Capitolo 4

Curve e Campi Vettoriali

Ultimo aggiornamento: 19 aprile 2004

Esercizio 4.1 - Calcolare la lunghezza della curva

$$y = \log x, \quad x \in [3/4, 4/3].$$

Esercizio 4.2 - Calcolare la lunghezza della curva

$$\begin{cases} y = x^2 \\ 3z = 2xy \end{cases}$$

dal punto $(0,0,0)$ al punto $(2,4,16/3)$.

Esercizio 4.3 - Calcolare la lunghezza della curva

$$|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1$$

parametrizzata da $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)$. Calcolare poi i versori tangente e normale (dove possibile).

Esercizio 4.4 - Calcolare la lunghezza delle curve

$$\gamma(t) = (e^{2t}, 2e^t, t), \quad t \in [0,1]$$

$$\beta(s) = (8s/3, 2s^2, 2s - 1), \quad s \in [0,1]$$

e calcolare l'angolo tra le due curve nel punto $(1,2,0)$. Calcolare inoltre l'ascissa curvilinea e i versori della terna intrinseca.

Esercizio 4.5 - Calcolare per la curva

$$\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t, \sqrt{2}e^t)$$

l'ascissa curvilinea $s(t)$ a partire dal punto $t = 0$ e riscrivere l'equazione della curva assumendo come parametro s. Calcolare quindi la terna intrinseca e provare che formano angoli costanti con l'asse z.

Esercizio 4.6 - Calcolare l'integrale della funzione

$$f(x, y) = xy$$

lungo la curva $\gamma(t) = (t, t^2)$, $t \in [0, 1]$.

Esercizio 4.7 - Calcolare l'integrale della funzione

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2$$

lungo la curva $\varrho = e^{2\vartheta}$ con $\vartheta \in (-\infty, 0]$.

Esercizio 4.8 - Calcolare la lunghezza dell'arco di cicloide

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in (0, 2\pi).$$

e calcolare l'area della regione compresa fra tale arco e la retta $y = 0$.

Esercizio 4.9 - Calcolare l'area del dominio racchiuso dalla cardioide di equazioni polari $\varrho = (1 - \cos \vartheta)$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$.

$*$ Esercizio 4.10 Calcolare

$$\int_C (-x^2 y dx + x y^2 dy)$$

dove $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$.

$*$ Esercizio 4.11 **(Problema Isodiametrico)** Dimostrare che tra tutte le curve chiuse di diametro 2, la circonferenza è quella che racchiude una regione di area massima (si tenga presente che per un insieme $A \subset \mathbf{R}^n$, si definisce il diametro tramite

$$\operatorname{diam} A = \sup_{x,y \in A} \|x - y\|).$$

Suggerimento: si osservi prima di tutto che all'insieme conviene essere convesso per racchiudere area maggiore, e quindi si ponga il sistema di coordinate in un punto della curva con un asse tangente alla curva e uno perpendicolare, e calcolare quindi l'area usando le coordinate polari.

Esercizio 4.12 - Dire se il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

è conservativo o meno e, in caso affermativo, calcolarne il potenziale.

Esercizio 4.13 - Dire se il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{2x+y}{(x^2+xy)^{2/3}}, \frac{x}{(x^2+xy)^{2/3}} + 2y \right)$$

è conservativo o meno e, in caso affermativo, calcolarne il potenziale.

Esercizio 4.14 - Dire se il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2} \right)$$

è conservativo o meno e, in caso affermativo, calcolarne il potenziale.

Esercizio 4.15 - Dimostrare che il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(\frac{2xz-y}{x^2+y^2}, \frac{x+2yz}{x^2+y^2}, \log(x^2+y^2) \right)$$

non è conservativo ma è dotato di potenziali locali.

Esercizio 4.16 - Verificare che il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{2y}{x^2+y^2+z^2} + 1, \frac{2z}{x^2+y^2+z^2} + 3 \right)$$

è conservativo e determinarne i potenziali.

Esercizio 4.17 - Verificare che il campo elettrico

$$F(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z)$$

è conservativo e a divergenza nulla e determinarne i potenziali.

Soluzioni

Soluzione 4.1 - La curva che stiamo considerando è data dalla funzione $\gamma : [3/4, 4/3] \to \mathbf{R}^2$,

$$\gamma(x) = (x, \log x);$$

quindi siccome

$$\gamma'(x) = \left(1, \frac{1}{x}\right)$$

troviamo che

$$L(\gamma) = \int_{3/4}^{4/3} |\gamma'(x)| dx = \int_{3/4}^{4/3} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx = \frac{17}{12}$$

Soluzione 4.2 - La curva che stiamo considerando può essere espressa dalla funzione $\gamma : [0, 2] \to \mathbf{R}^3$ data da

$$\gamma(x) = \left(x, x^2, \frac{2}{3}x^3\right).$$

Quindi si ottiene che $\gamma'(x) = (1, 2x, 2x^2)$, da cui

$$L(\gamma) = \int_0^2 (1 + 2x^2) dx = \frac{22}{3}.$$

Soluzione 4.3 - Il luogo dei punti che soddisfano $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1$ è quello disegnato in Figura 4.1. Valutando la derivata di γ si ottiene che in effetti per i valori $t = 0$, $t = \pi/2$, $t = \pi$, $t = 3\pi/2$, corrispondenti rispettivamente ai punti $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$, la curva non è regolare. Si ha

$$\gamma'(t) = (-3\cos^2 t \,\mathrm{sen}\, t, 3\,\mathrm{sen}^2 t \cos t)$$

'che ha modulo 0 per i valori di t sopra elencati. Il versore tangente si può trovare semplicemente dividendo $\gamma'(t)$ per il suo modulo $|\gamma'(t)|$. Valutiamo quindi il modulo:

$$|\gamma'(t)|^2 = 9\cos^4 t \,\mathrm{sen}^2 t + 9\,\mathrm{sen}^4 t \cos^2 t \qquad \Rightarrow \qquad |\gamma'(t)| = 3|\cos t \,\mathrm{sen}\, t|.$$

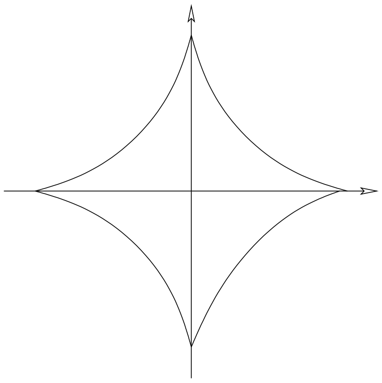

Figura 4.1:

Si ha quindi che il vettore tangente τ è dato da

$$\tau(t) = \Big(\frac{-3\cos^2 t \operatorname{sen} t}{3|\cos t \operatorname{sen} t|}, \frac{3\operatorname{sen}^2 t \cos t}{3|\cos t \operatorname{sen} t|}\Big).$$

Nel primo quadrante, ad esempio, dove sia $\operatorname{sen} t$ che $\cos t$ sono positivi, si ha

$$\tau(t) = (-\cos t, \operatorname{sen} t).$$

Derivando ulteriormente (ed eventualmente normalizzando nuovamente, ma in questo caso non è necessario perché la derivata di τ ha già norma 1) si ottiene il versore tangente ν

$$\nu(t) = \frac{d}{dt}\tau(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t).$$

Valutare τ e ν anche negli altri quadranti.

Soluzione 4.4 - Per quanto riguarda la curva γ, se calcoliamo l'ascissa curvilinea si ha che

$$s_\gamma(t) = \int_0^t \sqrt{4e^{4\tau} + 4e^{2\tau} + 1}d\tau = e^{2t} + t - 1,$$

e quindi

$$L(\gamma) = s_\gamma(1) = e^2.$$

Per la curva β, si ha che l'ascissa curvilinea è data da

$$s_\beta(t) = \int_0^t \sqrt{16\tau^2 + 16\tau + 4}d\tau = 2\tau^2 + s\tau,$$

da cui

$$L(\beta) = s_\beta(1) = 4.$$

Per calcolare l'angolo ϑ tra le due curve nel punto $(1, 2, 0)$, bisogna prima di tutto calcolare i valori di t e s per i quali $\gamma(t) = \beta(s) = (1, 2, 0)$, e poi sfruttare la formula

$$\big\langle \gamma'(t), \beta'(s) \big\rangle = |\gamma'(t)| \cdot |\beta'(s)| \cos\vartheta.$$

Si trova che $t = 0$ mentre $s = 1$, da cui

$$\cos\vartheta = 1,$$

cioè $\vartheta = 0$; questo si può ricavare direttamente osservando che $\beta'(1) = 2\gamma'(0)$, cioè i due vettori sono paralleli e con lo stesso verso.

Soluzione 4.5 - Calcoliamo l'ascissa curvilinea:

$$s(t) = \int_0^t |\gamma'(\tau)| d\tau = 2e^t - 2.$$

Quindi per poter riscrivere la curva in funzione di s, bisogna ricavarsi t e sostituire, cioè

$$\gamma(s) = \frac{s+2}{2}\left(\cos\log\left(\frac{s+2}{2}\right), \operatorname{sen}\log\left(\frac{s+2}{2}\right), \sqrt{2}\right).$$

Provare a verificare che $|\gamma'(s)| = 1$; per calcolare la terna intrinseca, il versore tangente è dato dalla velocità della curva normalizzata in modo da avere norma 1, cioè

$$\tau_\gamma(t) = \frac{1}{2}(\cos t - \operatorname{sen} t, \cos t + \operatorname{sen} t, \sqrt{2})$$

se si utilizza la parametrizzazione in t, mentre se si passa alla variabile s, si ha

$$\tau_\gamma(s) = \frac{1}{2}\left(\cos\log\left(\frac{s+2}{2}\right) - \operatorname{sen}\log\left(\frac{s+2}{2}\right), \cos\log\left(\frac{s+2}{2}\right) + \operatorname{sen}\log\left(\frac{s+2}{2}\right), \sqrt{2}\right).$$

Si noti che il versore normale altro non è che

$$\tau_\gamma(s) = \frac{d\gamma(s)}{ds}$$

che come si può facilmente notare è parallelo alla velocità della curva ed ha norma 1; si noti infatti che

$$\frac{d\gamma(s)}{ds} = \frac{d\gamma(t)}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}.$$

Per quanto riguarda il versore normale, siccome $|\tau_\gamma(s)| = 1$ per ogni s, allora se se ne fa la derivata, non cambiando il modulo, si ottiene sempre e solo la variazione del verso di tale vettore, e tale variazione è ortogonale a τ_γ stesso. Quindi ha senso definire il versore normale come tale derivata, normalizzata in modo da avere norma 1. Quindi in definitiva

$$\nu_\gamma(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(-\cos\log\left(\frac{s+2}{2}\right) - \operatorname{sen}\,\log\left(\frac{s+2}{2}\right), \\ \cos\log\left(\frac{s+2}{2}\right) - \operatorname{sen}\,\log\left(\frac{s+2}{2}\right), 0\Big).$$

La binormale b_γ è semplicemente il versore normale ad entrambi i versori precedenti ed in modo tale che $(\tau_\gamma, n_\gamma, b_\gamma)$ formino una terna sinistrorsa (come la terna cartesiana $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$). Quindi si trova che

$$b_\gamma(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\cos\log\left(\frac{s+2}{2}\right) - \operatorname{sen}\,\log\left(\frac{s+2}{2}\right), \\ \cos\log\left(\frac{s+2}{2}\right) + \operatorname{sen}\,\log\left(\frac{s+2}{2}\right), 0\Big).$$

Infine l'angolo con l'asse z è dato dai prodotti scalari

$$\begin{aligned} \langle \tau_\gamma(s), (0,0,1)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \langle \nu_\gamma(s), (0,0,1)\rangle &= 0 \\ \langle b_\gamma(s), (0,0,1)\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

che non dipendono da s.

Soluzione 4.6 - La curva è data da $\gamma(t) = (t, t^2)$, quindi $\gamma'(t) = (1, 2t)$, da cui

$$\int_\gamma f = \int_0^1 f(t,t^2)|\gamma'(t)|dt = \int_0^1 t^3\sqrt{1+4t^2}dt = \frac{5\sqrt{5}}{24} + \frac{1}{120}.$$

Soluzione 4.7 - La curva in questione è data da $\gamma(\vartheta) = (e^{2\vartheta}\cos\vartheta, e^{2\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta)$, e quindi l'integrale diventa

$$\int_\gamma f = \int_{-\infty}^0 e^{10\vartheta}\sqrt{5}d\vartheta = \frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

Soluzione 4.8 - L'arco di cicloide (si veda la Figura 4.2) può essere pensato come la curva tracciata nel piano da un punto fissato su un circonferenza che ruota sull'asse x (si pensi di fissare un punto sul copertone di una ruota di bicicletta che corre, il cui raggio è a, e di osservarne il movimento). La derivata è data da

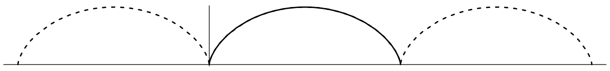

Figura 4.2:

$$\dot{x}(t) = a(1-\cos t)\,, \qquad \dot{y}(t) = a\operatorname{sen} t\ .$$

Si noti che il puntino sulla ruota è fermo per un istante ogni giro ($t = 0$ e $t = 2\pi$ nel nostro caso, ma se la bicicletta prosegue per ogni $t = 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$), mentre la componente y si annulla anche per $t = \pi$ (quando la ruota ha percorso mezzo giro). La lunghezza è data da

$$a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}dt = a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(2\operatorname{sen}^2 t/2)}dt = 2a\int_0^{2\pi}\operatorname{sen} t/2dt = 8a\,.$$

Per calcolare l'area si potrebbe passare alle coordinate polari (provare a farlo), oppure utilizzare il teorema della divergenza. Procederemo seguendo questo secondo approccio; l'area della cicloide C può essere calcolata tramite la formula

$$A(C) = \int_C dxdy = \int_C \operatorname{div} F dxdy = \int_{\partial C}\langle F, \nu_C\rangle\, ds$$

dove F è un campo vettoriale con div $F = 1$, il secondo integrale è l'integrale curvilineo calcolato sulla curva $\gamma_1\cup\gamma_2$ con $\gamma_1(t) = (t,0)$, $t\in[0,2\pi]$ e $\gamma_2(t) = a(2\pi - t + \operatorname{sen} t, 1-\cos t)$, $t\in[0,2\pi]$. Campi F con la proprietà cercata sono ad esempio $F(x,y) = \alpha x + \beta y$ con $\alpha+\beta = 1$; nel nostro caso conviene prendere $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, in modo che $F(x,y) = (0,y)$, e quindi l'itegrale curvilineo di F lungo γ_1 si annulla; resta solo il secondo integrale, che diventa

$$\int_{\gamma_2} \langle F, \nu_C \rangle \, ds = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)^2 dt = 3\pi a.$$

Soluzione 4.9 - L'area della cardioide C può essere calcolata usando le coordinate polari

$$\begin{cases} x = \varrho \cos \vartheta \\ y = \varrho \operatorname{sen} \vartheta \end{cases}$$

dove $\vartheta \in [0, 2\pi]$, mentre a ϑ fissato il raggio ϱ varia tra 0 e $\varrho(\vartheta) = (1 - \cos \vartheta)$. Quindi

$$A(C) = \int_C dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\varrho(\vartheta)} \varrho d\varrho d\vartheta = \frac{3\pi}{2}.$$

Allo stesso risultato si potrebbe giungere usando il teorema della divergenza; infatti se F è un campo vettoriale con div $F = 1$, allora

$$A(C) = \int_C dxdy = \int_C \operatorname{div} F dxdy = \int_{\partial C} \langle F, \nu_C \rangle \, ds$$

dove ν_C è la normale esterna alla cardioide e l'ultimo integrale è inteso essere l'integrale curvilineo sul bordo di C. Quindi se parametrizziamo il bordo con la curva

$$\gamma(\vartheta) = \varrho(\vartheta)(\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta) = (\cos\vartheta - \cos^2\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta),$$

$\vartheta \in [0, 2\pi]$; si ottiene quindi che

$$\gamma'(\vartheta) = (2\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta, \cos\vartheta - \cos^2\vartheta + \operatorname{sen}^2\vartheta),$$

mentre la normale esterna è data da

$$\nu_C(\vartheta) = \frac{(\cos\vartheta - \cos^2\vartheta + \operatorname{sen}^2\vartheta, 2\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta)}{\sqrt{2 - 2\cos\vartheta}},$$

da cui, siccome $|\gamma'(\vartheta)| = \sqrt{2 - 2\cos\vartheta}$,

$$A(C) = \frac{3\pi}{2}.$$

Soluzione 4.10 - L'insieme C è una curva che può essere parametrizzata tramite $\gamma(\vartheta) = R(\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta)$m $\vartheta \in [0, 2\pi]$; per calcolare l'integrale, bisogna dare significato a dx e dy. Con un passaggio che andrebbe formalizzato meglio, si può dire che se $x = R\cos\vartheta$ con R indipendente da ϑ, allora $dx = -R\operatorname{sen}\vartheta d\vartheta = -yd\vartheta$; analogamente otteniamo che $dy = R\cos\vartheta d\vartheta = xd\vartheta$. Quindi si ha che

$$\int_C (-x^2 y dx + xy^2 dy) = s\int_0^{2\pi} x^2y^2 d\vartheta = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Si poteva ottenere lo stesso risultato utilizzando il teorema della divergenza; infatti nel punto $(x, y) \in C$, la normale esterna è data da dal vettore $(x/R, y/R)$, mentre l'elemento di linea è dato da $ds = Rd\vartheta$, da cui, definendo il campo vettoriale $F(x, y) = (xy^2, x^2y)$, si ha che

$$\begin{aligned} 2\int_0^{2\pi} x^2y^2 d\vartheta &= \int_0^{2\pi} \Big\langle (xy^2, x^2y), \Big(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}\Big)\Big\rangle R d\vartheta \\ &= \int_{C=\partial B} \langle F, \nu_B\rangle \, ds = \int_B \operatorname{div} F(x, y) dxdy \\ &= \int_B (x^2 + y^2) dxdy = \frac{\pi R^4}{2}. \end{aligned}$$

Soluzione 4.11 - Data una curva chiusa $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{R}^2$, una prima osservazione da fare è che se γ racchiude una regione di area massima, allora tale regione deve essere convessa (se non lo fosse, se cioè ci fosse una regione di non convessità, si potrebbe 'tappare' tale regione convessificando l'insieme, operazione che aumenterebbe l'area della regione senza aumentare il diametro dell'insieme). Quindi, se la regione è convessa, ogni punto della curva vede ogni altro punto della curva stessa; possiamo quindi porre un sistema di coordinate centrate in un punto O della curva stessa in cui l'asse y è tangente alla curva e l'asse x è perpendicolare alla curva, diretto verso l'interno della curva. Scrivendo quindi la curva usando coordinate polari centrate in tale punto O, otterremmo

$$\{x = \varrho\cos\vartheta y = \varrho\operatorname{sen}\vartheta$$

con $\vartheta \in [-\pi/2, \pi.2]$ e a ϑ fissato, il raggio ϱ varia tra 0 e un certo raggio $\varrho(\vartheta)$. Otteniamo quindi per l'area che

$$A(\gamma) = \int_{\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\varrho(\vartheta)} \varrho d\varrho d\vartheta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\varrho(\vartheta)^2}{2} d\vartheta.$$

A questo punto notiamo che l'integrale possiamo restringerlo a $\vartheta \in [0, \pi/2]$, se oltre a $\varrho(\vartheta)^2$ consideriamo anche $\varrho(\vartheta - \pi/2)^2$, e notare infine che $\varrho(\vartheta)$ e $\varrho(\vartheta - \pi/2)$ sono i due cateti di un triangolo rettangolo la cui ipotenusa ha estremi che stanno sulla curva, e quindi la sua lunghezza è minore del diametro dell'insieme, cioè

$$\varrho(\vartheta)^2 + \varrho(\vartheta - \pi/2) \leqslant (\mathrm{diam}(\gamma))^2 \leqslant 4.$$

In definitiva, troviamo che

$$A(\gamma) \leqslant \pi,$$

e quest'ultimo altro non è che l'area del cerchi di diametro 2.

Soluzione 4.12 - Se si considera il cammino chiuso $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, si ottiene che

$$\int_\gamma F \cdot ds = \int_0^{2\pi} F(\cos t, \operatorname{sen} t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t) dt = 2\pi \,,$$

e quindi il campo risulta non essere conservativo. Otteniamo però che $\operatorname{rot} F = 0$, quindi F ammette potenziale locale ϕ; per calcolare tale potenziale bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2 + y^2} \\[2ex] \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

che ha per soluzione, integrando la prima rispetto a x e sostituendo nella seconda, la funzione

$$\phi(x, y) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) + c.$$

Il campo ammette quindi potenziale locale, ma il dominio è dato da $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ che non è semplicemente connesso; per rendere il campo conservativo, dovremmo rendere il dominio semplicemente connesso, cosa che può essere fatta se consideriamo il dominio

$$D = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geqslant 0\} \quad \text{o più in generale} \quad \mathbf{R}^2 \setminus S$$

dove S è una qualunque semiretta uscente dall'origine. Consideriamo per semplicità il dominio D: un potenziale C^1 (verificare che è C^1!) in D è dato allora dalla funzione

$$\phi = \begin{cases} -\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{y}\right) & y > 0 \\ \pi/2 & x < 0\,, y = 0 \\ -\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{y}\right) + \pi & y < 0\,. \end{cases}$$

Soluzione 4.13 - Notare che il dominio del campo è dato da

$$\mathbf{R}^2 \setminus \{(x,y) : x = 0 \text{ o } y = -x\},$$

che è semplicemente connesso anche se non connesso. Quindi per vedere se il campo è conservativo basta e serve che si abbia rot $F = 0$, cosa facilmente verificata. Per trovare il potenziale locale ϕ, bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = \dfrac{2x + y}{(x^2 + xy)^{2/3}} \\ \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = \dfrac{x}{(x^2 + xy)^{2/3}} + 2y \end{cases}$$

che ammette per soluzione la funzione

$$\phi(x,y) = 3(x^2 + xy)^{2/3} + y^2 + c$$

con la costante c che può assumere valori diversi su ogni componente connessa.

Soluzione 4.14 - È facile vedere che il dominio naturale di F è $\mathbf{R}^2$ e che le derivate incrociate sono uguali, per cui il campo è conservativo. Per valutare un potenziale utilizziamo il fatto che per un campo conservativo l'integrale $\int_\gamma F \cdot ds$ su γ cammino che unisce due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) è indipendente dal cammino γ. Possiamo fissare quindi arbitrariamente un punto, per comodità l'origine, e il poyenziale in un generico punto (x,y) sarà dato dall'integrale lungo quel cammino di F. Per semplicità scegliamo il cammino che unisce l'origine a (x,y) dato da

$$\gamma : [0,1] \to \mathbf{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = (tx, ty)\,.$$

Si ha allora

$$\begin{aligned}\phi(x,y) &= \int_\gamma F\cdot ds = \int_0^1 \Big[\frac{2tx}{1+t^2x^2+t^2y^2}x + \frac{2ty}{1+t^2x^2+t^2y^2}y\Big]dt = \\ &= \log(1+t^2x^2+t^2y^2)\Big|_0^1 = \log(1+x^2+y^2)\,.\end{aligned}$$

Soluzione 4.15 - Si noti che preso il cammino chiuso $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$ si ha

$$\int_\gamma F\cdot ds = 2\pi,$$

e quindi il campo non è conservativo. Però si ha che rot $F = 0$, e quindi il campo ammette potenzile locale, che si ricava essere

$$\phi(x,y,z) = z\log(x^2+y^2) - \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) + c.$$

Soluzione 4.16 - Il dominio è semplicemente connesso e rot $F = 0$, quindi il campo è conservativo. Il potenziale infine è dato dalla funzione

$$\phi(x,y,z) = \log(x^2+y^2+z^2) + y + 3z + c.$$

Soluzione 4.17 - Il dominio è semplicemente connesso e rot $F = 0$, quindi il campo è conservativo, e il potenziale è dato da

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} + c.$$

Si nota inoltre abbastanza immediatamente che per il campo elettrico F si ha che div $F = 0$; come per i campi vettoriali il cui rotore è nullo si dimostra che ammette un potenziale, cioè una funzione il cui gradiente è il campo, anche per i campi la cui divergenza è nulla si può dimostrare che esiste un qualche potenziale, quello che si chiama il potenziale vettore, cioè una funzione vettoriale $A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che

$$F = \text{rot } A.$$