punto $(1/4, 0, 0)$. Controllando si può vedere che il punto appartiene all'insieme E, quindi sarà uno dei candidati ad essere massimo o minimo.
Per quanto riguarda il bordo di E abbiamo due possibilità: parametrizzare opportunamente le varie parti di ∂E oppure usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Li vediamo entrambi per confrontarli meglio.

Cominciamo parametrizzando il bordo. Innanzitutto osserviamo che

$$\begin{aligned} \partial E_1 \quad = \quad & \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\,, z \leqslant 0\} \,\cup \\ & \cup \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\,, z = 0\}\,, \end{aligned}$$

e (formalmente)

$$\begin{aligned}\partial E_2 \;&=\; \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2-(z-1)^2 = 0\,, 0 \leqslant z \leqslant 1\} \cup \\ &\quad \cup \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2-(z-1)^2 \leqslant 0\,, z = 0\} \cup \\ &\quad \cup \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2-(z-1)^2 \leqslant 0\,, z = 1\}\,.\end{aligned}$$

Se capiamo come è fatto l'insieme ci accorgiamo che $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 - (z-1)^2 \leqslant 0\,, z = 1\}$ è di fatto un solo punto (il punto $(0,0,1)$) ed è già contenuto in $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2-(z-1)^2 = 0\,, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$, quindi di fatto

$$\begin{aligned}\partial E_2 \;&=\; \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2-(z-1)^2 = 0\,, 0 \leqslant z \leqslant 1\} \cup \\ &\quad \cup \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2-(z-1)^2 \leqslant 0\,, z = 0\}\,.\end{aligned}$$

Il bordo di E però *non* è l'unione dei due bordi, visto che $\partial E_1 \cap \partial E_2$ non è vuoto ed è contenuto nella parte interna di E. Concludendo si ha

$$\begin{aligned}\partial E \;&=\; \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\,, z \leqslant 0\} \cup \\ &\quad \cup \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2-(z-1)^2 = 0\,, 0 \leqslant z \leqslant 1\}\,.\end{aligned}$$

Parametrizziamo la prima parte di ∂E con la mappa

$$\begin{aligned}&\phi : C \to \mathbf{R}^3\,, \qquad C = \{(u,c) \in \mathbf{R}^2 \mid u^2+v^2 < 1\}\,, \\ &\phi(u,v) = (u, v, -\sqrt{1-u^2-v^2})\,.\end{aligned}$$

Si ha che $f \circ \phi(u,v) = 2u^2 - v^2 - (1-u^2-v^2) - u = 3u^2 - u - 1$ e derivandola

$$\begin{cases} (f\circ\phi)_u(u,v) = 6u - 1 = 0 \\ (f\circ\phi)_v(u,v) = 0 \end{cases}$$

da cui si ricavano tutti i punti $(1/6, v)$ appartenenti a C che corrispondono ai punti $\left(\frac{1}{6}, v, -\sqrt{\frac{35}{36} - v^2}\right)$.
Consideriamo ora la mappa

$$\psi : C \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{R}^3\,, \qquad \psi(u,v) = (u, v, 1 - \sqrt{u^2+v^2})\,.$$

dove C è lo stesso definito prima e l'origine viene trascurata perché la funzione $(u, v) \mapsto \sqrt{u^2 + v^2}$ non è differenziabile in $(0, 0)$. Si ottiene

$$\begin{cases} (f \circ \psi)_u(u, v) = 2u + \dfrac{2u}{\sqrt{u^2 + v^2}} - 1 = 0 \\ (f \circ \psi)_v(u, v) = -4v + \dfrac{2v}{\sqrt{u^2 + v^2}} = 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} 2u\,\dfrac{\sqrt{u^2 + v^2} + 1}{\sqrt{u^2 + v^2}} = 1 \\ 2v\left(\dfrac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} - 2\right) = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ottiene

$$v = 0 \qquad \vee \qquad \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{1}{2}\,.$$

Dalla prima equazione di ha

$$\begin{aligned} \text{se } v = 0 \qquad & \Longrightarrow \quad 2\,u\,\frac{\sqrt{u^2} + 1}{\sqrt{u^2}} = 1 \\ & \Longleftrightarrow \quad 2\,\frac{u}{|u|}\,(|u| + 1) = 1 \end{aligned}$$

che non può essere verificata perché $u/|u|$ è 1 o -1 e $2(|u| + 1) \geqslant 2$. Ancora dalla prima equazione di ha

$$\text{se } \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad 6u = 1$$

per cui si ottengono i punti

$$\left(\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{2}\right)\,.$$

Infine rimane la parte di bordo

$$\begin{aligned} &\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\,, z = 0\} \cap \\ &\qquad \cap \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 - (z - 1)^2 = 0\,, z = 0\} \end{aligned}$$

che può essere parametrizzata da

$$\varphi(\vartheta) = (\cos\vartheta, \,\mathrm{sen}\,\vartheta, 0) \qquad \text{con } \vartheta \in [0, 2\pi]\,,$$

e

$$\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\,, z = 0\} \cap$$
$$\cap\ \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 - (z-1)^2 = 0\,, z = 1\}$$

che si riduce al punto $(0,0,1)$, che quindi andrà aggiunto alla lista dei candidati. Allora

$$\frac{d}{d\vartheta}(f \circ \varphi)(\vartheta) = \,\mathrm{sen}\,\vartheta\,(1 - 6\cos\vartheta)$$

che si annulla per $\,\mathrm{sen}\,\vartheta = 0$ e $\cos\vartheta = 1/6$. Valutiamo f nei vari candidati

$$\begin{aligned}
&f\left(\tfrac{1}{4}, 0, 0\right) = \tfrac{1}{8}\\
&f\left(\tfrac{1}{6}, v, -\sqrt{\tfrac{35}{36} - v^2}\right) = -\tfrac{39}{36}\\
&f\left(\tfrac{1}{6}, \tfrac{\sqrt{2}}{3}, \tfrac{1}{2}\right) = -\tfrac{21}{36}\\
&f\left(\tfrac{1}{6}, -\tfrac{\sqrt{2}}{3}, \tfrac{1}{2}\right) = -\tfrac{21}{36}\\
&f(1,0,0) = 1\\
&f(-1,0,0) = 3\\
&f\left(\tfrac{1}{6}, \sqrt{\tfrac{35}{36}}, 0\right) = -\tfrac{39}{36}\\
&f\left(\tfrac{1}{6}, -\sqrt{\tfrac{35}{36}}, 0\right) = -\tfrac{39}{36}\\
&f(0,0,1) = -1
\end{aligned}$$

da cui si ricavano il punto di massimo e i punti di minimo.

Vediamo ora con i moltiplicatori di Lagrange come si procede. Per quanto riguarda ∂E_1 si considera

$$H(x,y,z,\lambda) = 2x^2 - y^2 - z^2 - x + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)\,.$$

Si ha

$$\begin{cases}
4x - 1 + 2\lambda x = 0\\
-2y + 2\lambda y = 0\\
-2z + 2\lambda z = 0\\
x^2 + y^2 + z^2 = 1\,.
\end{cases}$$

Si ottiene

$$\begin{array}{rcccc} \text{II eq.} & \Longrightarrow & y=0 & \vee & \lambda = 1 \\ \text{III eq.} & \Longrightarrow & z=0 & \vee & \lambda = 1\,. \end{array}$$

Se $\lambda = 1$ dalla prima equazione si ha $x = 1/6$ da cui $y^2 + z^2 = 35/36$ e poiché $z \leqslant 0$ si ottengono i punti

$$\left(\frac{1}{6}, y, -\sqrt{\frac{35}{36} - y^2}\right) \qquad \text{con } y \in \left[-\sqrt{\frac{35}{36}}, \sqrt{\frac{35}{36}}\right].$$

Se invece $y = 0$ dalla terza equazione si ha $x^2 + z^2 = 1$. Ora se $\lambda = 1$ ritrovo i punti di prima (perché dalla prima equazione si ottiene $x = 1/6$ ecc.), se invece nella terza equazione ho $z = 0$ si ricava che $x^2 = 1$, cioè si ottengono i due punti

$$(-1, 0, 0) \quad \text{e} \quad (1, 0, 0)\,.$$

Per quanto riguarda ∂E_2 si considera

$$H(x, y, z, \lambda) = 2x^2 - y^2 - z^2 - x + \lambda(x^2 + y^2 - (z-1)^2)\,. \tag{3.4}$$

Si ha

$$\begin{cases} 4x - 1 + 2\lambda x = 0 \\ -2y + 2\lambda y = 0 \\ -2z - 2\lambda(z-1) = 0 \\ x^2 + y^2 - (z-1)^2 = 0\,. \end{cases}$$

Nuovamente si ottiene

$$\text{II eq.} \Longrightarrow \qquad y = 0 \quad \vee \quad \lambda = 1\,.$$

Allora

$$\begin{array}{lrcl} \text{se } \lambda = 1 & \text{III eq.} & \Longrightarrow & z = \dfrac{1}{2} \\ & \text{I eq.} & \Longrightarrow & x = \dfrac{1}{6} \\ & \text{IV eq.} & \Longrightarrow & (z-1)^2 = \dfrac{1}{36} + y^2 \\ & & \Longrightarrow & y = -\dfrac{\sqrt{2}}{3} \ \vee \ y = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \end{array}$$

cioè i punti

$$\left(\frac{1}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{2}\right), \qquad \left(\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{2}\right).$$

Se invece

$$y = 0 \qquad \text{IV eq.} \implies x^2 = (z-1)^2 .$$

A questo punto

$$\begin{array}{lll} \text{se } \lambda = 0 & \text{III eq.} \implies & z = 0 \\ & \text{e quindi} & x = 1 \quad \vee \quad x = -1 \\ & \text{ma anche dalla I eq.} & x = 1/4 \end{array}$$

il che è impossibile. Quindi $\lambda \neq 0$ e $y = 0$. Escludendo $x = 0$ e $z = 1$ si ricava dalla I eq. e dalla III eq. che

$$\lambda = \frac{1-4x}{2x} = -\frac{z}{z-1},$$

ma possiamo escludere tranquillamente il punto $(0, 0, 1)$ perché non soddisfa il sistema (per esempio, non soddisfa la prima equazione). Da ciò si ricava che

$$x = \frac{z-1}{2(z-2)}$$

che assieme a $x^2 = (z-1)^2$ fornisce

$$\frac{(z-1)^2}{4(z-2)^2} = (z-1)^2 \qquad \implies \qquad z = \frac{5}{2} \quad \vee \quad z = \frac{3}{2}$$

che però non ci interessano, perché pur stando sul cono, non appartengono a ∂E_2.

Ora andiamo a considerare l'intersezione dei due vincoli e quindi la funzione

$$H(x, y, z, \lambda, \mu) = 2x^2 - y^2 - z^2 - x + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \mu(x^2 + y^2 - (z-1)^2).$$

Otteniamo

$$\begin{cases} 4x - 1 + 2\lambda x + 2\mu x = 0 \\ -2y + 2\lambda y + 2\mu y = 0 \\ -2z + 2\lambda z - 2\mu(z-1) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - (z-1)^2 = 0 . \end{cases}$$

Sottraendo la V eq. dalla IV si ottiene $z^2 + (z-1)^2 = 1$ da cui $z = 0$ oppure $z = 1$. Se $z = 1$ allora necessariamente (IV eq.) $x = y = 0$, ma in tal caso la I eq. non è soddisfatta, quindi $(0, 0, 1)$ va scartato. Se $z = 0$ x e y soddisfano $x^2 + y^2 = 1$ e inoltre dalla III eq. si ricava $\mu = 0$. Conclusione: x e y devono soddisfare le equazioni

$$\begin{cases} 4x - 1 + 2\lambda x = 0 \\ -2y + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1\,. \end{cases}$$

Dalla II eq. si ricava che $y = 0$ oppure $\lambda = 1$: se $y = 0$ si ha $x = 1$ oppure $x = -1$, se $\lambda = 1$ si ha $x = 1/6$ e $y^2 = 35/36$. Concludendo si sono ottenuti i punti

$$\begin{aligned}
&\left(\tfrac{1}{4}, 0, 0\right) \qquad \text{(punto interno)} \\
&\left(\tfrac{1}{6}, v, -\sqrt{\tfrac{35}{36} - v^2}\right) \\
&\left(\tfrac{1}{6}, \tfrac{\sqrt{2}}{3}, \tfrac{1}{2}\right) \\
&\left(\tfrac{1}{6}, -\tfrac{\sqrt{2}}{3}, \tfrac{1}{2}\right) \\
&(1, 0, 0) = \\
&(-1, 0, 0) = \\
&\left(\tfrac{1}{6}, \sqrt{\tfrac{35}{36}}, 0\right) \\
&\left(\tfrac{1}{6}, -\sqrt{\tfrac{35}{36}}, 0\right)
\end{aligned}$$

ai quali va aggiunto il punto $(0, 0, 1)$. Perché?

Attenzione!!! Perché il punto $(0, 0, 1)$ non è regolare per il vincolo che definisce ∂E_2, cioè il gradiente di $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - (z-1)^2$ si annulla nel punto $(0, 0, 1)$. Per cui (si veda la teoria) tale punto andrà perso, a meno che fortuitamente non si annulli anche il gradiente di f in tale punto. Non potendo sapere se tale punto è critico per l'hamiltoniana (3.4) andremo ad aggiungerlo alla lista dei candidati.