Capitolo 5

Equazioni differenziali

ULTIMO AGGIORNAMENTO: 2 GIUGNO 2006

Equazioni lineari di primo grado

Ricordo: per le equazioni di primo grado del tipo $y' + ay = f$ (dove a e f sono noti) una soluzione è data da

$$y(t) = e^{-A(t)}\left[\int e^{A(t)} f(t)dt + c\right] \tag{5.1}$$

dove $A(t)$ è una primitiva di a.

ESERCIZIO 5.1 - Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $y' - y = -t$.

ESERCIZIO 5.2 - Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $y' - \dfrac{y}{t} = t$.

ESERCIZIO 5.3 - Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + y \operatorname{tg} t = \dfrac{\operatorname{sen} t}{1 + \operatorname{sen} t} \\ y(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Equazioni a variabili separabili

Sono equazioni del tipo $y' = f(x)g(y)$ con f e g continue. La funzione

g deve essere diversa da zero (si veda l'ESERCIZIO 5.5. Si divide per $g(y)$, si integra

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}dx = \int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx$$

dopodiché si inverte la primitiva di $1/g(y)$ in modo da esplicitare y.

ESERCIZIO 5.4 - Integrare l'equazione $y' = (1+2x)e^{-y}$.

ESERCIZIO 5.5 - Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{f'(x)}{y} \\ y(x_0) = y_0\,. \end{cases}$$

ESERCIZIO 5.6 - Integrare l'equazione $y' = x\,\dfrac{y+1}{y}$.

Equazioni di Bernoulli

Sono equazioni del tipo

$$y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha}$$

con $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ (per $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$ l'equazione è lineare). Si divide per y^{α} e si cambia variabile ponendo $v = y^{1-\alpha}$. Si ottiene

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} = ay^{1-\alpha} + b$$

che nella nuova variabile diventa lineare

$$\frac{1}{1-\alpha}v' = av + b\,.$$

ESERCIZIO 5.7 - Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = xy + x\sqrt{y} \\ \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO 5.8 - Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y} \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Equazioni di tipo omogeneo

Sono equazioni della forma $y' = f(\frac{y}{x})$ con f continua. Si risolvono con il cambio di variabile
$$z(x) = \frac{y(x)}{x}$$
che porta all'equazione a variabili separabili $z' = \frac{1}{x}(f(z) - z)$. Dividendo per $f(z) - z$ si ottiene l'equazione

$$\frac{z'}{f(z) - z} = \frac{1}{x}\,.$$

Deve essere quindi $f(z) \neq z$ il che significa $f(\frac{y}{x}) \neq \frac{y}{x}$, ma nel caso $f(\frac{y}{x}) = \frac{y}{x}$ l'equazione si risolve direttamente. Se si ha una condizione iniziale $y(x_0) = y_0$ si deve avere $x_0 \neq 0$.

ESERCIZIO 5.9 - Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x}{y} + 2\dfrac{y}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Alcune equazioni di secondo grado

In generale le equazioni di secondo gardo in forma normale sono della forma $y'' = f(x, y, y')$. Vedremo casi particolari:

1. $y'' = f(x)$,
2. $y'' = f(y)$,
3. $y'' = f(x, y')$,
4. $y'' = f(y, y')$.

Si osservi che in realtà questi quattro esempi sono due, in quanto il caso 1. è un caso particolare di 3. e il caso 2. è un caso particolare di 4.. Vediamo come risolverle (si vedano anche i quattro esercizi che seguono).

1. Questo è l'esempio più semplice, è sufficiente integrare.

2. Si può utilizzare il metodo spiegato al punto 4. oppure più semplicemente moltiplicare l'equazione per $2y'$ (y' deve essere diversa da zero, quindi se si risolve un problema di Cauchy si deve avere $y'(x_0) \neq 0$). A questo punto si ottiene $2y'y''$ che può essere visto come $\frac{d}{dx}(y')^2$. Supponendo di dover risolvere ($y_1 \neq 0$)
$$\begin{cases} y'' = f(y) \\ y'(x_0) = y_1 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$
si ottiene
$$\frac{d}{dx}(y'(x))^2 = 2f(y(x))y'(x)$$
e integrando fra x_0 e x si ottiene
$$(y'(x))^2 = y_1^2 + 2\int_{y_0}^{y(x)} f(s)ds\,.$$
Se $y_1 > 0$ si considera $y'(x) = \sqrt{y_1^2 + 2\int_{y_0}^{y(x)} f(s)ds}$, se $y_1 < 0$ invece $y'(x) = -\sqrt{y_1^2 + 2\int_{y_0}^{y(x)} f(s)ds}$. In entrambi i casi l'equazione è a variabili separabili.

3. È di fatto un'equazione del prim'ordine in y'.

4. Si effettua il cambio di variabile $p(y) = y'$ (attenzione! p dipende da y, cioè y viene vista come variabile indipendente, anche se poi sostituendo a y la funzione $y(x)$ si ha $p(y(x)) = y'(x)$). Si ottiene derivando rispetto a x
$$\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$
espressione che sostituita nell'equazione fornisce
$$p' = \frac{1}{p}f(y,p)$$
dove però il segno $'$ a sinistra denota la derivata di p rispetto alla variabile y (e non rispetto alla variabile x!). Si integra, se si può, nella variabile y e una volta trovata p si integra $y'(x) = p(y(x))$.

Le soluzioni di equazioni del tipo 4. (e quindi anche del tipo 2.) non sempre sono esprimibili in maniera esplicita (si veda la soluzione dell'ESERCIZIO 5.31).

ESERCIZIO 5.10 - Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = \operatorname{sen} x \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO 5.11 - Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = y^2 \\ y'(2) = \sqrt{2/3} \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO 5.12 - Si integri la seguente equazione

$$y'' = \frac{1}{x} y' + x^2 \operatorname{sen} x$$

ESERCIZIO 5.13 - Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = yy' \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Equazioni lineari a coefficienti costanti

Sono le equazioni del tipo

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f \, . \tag{5.2}$$

Prima si risolve l'equazione omogenea

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{5.3}$$

trovando le soluzioni $\lambda_i \in \mathbf{C}$ di (si vedano le dispense di teoria)

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

cosicché il polinomio potrà essere scritto anche

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n) .$$

Denotando con D l'operatore differenziale $\frac{d}{dx}$ possiamo riscrivere l'equazione (5.3) come segue

$$P(D)y = (D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0)y = 0 \tag{5.4}$$

cioè l'espressione $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y$ può essere vista come un polinomio nella "variabile" D applicato ad una funzione y cosicché, una volta trovate le radici λ_i di P, si potrà scrivere

$$P(D)y = (D - \lambda_1) \dots (D - \lambda_n)y$$

Per trovare l'espressione generale della soluzione all'equazione non omogenea può essere applicato il metodo della varizione delle costanti o dei parametri (si veda, ad esempio, l'Esercizio 5.19).
Tuttavia in qualche caso si può risparmiare lavoro (esempi nell'Esercizio 5.20, Esercizio 5.21, Esercizio 5.22) se ci si rende conto che il dato f è soluzione di un'equazione a coefficienti costanti, cioè esistono $b_i \in \mathbf{R}$, $i = 0, \dots m-1$, tali che $f^{(m)} + \dots + b_1 f' + b_0 f = 0$, cioè, denotando con $Q(\lambda)$ il polinomio $\lambda^m + \dots + b_1\lambda + b_0 f$, possiamo scrivere

$$Q(D)f = 0 .$$

Supponendo allora che y sia una soluzione di (5.2) si avrà

$$P(D)y = f \qquad \Rightarrow \qquad Q(D)[P(D)y] = (Q(D)P(D))y = 0$$

che è come dire che y è soluzione di un'equazione omogenea di grado $n+m$. Denotate con $\lambda_{n+1}, \dots \lambda_{n+m}$ le radici del polinomio Q si può scrivere

$$(Q(D)P(D))y = (D - \lambda_1) \dots (D - \lambda_n)(D - \lambda_{n+1}) \dots (D - \lambda_{n+m})y = 0 .$$

Trovate tutte le radici si può cercare y tra le soluzioni della precedente equazione omogenea (attenzione! e non tra le soluzioni dell'equazione $Q(D)y = 0$, si veda l'Esercizio 5.22 per un esempio).

Esercizio 5.14 - Trovare le soluzioni di $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Esercizio 5.15 - Trovare le soluzioni di $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Esercizio 5.16 - Trovare le soluzioni di $y'' + 6y' + 10y = 0$.

Esercizio 5.17 - Trovare le soluzioni di $y''' - 7y' + 6y = 0$.

Esercizio 5.18 - Trovare la soluzione di

$$\begin{cases} y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0 \\ y''(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

Esercizio 5.19 - Trovare le soluzioni di $y'' + y = \dfrac{1}{\cos t}$.

Esercizio 5.20 - Trovare le soluzioni di $y^{(4)} - 16y = x^2 + 1$.

Esercizio 5.21 - Trovare le soluzioni di $y'' - 5y' + 6y = xe^x$.

Esercizio 5.22 - Risolvere $y'' + y = \operatorname{sen} t$.

Esercizi di vario genere

Esercizio 5.23 - Si integri l'equazione $y' = (x + 2y - 1)^2$.

Esercizio 5.24 - Si integri l'equazione $y' = \dfrac{xy^2 - 4x^3 + y^3}{xy^2}$.

Esercizio 5.25 - Data l'equazione differenziale

$$(x+1)y' + 3y + (1 - x^2)y^2 = 0$$

stabilire se esiste ed è unica la soluzione $y : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ tale che $\lim\limits_{x \to 0^+} y(x) = +\infty$.

Esercizio 5.26 - Determinare, se ne esistono, le soluzioni limitate all'equazione

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{2+x} \qquad x > 0\,.$$

Esercizio 5.27 - Determinare tutte le soluzioni limitate dell'equazione

$$y' - y + y^3 = 0\,.$$

Esercizio 5.28 - Data l'equazione differenziale

$$y'' - 2y' - 8y = 2xe^{-x}$$

i) determinarne la soluzione generale,

ii) caratterizzare le soluzioni y tali che $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$,

iii) caratterizzare le soluzioni tali che $\int_0^{+\infty} |y(x)|dx < +\infty$.

Esercizio 5.29 - Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\operatorname{sen} y^2}{y} \\ y(0) = \sqrt{\pi/2} \end{cases}$$

Esercizio 5.30 - Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2yy'' - y'^2 - 1 = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 5.31 - Si integri $y^5 y'' = 1$.

Esercizio 5.32 - Si integri $y' = g\Big(\dfrac{ax + by + c}{dx + ey + f}\Big)$.

Esercizio 5.33 - Si integri $y' = \dfrac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5}$.

Esercizio 5.34 - Si integri $y' = \dfrac{4x - y + 7}{2x + y - 1}$.

Esercizio 5.35 - Posta $f(x) = \operatorname{sen} x$ per $x \in (0, \pi)$, $f(x) = 0$ altrimenti determinare la soluzione del problema

$$\begin{cases} y'' + y = f & x > 0 \\ y'(0) = 3/2 \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

Esercizio 5.36 - Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{1+2x}{\cos y} \\ \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 5.37 - Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (x + y'(x))^2 - x - y''(x) - 1; \\ \\ y(0) = 0; \\ \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

Esercizio 5.38 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{x^2 + y^2(x)}{xy(x)}.$$

Esercizio 5.39 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$4y'(x) + y(x) = y^3(x)(x^3 - 4x).$$

Esercizio 5.40 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y^{(4)}(x) - 2y^{(3)}(x) + 2y^{(2)}(x) - 2y'(x) + y(x) = 0.$$

Esercizio 5.41 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y^{(3)}(x) = \frac{y^{(2)}(x)}{(x+1)^3}.$$

Esercizio 5.42 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y(x)y''(x) - (y'(x))^2 = y^4(x).$$

Esercizio 5.43 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$(1 + x^2)y'(x) + xy(x) = \frac{1}{(1 + x^2)}.$$

Esercizio 5.44 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{2}{x}y(x) + \frac{x+1}{x}.$$

Esercizio 5.45 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'(x)(1-x^2) - xy(x) - xy^2(x) = 0.$$

Esercizio 5.46 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{6x} + \frac{x}{y^5(x)}.$$

Esercizio 5.47 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y(x)e^{2x} - (1+e^{2x})y'(x) = 0.$$

Esercizio 5.48 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$e^{x+y(x)}y'(x) + x = 0.$$

Esercizio 5.49 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{x^3 + y^3(x)}{xy^2(x)}.$$

Esercizio 5.50 - Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = -\dfrac{x}{y'(x)} \\ \\ y'(0) = 1 \\ \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 5.51 - Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} (x+1)y''(x) - (x+2)y'(x) + x + 2 = 0 \\ \\ y'(0) = 1 \\ \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 5.52 - Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y(x)y''(x) = y^2(x)y'(x) + y'(x)^2 \\ \\ y'(0) = 1 \\ \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 5.53 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y(x)y''(x) - y'(x)(1 + y'(x)) = 0.$$

Esercizio 5.54 - Utilizzando il metodo delle variazioni delle costanti, risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy''(x) - xy'(x) = 3x^2 \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 5.55 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$2y''(x) - y'(x) - y(x) = 4xe^{2x}.$$

Esercizio 5.56 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y''(x) + y(x) = x \operatorname{sen} x.$$

Esercizio 5.57 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$\frac{y'(x) - y(x)}{y''(x)} = 3.$$

Esercizio 5.58 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = xe^x \cos 2x - x^2 e^x \operatorname{sen} 2x.$$

Esercizio 5.59 - Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + 4y(x) = \cos x \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 5.60 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y''(x) + y(x) = 2x \cos x \cos 2x.$$

Esercizio 5.61 - Utilizzando il metodo della variazione delle costanti, risolvere la seguente equazione differenziale

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \frac{e^{-x}}{x}.$$

Esercizio 5.62 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y''(x) - 2y(x) = 4x^2 e^{x^2}.$$

Esercizio 5.63 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y^{(3)}(x) + y^{(2)}(x) = x^2 + 1 + 3xe^x.$$

Esercizio 5.64 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y^{(4)}(x) - 2y^{(3)}(x) + y^{(2)}(x) = x^3.$$

Esercizio 5.65 - Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{(3)}(x) + 2y^{(2)}(x) + 2y'(x) + y(x) = x \\ \\ y(0) = y'(0) = y^{(2)}(0) = 0. \end{cases}$$

Soluzioni

Soluzione 5.1 - Usando l'espressione (5.1) calcoliamo prima una primitiva di $a(t) = -1$, $A(t) = -t$, poi

$$y(t) = e^t\Big[-\int e^{-t}tdt + c\Big] = ce^t + t + 1\,.$$

Si osservi che i grafici non si intersecano (disegnare i grafici di $ce^t + t + 1$ al variare di c); infatti considerando $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ si ha che $c_1e^t+t+1 = c_2e^t+t+1$ per qualche t solo se $c_1 = c_2$. Ciò è dovuto al fatto che l'equazione, fissato un dato valore di y in un punto t_0, ha soluzione unica.

Soluzione 5.2 - Usando l'espressione (5.1) calcoliamo prima una primitiva di $a(t) = -1/t$, che è continua in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $A(t) = -\log|t|$, infine

$$y(t) = e^{\log|t|}\Big[\int e^{-\log|t|}tdt + c\Big] = |t|\ \Big[\int t/|t|dt + c\Big] = |t|(|t| + c)$$

definite in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$ (si veda la Figura 5.1). Poiché a non è continua in 0 l'equazione non si può risolvere con un dato iniziale

$$y(0) = x_0\,.$$

Si osservi però che, poiché il limite per $t \to 0^+$ e $t \to 0^-$ delle soluzioni

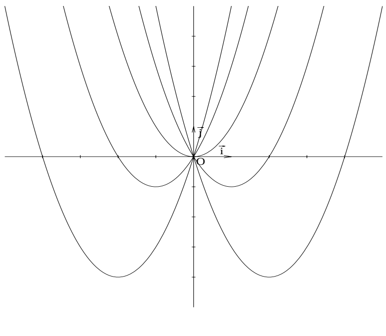

Figura 5.1:

è zero, nel caso in cui x_0 sia 0, si possono cercare soluzioni C^1 su tutto $\mathbf{R}$ scegliendo

$$y_c(t) = \begin{cases} |t|(|t| - c) = t^2 + ct & t \in (-\infty, 0) \\ |t|(|t| + c) = t^2 + ct & t \in (0, \infty)\,. \end{cases}$$

Si osservi che tutte queste sono soluzioni del problema con dato iniziale nullo in $t = 0$, quindi poiché a non è continua in zero il problema di Cauchy non ha soluzione con dato iniziale definito per $t = 0$ oppure se ha soluzione questa può non essere unica (in questo caso infinite).

Soluzione 5.3 - Questo problema ha una sola soluzione. Valutiamo prima una primitiva di $a(t) = \operatorname{tg} t$:

$$\int \operatorname{tg} t dt = \int \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} dt = -\log|\cos t|\,.$$

Si osservi che $\log|\cos t|$ è definita per $\cos t \neq 0$ ed è quindi continua negli intervalli $(-\pi/2, \pi/2)$, $(\pi/2, 3\pi/2)$ e così via (in tutti gli intervalli del tipo $((2k+1)\pi/2, (2k+3)\pi/2)$ con $k \in \mathbf{Z}$). Poiché siamo interessati a trovare una soluzione in un intorno di $t = 0$ consideriamo come primitiva di $\operatorname{tg} t$ la funzione $-\log\cos t$ perché intorno a $t = 0$ il coseno è positivo.
Ora valutiamo

$$\int e^{-\log\cos t} \frac{\operatorname{sen} t}{1 + \operatorname{sen} t} dt = \int \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t(1 + \operatorname{sen} t)} dt\,.$$

Ponendo $z = \operatorname{sen} t$ l'integrale diviene

$$\int \frac{z}{(1-z^2)(1+z)} dz\,.$$

Scrivendo

$$\frac{z}{(1-z^2)(1+z)} = \frac{z}{(1-z)(1+z)^2} = \frac{a}{1+z} + \frac{b}{(1+z)^2} + \frac{c}{1-z}$$

si ottiene

$$\frac{z}{(1-z^2)(1+z)} = \frac{1}{4(1+z)} - \frac{1}{2(1+z)^2} + \frac{1}{4(1-z)}$$

per cui integrando si ottiene

$$\frac{1}{4}\log|1+z| + \frac{1}{4}\log|1-z| + \frac{1}{2(1+z)}$$

per cui

$$\int \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t(1 + \operatorname{sen} t)} dt = \frac{1}{4}\log\frac{1 + \operatorname{sen} t}{1 - \operatorname{sen} t} + \frac{1}{2}\frac{1}{1 + \operatorname{sen} t} + c$$

e quindi infine

$$
\begin{aligned}
y(t) &= e^{\log\cos t}\Big[\frac{1}{4}\log\frac{1+\operatorname{sen} t}{1-\operatorname{sen} t}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+\operatorname{sen} t}+c\Big] = \\
&= \frac{1}{4}\cos t\log\frac{1+\operatorname{sen} t}{1-\operatorname{sen} t}+\frac{1}{2}\frac{\cos t}{1+\operatorname{sen} t}+c\cos t\,.
\end{aligned}
$$

Per trovare *la* soluzione valuto $y(0)$ e impongo che valga $1/2$:

$$y(0)=\frac{1}{2}+c=\frac{1}{2}$$

da cui $c=0$. La soluzione è

$$y(t)=\frac{1}{4}\cos t\log\frac{1+\operatorname{sen} t}{1-\operatorname{sen} t}+\frac{1}{2}\frac{\cos t}{1+\operatorname{sen} t}\,.$$

Si calcoli il limite per $t\to\frac{\pi}{2}^-$ e $t\to-\frac{\pi}{2}^+$ di y e della sua derivata.

Soluzione 5.4 - Dividendo per e^{-y} si ottiene

$$e^y y'=1+2x\,.$$

Integrando

$$\int e^y dy=\int(1+2x)dx$$

da cui

$$e^y=x+x^2+c$$

per cui le soluzioni sono $y(x)=\log(x+x^2+c)$.

Soluzione 5.5 - Denotiamo con $g(y)$ la funzione $\frac{1}{y}$ che è continua in $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Questo significa che il problema può essere risolto se $y\neq 0$, cioè per un dato iniziale $y(x_0)\neq 0$.
Si ha semplicemente $yy'=f'(x)$ da cui

$$y^2(x)=2\,f(x)+c\,.$$

Se $y_0\neq 0$ ricavando c da $y_0^2=2\,f(x_0)+c$ si ottiene che la soluzione è

$$y(x)=\begin{cases}\sqrt{2f(x)+y_0^2-2f(x_0)} & \text{se } y_0>0\\ -\sqrt{2f(x)+y_0^2-2f(x_0)} & \text{se } y_0<0\end{cases}$$

Si osservi che la funzione $h(y) = y^2$ non è invertibile nel punto $y = 0$ (e g non è definita in $y = 0$). Questo fa sì che non si possa ricavare $y(x)$ se il dato iniziale è $y(x_0) = 0$, perlomeno in maniera unica.
A titolo di esempio, vediamo un problema con il dato iniziale $y_0 = 0$ il quale potrebbe comunque avere soluzione anche se $g(y)$ non è continua in 0, ma si perde l'unicità. Si consideri

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2x^3}{y} \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

L'equazione ha come soluzioni x^2 e $-x^2$ definite in $(-\infty)$ e in $(0, +\infty)$. Poiché queste soluzioni in 0 valgono 0 e il limite in 0 delle loro derivate è zero si possono prolungare le soluzioni anche in zero scegliendo una soluzione nell'intervallo $(-\infty)$ raccordandola con un'altra soluzione definita nell'intervallo $(0, +\infty)$. Si avrebbe che le seguenti quattro funzioni soddisfano il precedente problema di Cauchy

$$y_1(x) = \begin{cases} x^2 & x \geqslant 0 \\ x^2 & x < 0\,. \end{cases} \qquad y_2(x) = \begin{cases} -x^2 & x \geqslant 0 \\ x^2 & x < 0\,. \end{cases}$$
$$y_3(x) = \begin{cases} x^2 & x \geqslant 0 \\ -x^2 & x < 0\,. \end{cases} \qquad y_4(x) = \begin{cases} -x^2 & x \geqslant 0 \\ -x^2 & x < 0\,. \end{cases}$$

Soluzione 5.6 - Dividendo per $(y + 1)/y$ (cosa che si può fare solo se $y \neq -1$ visto che questa funzione si annulla per $y = -1$) e integrando si ha

$$\int \frac{y}{y+1} dy = \int x dx \qquad \text{se } y \neq -1$$

che fornisce l'espressione

$$y(x) - \log|1 + y(x)| = \frac{x^2}{2} + c\,.$$

Questo se $y \neq -1$. Se $y(x)$ fosse -1 per un qualche valore di x si ha che l'equazione $y' = x\ \frac{y+1}{y}$ in quel punto diventa

$$y' = 0\,.$$

Quindi $y(x) \equiv -1$ è soluzione dell'equazione (che non viene trovata con il metodo precedente poiché si è diviso $\frac{y+1}{y}$).

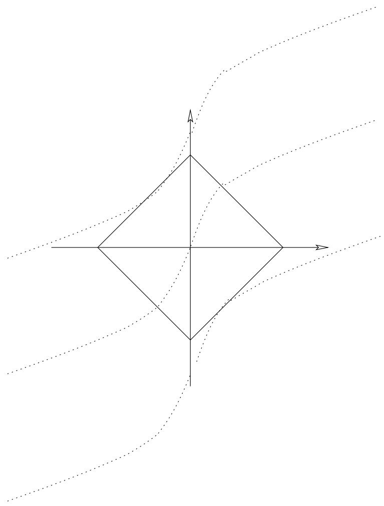

Figura 5.2:

Si osservi inoltre che la funzione $g(t) = t - \log|1+t|$ non è invertibile in un intorno di $y = 0$ (si veda il grafico in Figura 5.2). Quindi se si avesse un problema di Cauchy con $y_0 \neq -1$, $y_0 \neq 0$

$$\begin{cases} y' = x\ \dfrac{y+1}{y} \\ \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

la soluzione sarebbe data, in forma implicita, da $y(x) - \log|1+y(x)| = \frac{x^2}{2} + c$ con la condizione

$$y_0 - \log|1+y_0| = \frac{x_0^2}{2} + c$$

dalla quale si ricava il valore di c. Formalmente (perché in questo caso non è semplice invertire $g(t) = t - \log|1+t|$) la soluzione sarebbe

$$y(x) = g^{-1}\Big(\frac{x^2}{2} + c\Big)\,,$$

dove g è invertibile, ma ci si accontenta della forma implicita. Se $y_0 = -1$ la soluzione è data da

$$y(x) = -1\,.$$

Soluzione 5.7 - Dividendo per $\sqrt{y}$ si ottiene

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} = x\sqrt{y} + x$$

e ponendo $v = \sqrt{y}$ si ha l'equazione

$$2v' - xv = x\,.$$

La soluzione è

$$e^{-\int x/2dx}\Big[\int e^{\int t/2dt}\frac{t}{2}dt + c\Big]$$

da cui si ricava

$$v(x) = e^{x^2/4}\Big[-e^{-x^2/4} + c\Big] = -1 + ce^{x^2/4}\,.$$

Di conseguenza ($v(x) = \sqrt{y(x)}$)

$$y(x) = \Big[ce^{x^2/4} - 1\Big]^2\,.$$

La condizione iniziale la si ricava imponendo

$$y(1) = \Big[ce^{1/4} - 1\Big]^2 = 1$$

da cui $c = 2e^{-1/4}$.

Soluzione 5.8 - Anche questa è di Bernoulli con $a(x) \equiv 0$. Dividendo per $\sqrt{y}$ si ottiene $y'/\sqrt{y} = 1$ e ponendo $v = y^{1-1/2} = \sqrt{y}$ si ottiene

$$v' = \frac{1}{2}\,, \qquad v(1) = \sqrt{2}\,.$$

Risolvendo si ha $v(x) = \frac{1}{2}x + c$ e imponendo la condizione iniziale si ottiene $c = \sqrt{2} - 1/2$. Elevando al quadrato

$$y(x) = \frac{1}{4}x^2 + \Big(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\Big)x + \Big(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\Big)^2$$

Soluzione 5.9 - L'equazione è del tipo $y' = f(y/x)$ con $f(z) = \frac{1}{z} + 2z$. Effettuando il cambio di variabile si ottiene l'equazione

$$z' = \frac{1}{x}\Big(\frac{1}{z} + z\Big)$$

e separando le variabili

$$z' \frac{z}{1+z^2} = \frac{1}{x}$$

che integrata fornisce

$$\frac{1}{2}\log(1+z^2) = \log x + c$$

da cui, ponendo $c = \log\alpha$ con $\alpha > 0$,

$$z^2 = \alpha^2 x^2 - 1\,.$$

La condizione iniziale per y si trasforma per la funzione z come segue

$$z(x_0) = \frac{y(x_0)}{x_0} = \frac{y(1)}{1} = 1 > 0$$

per cui fra le due possibili soluzioni si scelga quella che per $x = 1$ possa assumere il valore 1, cioè quella positiva

$$z(x) = \sqrt{\alpha^2 x^2 - 1}$$

e non $z(x) = -\sqrt{\alpha^2 x^2 - 1}$. A questo punto si ricavi il valore di α imponendo

$$1 = z(1) = \sqrt{\alpha^2 - 1}$$

da cui $\alpha = \sqrt{2}$. La soluzione è allora $y(x) = x\sqrt{2x^2 - 1}$.

Soluzione 5.10 - Integrando fra 0 e x si ottiene $y'(x) = 1 - \cos x + \cos 0 = 2 - \cos x$ e integrando nuovamente fra 0 e x si ottiene $y(x) = 1 + 2x - \operatorname{sen} x$.

Soluzione 5.11 - Moltiplichiamo per $2y'$, integriamo e otteniamo

$$y'(x) = \sqrt{\frac{2}{3} + \int_1^{y(x)} 2s^2 ds} = \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{2}{3}(y(x))^3 - \frac{2}{3}}$$

per cui separando le variabili

$$\frac{y'}{y^{3/2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,.$$

Integrando fra 2 e x

$$\int_2^{y(x)} \frac{y'(x)}{(y(x))^{3/2}} dx = \sqrt{\frac{2}{3}}\,(x-2)$$

cioè

$$-2\frac{1}{\sqrt{y(x)}}+2=\sqrt{\frac{2}{3}}\,(x-2)$$

da cui si ricava

$$y(x)=\frac{9}{(3-(x-2))^2}\,.$$

Soluzione 5.12 - Sostituendo v al posto di y' si ottiene l'equazione del primo ordine

$$v'-\frac{1}{x}v=x^2\operatorname{sen}x$$

che si integra con usando la formula (5.1) che fornisce

$$\begin{aligned}
v(x) &= e^{-\int[-\frac{1}{x}]dx}\Big[\int e^{\int[-\frac{1}{x}]dx}x^2\operatorname{sen}x\;dx+c\Big]= \\
&= |x|\Big[\int\frac{1}{|x|}x^2\operatorname{sen}x\;dx+c\Big]= \\
&= |x|\Big[\int|x|\operatorname{sen}x\;dx+c\Big]= \\
&= -x^2\cos x+x\operatorname{sen}x+c|x|\,.
\end{aligned}$$

A questo punto è sufficiente integrare l'equazione

$$y'(x)=v(x)=-x^2\cos x+x\operatorname{sen}x+c|x|$$

che fornisce l'espressione generale della soluzione dell'equazione

$$y(x)=-x^2\operatorname{sen}x-3x\cos x+3\operatorname{sen}x+c\frac{x|x|}{2}+c'\,.$$

Soluzione 5.13 - Ponendo $p(y)=y'$ si perviene all'equazione

$$p'=y\,.$$

Integriamo: anziché considerare una generica primitiva si può integrare fra estremi definiti. Partendo dai valori in $x_0=0$ si ha

$$\int_{y'(0)}^{p}p'(y)dy\Big(=\int_{y'(0)}^{p}dt\Big)=\int_{y(0)}^{y}zdz$$

cioè
$$p - 1 = \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}\,.$$
Ora sostituendo a p y' si ha
$$y' = \frac{y^2 + 1}{2}\,.$$
Integrando nuovamente (separando le variabili)
$$\int_{y(0)}^{y(x)} \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^x \frac{1}{2}dt$$
si ottiene
$$\operatorname{arctg} y(x) - \operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{2}x$$
da cui infine si ricava
$$y(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Soluzione 5.14 - La soluzione è $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^t$.

Soluzione 5.15 - Il polinomio $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ ha come soluzione -2 (con molteplicità due). La soluzione è $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}$.

Soluzione 5.16 - Il polinomio $\lambda^2 + 6\lambda + 10$ ha soluzioni complesse per cui la soluzione generale ha la forma $y(t) = c_1 e^{-3t}\cos 2t + c_2 e^{-3t}\operatorname{sen} 2t$.

Soluzione 5.17 - La soluzione è $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-3t}$.

Soluzione 5.18 - Si consideri il polinomio carattersistico
$$P(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda - 8$$
che si annulla per $\lambda = 2$. Dividendo il polinomio per $\lambda - 2$ si ottiene che
$$P(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 4)\,.$$
Quindi la soluzione generale è della forma
$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 \cos 2t + c_3 \operatorname{sen} 2t\,.$$

Valutando le derivate prima e seconda di y e valutandole per $t = 0$ si ottiene

$$\begin{cases} y''(0) = 4c_1 - 4c_2 = 1 \\ y'(0) = 2c_1 + 2c_3 = 0 \\ y(0) = c_1 + c_2 \end{cases}$$

da cui si ricava che la soluzione è $y(t) = \dfrac{1}{8}e^{2t} - \dfrac{1}{8}\cos 2t - \dfrac{1}{8}\,\mathrm{sen}\, 2t$.

Soluzione 5.19 - La soluzione generale dell'omogenea è $c_1 \cos t + c_2 \,\mathrm{sen}\, t$. Utilizzando il metodo della variazione dei parametri, cerco una soluzione all'equazione data del tipo

$$y(t) = a(t)\cos t + b(t)\,\mathrm{sen}\, t$$

con a, b funzioni da determinarsi. Inserendo quest'espressione nell'equazione arriviamo all'equazione $y''(t) + y(t) = -a'(t)\,\mathrm{sen}\, t + b'(t)\cos t = \frac{1}{\cos t}$. Risolvo quindi il sistema

$$\begin{cases} a'(t)\cos t + b'(t)\,\mathrm{sen}\, t = 0 \\ -a'(t)\,\mathrm{sen}\, t + b'(t)\cos t = \dfrac{1}{\cos t}\,. \end{cases}$$

Ricavando a' dalla prima equazione e sostituendo nella seconda si ottiene l'equazione $b'(t) = 1$, da cui

$$\begin{cases} b(t) = t \\ a(t) = \log|\cos t|\,. \end{cases}$$

Quindi la soluzione generale dell'equazione è

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \,\mathrm{sen}\, t + \cos t \log|\cos t| + t\,\mathrm{sen}\, t$$

con $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.

Soluzione 5.20 - Il polinomio caratteristico $P(\lambda) = \lambda^4 - 16$ si annulla per $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 2i$, $\lambda_4 = -2i$. La famiglia delle soluzioni dell'equazione omogenea

$$P(D)y = (D^4 - 16)y = 0$$

è allora

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos 2x + c_4 \,\mathrm{sen}\, 2x\,.$$

Anziché usare il metodo della variazione dei parametri (per esercizio risolvere l'equazione anche con questo metodo) possiamo più semplicemente osservare che un polinomio che annulla il dato $f(x) = x^2 + 1$ è $Q(D) = D^3$, infatti

$$Q(D)f = D^3 f = \frac{d^3}{dx^3}(x^2 + 1) = 0$$

(in generale un polinomio di grado $n - 1$ è annullato dal polinomio $Q(D) = D^n$). La soluzione generale di

$$D^3(D^4 - 16)y = 0$$

è del tipo

$$c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos 2x + c_4 \operatorname{sen} 2x + c_5 + c_6 x + c_7 x^2 \, .$$

Cerchiamo quindi una soluzione all'equazione non omogenea del tipo $c_5 + c_6 x + c_7 x^2$. Quindi imponendo

$$(D^4 - 16)(c_5 + c_6 x + c_7 x^2) = x^2 + 1$$

si ottengono $c_5 = c_7 = -\frac{1}{16}$ e $c_6 = 0$. Per concludere la soluzione generale è $c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos 2x + c_4 \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} x^2$.

Soluzione 5.21 - Il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$ che ha come radici 2 e 3 e l'equazione omogenea può essere scritta $(D^2 - 5D + 6)y = (D - 2)(D - 3)y = 0$ (da cui le soluzioni dell'omogenea sono del tipo $k_1 e^{2x} + k_2 e^{3x}$). Usando il metodo della variazione delle costanti o dei parametri cerchiamo soluzioni del tipo $c_1(x) e^{2x} + c_2 e^{3x}$ (c_1 e c_2 funzioni incognite). Si perviene al sistema di equazioni

$$\begin{cases} c_1' e^{2x} + c_2' e^{3x} = 0 \\ 2c_1' e^{2x} + 3c_2' e^{3x} = x e^x \, . \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene $c_1' = -c_2' e^x$ da cui, usando la seconda equazione, si ottiene l'espressione $c_2' = x e^{-2x}$. Quest'equazione risolta fornisce

$$c_2(x) = -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + k_1$$

tramite la quale si trova anche

$$c_1(x) = x e^x + e^{-x} + k_2 \, .$$

Inserendo c_1 e c_2 nell'espressione generale si ottiene

$$(xe^x + e^{-x} + k_2)e^{2x} + (-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + k_1)e^{3x} = k_1e^{3x} + k_2e^{2x} + \frac{3}{4}e^x + \frac{1}{2}xe^x\,.$$

Possiamo evitare di usare questo metodo se osserviamo che

$$(D-1)e^x = 0 \qquad \text{e} \qquad (D-1)^2xe^x = (D-1)(D-1)xe^x = 0$$

(si osservi che in generale $(D-1)^{k+1}x^ke^x = 0$). Per cui la soluzione può essere cercata fra le soluzioni dell'equazione, detto $Q(\lambda)$ il polinomio $(\lambda-1)^2$,

$$Q(D)P(D)y = (D-1)^2(D^2-5D+6)y = 0\,.$$

Il polinomio $Q(\lambda)P(\lambda)$ ha come radici 2, 3, e 1, quest'ultima con molteplicità due. Per cui la soluzione $y(x)$ avrà la forma

$$c_1e^{3x} + c_2e^{2x} + c_3e^x + c_4xe^x\,.$$

Applicando $P(D)$ a questa funzione si ottiene

$$(2c_3 - 3c_4)e^x + 2c_4xe^x = xe^x$$

da cui si ricava che $c_4 = 1/2$ e $c_3 = 3/4$. Per cui la famiglia di soluzioni è data, al variare di $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$, da

$$c_1e^{3x} + c_2e^{2x} + \frac{3}{4}e^x + \frac{1}{2}xe^x\,.$$

Soluzione 5.22 - Le soluzioni dell'omogenea $y'' + y = 0$ si ottengono trovando le soluzioni del polinomio caratteristico $P(\lambda) = \lambda^2 + 1$ che sono i e $-i$. Per cui le soluzioni di

$$y'' + y = P(D)y = (D^2+1)y = 0$$

sono $c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t$. Per risolvere l'equazione completa cerco un polinomio (un operatore differenziale) che annulla il dato $f(t) = \operatorname{sen} t$. È ancora D^2+1, cioè

$$Q(D)f = (D^2+1)f = 0\,.$$

Cerco y tra le soluzioni dell'equazione omogenea

$$Q(D)P(D)y = (D^2+1)^2y = 0$$

(e non tra le soluzioni di $Q(D)y = (D^2+1)y = 0$ che sono le combinazioni lineari di $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$). Le radici di QP sono i e $-i$ con molteplicità due, per cui la soluzione va cercata tra le funzioni della forma

$$c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t + c_3 t \operatorname{sen} t + c_4 t \cos t\,.$$

Applicando $P(D)$ alla famiglia di funzioni precedente si ha

$$\begin{aligned} &P(D)(c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t + c_3 t \operatorname{sen} t + c_4 t \cos t) = \\ &\qquad = P(D)(c_3 t \operatorname{sen} t + c_4 t \cos t) = 2c_3 \cos t - 2c_4 \operatorname{sen} t \end{aligned}$$

che deve essere uguale a $\operatorname{sen} t$. Per cui la generica soluzione è

$$y(t) = c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t - \frac{1}{2} t \cos t\,.$$

Soluzione 5.23 - L'equazione è del tipo $y' = f(x+2y)$ dove $f(z) = (z-1)^2$. Conviene porre quindi $z(x) = x + 2y(x) - 1$ e scrivere

$$z' = 1 + 2y'$$

da cui

$$z' = 1 + 2z^2\,.b$$

Si osservi che svolgendo il quadrato si ottiene $y' = 4y^2 + 4y(x-1) + x^2 - 2x + 1$ che non è di nessuno dei tipi visti precedentemente. Risolvendo 'eqauzione nella nuova variabile si ottiene, ponendo $t = \sqrt{2}z$,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{2}z'}{1+2z^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int dx$$

da cui

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{2}z(x) = x + c \;\;\Rightarrow\;\; z(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg}(\sqrt{2}x + c')$$

e quindi infine

$$y(x) = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg}(\sqrt{2}x + c') + 1 - x\Big]\,.$$

Soluzione 5.24 - Innanzitutto si deve avere $xy^2 \neq 0$. L'equazione è omogenea: infatti

$$\frac{xy^2 - 4x^3 + y^3}{xy^2} = 1 - 4\frac{x^2}{y^2} + \frac{y}{x} = f(y/x)$$

con $f(z) = 1 - 4\frac{1}{z^2} + z$. Effettuando il cambio di variabile $z = y/x$ si perviene a

$$z' = \frac{1}{x}\Big(\frac{z^2 - 4}{z^2}\Big)\,.$$

Separando le variabile si vede che deve essere $z^2 \neq 4$. Suppondendo allora $z^2 \neq 4$ proseguiamo: scrivendo

$$\frac{z^2}{z^2 - 4} = \frac{z^2 - 4 + 4}{z^2 - 4} = 1 + \frac{1}{z+2} - \frac{1}{z-2}$$

integrando l'equazione si ottiene

$$z + \log|z+2| - \log|z-2| = z + \log\frac{z+2}{z-2} = \log|x| + c\,.$$

Per esercizio vedere che la funzione $g(z) = z + \log\frac{z+2}{z-2}$ è invertibile in $(-\infty, -2)$, in $(-2, 2)$, in $(2, +\infty)$. Per cui sicuramente è possibile scrivere

$$z(x) = \frac{y(x)}{x} = g^{-1}(\log|x| + c)$$

anche se la funzione g^{-1} non riusciamo a scriverla, possiamo mantenerci una scrittura *implicita* del tipo

$$\frac{y(x)}{x} + \log\frac{y(x) + 2x}{y(x) - 2x} = \log|x| + c\,. \tag{5.5}$$

Rimane ancora il caso $z^4 - 4 = 0$: in tal caso è semplice ottenere

$$y^2(x) = 4x^2$$

quindi le possibili soluzioni sono anche

$$y(x) = 2x\,, \qquad y(x) = -2x \tag{5.6}$$

Per cui se si avesse un problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{xy^2 - 4x^3 + y^3}{xy^2} \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

si sceglierebbe la soluzione data in (5.5) (la costante c va trovata) nell'intervallo $(2, +\infty)$ visto che se $x_0 = 1$, $y_0 = 3$ si ha che $z_0 = y_0/x_0 = 3 \in (2, +\infty)$. Se invece si avesse lo stesso problema con un dato differente

$$\begin{cases} y' = \dfrac{xy^2 - 4x^3 + y^3}{xy^2} \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

cioè $z_0 = 2$, la soluzione sarebbe $y(x) = 2x$.

Soluzione 5.25 - Dividendo per $1 + x$ (che è positivo visto che siamo interessati ad una soluzione in $(0, +\infty)$) si ottiene l'equazione di Bernoulli

$$y' = -\frac{3}{1+x}y - (1 - x^2)y^2$$

che risolta fornisce

$$y(x) = \frac{1}{x(1+x) + c(1+x)^3}\,.$$

Effettuando il limite richiesto si ha che

$$\lim_{x \to 0^+} y(x) = \frac{1}{c}$$

per cui l'unica soluzione che soddisfa la richiesta è quella per cui $c = 0$.

Soluzione 5.30 - La soluzione localmente esiste (motivare perché). Il dato $y(0) \neq 0$ quindi localmente la soluzione sarà diversa da zero, per cui possiamo dividere per y. Si ottiene

$$y'' - \frac{y'^2}{2y} - \frac{1}{2y} = 0\,.$$

Effettuando il cambio di variabile spiegato al punto 4. del paragrafo dedicato alle equazioni di secondo grado

$$p(y) = y'$$

si ottiene l'equazione nella incognita p (e nella variabile y)

$$\frac{pp'}{1+p^2} = \frac{1}{2y}\,.$$

Integrando si ha

$$\int_{y'(0)}^{y'(x)} \frac{t}{1+t^2} dt = \int_{y(0)}^{y(x)} \frac{1}{2t} dt$$

cioè

$$\frac{1}{2}\log(1+t^2)\Big|_{y'(0)}^{y'(x)} = \frac{1}{2}\log t\Big|_{y(0)}^{y(x)}$$

da cui

$$\log\left(y'(x)^2+1\right) = \log y(x) \qquad \Longrightarrow \qquad y'(x)^2+1 = y(x)\,.$$

Attenzione! ci sono quattro possibilità visto che

$$y'(x) \quad \text{può essere sia} \quad \sqrt{y(x)-1} \quad \text{che} \quad -\sqrt{y(x)-1}\,.$$

Intergrando

$$\int_{y(0)}^{y(x)} \frac{dt}{\sqrt{t-1}} = \pm\int_0^x dt$$

si ottiene che

$$2\sqrt{y(x)-1} \quad \text{può essere} \quad x \quad \text{oppure} \quad -x\,.$$

In ogni caso

$$y(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1\,.$$

Soluzione 5.31 - Moltiplicando per $2y'$ e dividendo per y^5 si ottiene

$$\frac{d}{dt}(y')^2 = 2\frac{y'}{y^5} \qquad \Rightarrow \qquad (y')^2 = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{y^4} + c$$

da cui

$$y' = \pm\sqrt{\frac{2cy^4-1}{2y^4}}$$

per cui

$$\int \frac{\sqrt{2}y^2}{\sqrt{2cy^4-1}} dy = \pm x$$

che rimane in forma implicita.

Soluzione 5.32 - Se $ae = bd$ (il determinante della matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$) significa che le due rette $ax + by + c = 0$ e $dx + ey + f = 0$ sono parallele. Si può scrivere

$$\frac{ax + by + c}{dx + ey + f} = \frac{\frac{b}{e}(dx + ey) + c}{dx + ey + f}$$

e ponendo $z = dx + ey$ si perviene ad un'equazione a variabili separabili

$$\frac{z' - d}{e} = g\Big(\frac{\frac{b}{e}z + c}{z + f}\Big).$$

Se invece $ae \neq bd$ si ottiene un'equazione omogenea nel modo seguente: si cerca il punto d'incontro (x_0, y_0) fra le due rette $ax+by+c = 0$ e $dx+ey+f = 0$ (che in questo caso non sono parallele) risolvendo il sistema

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ dx + ey + f = 0\,. \end{cases}$$

Introcendo le nuove variabili $u = x - x_0$ e $v = y - y_0$ si può riscrivere

$$\frac{ax + by + c}{dx + ey + f} = \frac{a(x - x_0) + b(y - y_0) + ax_0 + by_0 + c}{d(x - x_0) + e(y - y_0) + dx_0 + ey_0 + f} = \frac{au + bv}{du + ev} = \frac{a + b\frac{v}{u}}{d + e\frac{v}{u}}$$

Ponendo $z(u) = \frac{v(u)}{u}$ $(y' = v')$ si perviene ad un'equazione

$$z(u) + uz'(u) = g\Big(\frac{a + bz}{d + ez}\Big).$$

Soluzione 5.33 - Si veda lo svolgimento dell'Esercizio 5.32 (si perviene alla forma implicita e quindi la soluzione è data nella forma implicita

$$\frac{2y(x)}{5} + \frac{7}{25}\ln|10x + 5y(x) + 9| = \frac{x}{5} + c\,).$$

Soluzione 5.34 - Si veda lo svolgimento dell'Esercizio 5.32 (si perviene alla forma implicita

$$\Big|\frac{y(x) + 4x + 1}{x + 1}\Big|^{2/5}\Big|\frac{y(x) - x - 4}{x + 1}\Big|^{3/5} = c|x + 1|\,).$$

Soluzione 5.35 - Innanzitutto si osservi che le soluzioni saranno infinite dal momento che manca il dato relativo a y' nel punto $x = 0$.
La funzione f è continua in x, non dipende da y e y' per cui il problema ammette soluzione. Denotiamo

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x) & x \in (0, \pi) \\ y_2(x) & x > \pi \end{cases}$$

La soluzione per $x \geqslant \pi$ ($f(x) = 0$) è del tipo $c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$, per $0 \leqslant x \leqslant \pi$ ($f(x) = \operatorname{sen} x$) è del tipo $d_1 \operatorname{sen} x + d_2 \cos x - \frac{1}{2} x \cos x$ (si veda lo svolgimento dell'Esercizio 5.22). Per trovare y_1 inseriamo i dati iniziali nel punto $x = 0$: si ottengono

$$d_1 = 2\,, \qquad d_2 = 0\,.$$

Di conseguenza la soluzione sarà

$$y(x) = y_1(x) = 2 \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} x \cos x\,, \qquad \text{per } x \in [0, \pi]\,.$$

Per trovare y per $x > \pi$ consideriamo l'espressione generale della soluzione e poiché la soluzione in $(0, +\infty)$ deve essere C^2 (visto che f è continua) come dati iniziali imponiamo i valori di y_1 in $x = \pi$. Si ha che

$$y_1(\pi) = \frac{1}{2}\pi\,, \qquad y_1'(\pi) = -\frac{3}{2}\,.$$

Risolviamo

$$\begin{cases} y'' + y = 0 & x > \pi \\ y'(\pi) = -\dfrac{3}{2} & \\ y(\pi) = \dfrac{1}{2}\pi & \end{cases}$$

il che significa trovare c_1 e c_2. Imponendo i dati iniziali nell'espressione di y_2 si ha

$$c_2 = -\pi/2\,, \qquad c_1 = 3/2\,.$$

Concludendo la soluzione è

$$y(x) = \begin{cases} 2 \operatorname{sen} x - \dfrac{1}{2} x \cos x & x \in [0, \pi] \\ \dfrac{3}{2} \operatorname{sen} x - \dfrac{\pi}{2} \cos x & x > \pi\,. \end{cases}$$

La soluzione è C^2 in quanto $y'' = f - y$ e sia f che y sono continue, da cui anche y'' è continua (verificarlo per esercizio).

Soluzione 5.36 - l'equazione proposta si presenta nella forma a variabili separabili, cioè

$$\cos y(x) y'(x) = 1 + 2x.$$

Integrando quindi ambo i membri tra 0 e x, si ottiene

$$\operatorname{sen} y(x) - \operatorname{sen} 0 = x + x^2,$$

da cui

$$y(x) = \operatorname{arcsen}(x + x^2).$$

Soluzione 5.37 - Ponendo $z(x) = x + y'(x)$, l'equazione differenziale può essere riscritta nella forma

$$x + y' = (x + y')^2 - y'' - 1,$$

cioè

$$z = z^2 - z'.$$

Questa è una equazione differenziale del prim'ordine a variabili separabili, la cui soluzione è data da

$$\left| \frac{z(x) - 1}{z(x)} \right| = \alpha e^{x - x_0}, \quad \alpha > 0;$$

se imponiamo le condizioni iniziali, notiamo che possiamo togliere il modulo (perchè?) e troviamo che $\alpha = 1/2$ e quindi

$$z(x) = \frac{2}{2 - e^x}.$$

A questo punto il problema diventa

$$\begin{cases} x + y' = \frac{2}{2 - e^x} \\ \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Tale problema ha per soluzione la funzione

$$y(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(2 - e^x).$$

Soluzione 5.38 - Riscrivendo l'equazione nella forma

$$y'(x) = \frac{1 + (y(x)/x)^2}{y(x)/x},$$

ci riconduciamo ad una equazione di tipo omogeneo

$$y'(x) = f(y(x)/x).$$

In questo tipo di equazioni si pone $y(x) = xz(x)$, in modo che l'equazione diventi

$$xz'(x) + z(x) = f(z(x)),$$

che si riconduce ad una equazione a variabili separabili. Nel nostro caso troviamo che

$$z(x) = \pm\sqrt{2\ln|x| + c}, \quad c > 0,$$

da cui la soluzione del problema iniziale è data da

$$y(x) = \pm x\sqrt{2\ln|x| + c}.$$

Soluzione 5.39 - L'equazione proposta è una equazione di tipo Bernoulli; dividendo infatti l'equazione per y^3 (si noti che tale operazione è lecita se si cercano soluzioni non nulle), si ottiene

$$4y^{-3}y' + y^{-2} = x^3 - 4x,$$

da cui, ponendo $z = y^{-2}$, si ricava l'equazione

$$-2z' + z = x^3 - 4x.$$

Questa è una equazione differenziale lineare a coefficienti non costanti, la cui soluzione è data da

$$z(x) = ce^{x/2} + x^3 + 6x^2 + 20x + 40.$$

La soluzione del problema sarà quindi data da

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{ce^{x/2} + x^3 + 6x^2 + 20x + 40}}.$$

Soluzione 5.40 - L'equazione data è una equazione lineare a coefficienti costanti; le soluzioni le cerchiamo quindi nella forma $y = e^{\lambda x}$. Quindi tali funzioni sono soluzioni se e solo se λ è una radice del polinomio caratteristico

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0;$$

polinomio può essere riscritto nella forma

$$P(\lambda) = (\lambda^2 + 1)(\lambda - 1)^2$$

e quindi le radici complesse sono date da $\lambda = 1$ (con molteplicità 2) e $\lambda = \pm i$. La soluzione generale sarà quindi data dalla funzione

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{ix} + c_4 e^{-ix}$$

con $c_i \in \mathbf{C}$, $i = 1, \ldots, 4$, oppure se si vogliono usare solo numeri reali

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 \operatorname{sen} x + c_4 \cos x, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}.$$

Soluzione 5.41 - L'equazione di terzo grado assegnata può essere ridotta ad una equazione del primo ordine con la sostituzione $v = y''$, da cui

$$v' = \frac{v}{(x+1)^3}.$$

Tale equazione ha per soluzione

$$|v(x)| = \alpha e^{-1/2(x+1)^2}, \quad \alpha > 0,$$

e quindi la soluzione del problema originale diventa

$$y(x) = \pm\alpha \int_{x_0}^{t} \int_{x_0}^{\tau} e^{-1/2(\tau+1)^2} d\tau dt + c_1 + c_2.$$

Soluzione 5.42 - Si noti che nell'equazione data non compare la dipendenza da x; in questo tipo di equazioni si cambia in qualche modo il punto di vista, e si vede la funzione y come variabile libera e si cerca di esprimere le varie derivate come derivate in funzione della variabile y. A tale scopo si introduce la funzione

$$z(y) = y'(x),$$

e si calcola la derivata rispetto a y di tale funzione in modo da ottenere

$$\frac{dz(y)}{dy} = \frac{dy'(x)}{dy} = \frac{dy'(x)}{dx}\frac{dx}{dy} = \frac{y''(x)}{y'(x)} = \frac{y''(x)}{z(y)},$$

e quindi si ottiene l'equazione differenziale

$$z\frac{dz}{dy} - \frac{z^2}{y} - y^3 = 0,$$

che può essere riscritta come

$$\frac{d(z^2)}{2dy} - \frac{z^2}{y} = y^3$$

otteniamo la soluzione

$$z^2(y) = y^2\left(c + y^2\right).$$

Si tratta quindi poi di risolvere l'equazione differenziale

$$(y'(x))^2 = y(x)^2\left(c + \frac{y^2}{2}\right).$$

Soluzione 5.43 - L'equazione data è di tipo lineare a coefficienti non costanti, la cui soluzione è data da

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x^1+2}}\left(c - \frac{1}{x^2 - x\sqrt{x^2+1}+1}\right).$$

Soluzione 5.44 - L'equazione data è una equazione lineare a coefficienti non costanti; applicando quindi la formula risolutiva si trova che

$$y(x) = cx^2 - \frac{2x+1}{2}.$$

Soluzione 5.45 - l'equazione data è una equazione di tipo Bernoulli; con la sostituzione $z = y^{-1}$, si ottiene l'equazione lineare a coefficienti non costanti

$$z' = \frac{x}{x^2-1}z + \frac{x}{x^2-1},$$

che ha per soluzione

$$z(x) = \sqrt{|x^2-1|}\left(c + \int \frac{t}{(t^2-1)\sqrt{|t^2-1|}}dt\right),$$

che produce, a seconda dei dati iniziali, una delle seguenti due soluzioni

$$z(x) = c\sqrt{x^2-1} - 1$$

$$z(x) = c\sqrt{1-x^2} - 1.$$

Quindi la soluzione originale sarà una delle due tra

$$\frac{1}{c\sqrt{x^2-1}-1}$$

e

$$\frac{1}{c\sqrt{1-x^2}-1}$$

Soluzione 5.46 - L'equazione data è di tipo Bernoulli, e quindi con la sostituzione $z = y^6$ si ottiene la soluzione

$$z(x) = \frac{1}{|x|}\left(c + \int 6t|t|dt\right).$$

Se cerchiamo la soluzione per $x > 0$, integrando e tornando alla funzione y, si ottiene

$$y(x) = \sqrt[6]{\frac{4x^3-c}{x^2}}.$$

Soluzione 5.47 - L'equazione data è a variabili separabili

$$\frac{y'}{y} = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}},$$

e quindi la soluzione è data da

$$|y(x)| = c\sqrt{e^{2x}+1}, \quad c > 0.$$

Soluzione 5.48 - Riscrivendo l'equazione nella forma

$$y'e^y e^x = -x,$$

notiamo che siamo ricondotti ad una equazione a variabili separabili, la cui soluzione è data da

$$y(x) = \ln(c + (x+1)e^{-x}).$$

Soluzione 5.49 - L'equazione data può essere ricondotta ad una equazione di tipo omogeneo

$$y' = \frac{1+(y/x)^3}{(y/x)^2},$$

che con la sostituzione $y = xz$ si riconduce all'equazione a variabili separabili

$$z + xz' = \frac{1+z^3}{z^2},$$

la cui soluzione è data da

$$z(x) = \sqrt[3]{c + 3\ln|x|}.$$

Si tratta quindi poi di porre

$$y'(x) = xz(x) = x\sqrt[3]{c+3\ln|x|}.$$

Soluzione 5.50 - L'equazione data può essere riscritta come

$$y'y'' = -x$$

o meglio ancora come

$$\frac{d(y')^2}{2dx} = -x.$$

Integrando quindi tra il punto iniziale $x_0 = 0$ e x, si ottiene che

$$\int_0^x \frac{d(y'(t))^2}{2dx}dt = -\int_0^x tdx,$$

da cui si ricava, tenendo presente che $y'(0) = 1 > 0$,

$$y'(x)^2 = 1 - x^2 \Rightarrow y'(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

La soluzione sarà quindi data da, tenendo presente che $y(0) = 1$,

$$y(x) = 1 + \frac{\operatorname{arcsen} x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}.$$

Soluzione 5.51 - Notando che nell'equazione non compare la y, si può porre $v = y'$ in modo da ottenere un'equazione lineare a coefficienti non costanti

$$\begin{cases} v' = \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) v - \frac{x+2}{x+1} \\ v(0) = 1 \end{cases}$$

la cui soluzione è data da

$$v(x) = 1.$$

La soluzione del problema iniziale sarà quindi data da

$$y(x) = x.$$

Soluzione 5.52 - Nell'equazione data non compare la variabile x, quindi si può introdurre la funzione $z(y) = y'(x)$; con questa sostituzione otteniamo

$$\dot{z}(y) = \frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dy} = \frac{y''}{z},$$

si ottiene l'equazione

$$\begin{cases} \dot{z} = \frac{z}{y} + y, \\ z(1) = z(y(0)) = y'(0) = 1; \end{cases}$$

la soluzione di tale equazione è data da

$$z(y) = y^2.$$

Si tratta ora di risolvere il problema

$$\begin{cases} y'(x) = y(x)^2 \\ \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

la cui soluzione è data da

$$y(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Soluzione 5.53 - Come nell'esercizio precedente, nell'equazione non compare la variabile x e quindi si pone $z(y) = y'$; si ottiene quindi che

$$|z(y) + 1| = c|y|, \quad c > 0,$$

e quindi il problema è risolto se si risolve l'equazione

$$|y' + 1| = c|y|,$$

dove la possibilità di togliere o meno il modulo dipenderà dai dati iniziali; avremo quindi le due possibili soluzioni

$$|cy(x) - 1| = \alpha e^x, \quad c, \alpha > 0$$

$$|cy(x) + 1| = \alpha e^{-x}, \quad c, \alpha > 0.$$

Soluzione 5.54 - L'equazione può essere riscritta nella forma

$$y'' - y' = 3x;$$

la soluzione dell'omogenea data da

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x,$$

mentre per la soluzione particolare si applica il Teorema 5.23 delle dispense e si trova la funzione

$$y_1(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 3x.$$

La soluzione, imponendo le condizioni iniziali, sarà quindi determinata da

$$y(x) = 4e^x - \frac{3}{2}x^2 - 3x - 3.$$

Soluzione 5.55 - La soluzione dell'omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x/2};$$

per la determinazione della soluzione particolare applichiamo il Teorema 5.23 delle dispense ed otteniamo la funzione

$$y_1(x) = \left(\frac{4}{5}x - \frac{12}{25}\right) e^{2x}.$$

La soluzione generale sarà quindi data da

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x/2} + \left(\frac{4}{5}x - \frac{12}{25}\right) e^{2x}.$$

Soluzione 5.56 - La soluzione dell'omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x;$$

per quanto riguarda la soluzione particolare si trova che

$$y_1(x) = \frac{x}{4} \operatorname{sen} x - \frac{x^2}{4} \cos x,$$

e quindi la soluzione generale è data da

$$y(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + \frac{x}{4} \operatorname{sen} x - \frac{x^2}{4} \cos x.$$

Soluzione 5.57 - L'equazione differenziale può essere riscritta nella forma

$$3y'' - y' + y = 0,$$

e quindi si tratta di una equazione differenziale del secondo ordine lineare omogenea a coefficienti costanti. Il suo polinomio caratteristico è dato da

$$P(\lambda) = 3\lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1/6 - i\sqrt{11}/6)(\lambda - 1/6 + i\sqrt{11}/6);$$

la soluzione generale sarà quindi data da

$$y(x) = e^{x/6} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{11}}{6} x + c_2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{11}}{6} x \right).$$

Soluzione 5.58 - La soluzione dell'equazione omogenea è data da

$$y_0(x) = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x).$$

Usando il Teorema 5.23 delle dispense, si trova che la soluzione particolare è data da

$$y_1(x) = xe^{7x}\left((ax^2 + bx + c)\cos 2x + (dx^2 + ex + f)\operatorname{sen} 2x\right).$$

La soluzione generale sarà data dalla somma delle due.

Soluzione 5.59 - La soluzione dell'equazione omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x;$$

per quanto riguarda la soluzione particolare, si applica il Teorema 5.23 delle dispense, si ottiene

$$y_1(x) = \frac{1}{3}\cos x.$$

A questo punto, imponendo le condizioni iniziali, si ottiene la soluzione

$$y(x) = \frac{1}{3}\operatorname{sen} 2x + \cos 2x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} x.$$

Soluzione 5.60 - La soluzione dell'omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x;$$

per calcolare la soluzione particolare scriviamo

$$2x\cos x \cos 2x = 4x\cos^3 x - 2x\cos x,$$

e quindi applicando il principio di sovrapposizione, cioè tenendo conto che la soluzione particolare di una somma di funzioni è data dalla somma delle soluzioni particolari, dal Teorema 5.23 delle dispense, si ricava che le soluzioni particolari sono date da

$$y_1(x) = \frac{x}{4}\cos x + \frac{x^2}{4}\operatorname{sen} x,$$

$$y_2(x) = \frac{3}{32}\operatorname{sen} 3x - \frac{x}{8}\cos 3x.$$

La soluzione generale sarà quindi data da

$$y(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + \frac{x}{4}\cos x + \frac{x^2}{4}\operatorname{sen} x + \frac{3}{32}\operatorname{sen} 3x - \frac{x}{8}\cos 3x.$$

Soluzione 5.61 - La soluzione dell'omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x};$$

per calcolare la soluzione generale si applica il metodo della variazione delle costanti, per ottenere la soluzione

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + x e^{-x} \ln |x|.$$

Soluzione 5.62 - La soluzione dell'equazione omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x};$$

per quanto riguarda la soluzione particolare, usando il metodo della variazioni delle costanti, si trova che la soluzione generale è data da

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x} + e^{x^2}.$$

Soluzione 5.63 - La soluzione dell'equazione omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x},$$

mentre per il calcolo della soluzione particolare usiamo il principio di sovrapposizione delle soluzioni, e cioè utilizziamo il fatto che quando il termine forzante, la parte non omogenea dell'equazione differenziale, è somma di più funzioni, allora la soluzione particolare può essere determinata sommando le varie soluzioni particolari. Utilizzando questo principio, abbiamo che associata a $x^2 + 1$ la soluzione particolare è data da

$$y_1(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2,$$

mentre associata a $3xe^x$ la soluzione particolare è data da

$$y_2(x) = e^x \left(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4} \right).$$

La soluzione generale sarà quindi data da

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + e^x \left(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4} \right).$$

Soluzione 5.64 - La soluzione dell'equazione omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 x e^x,$$

mentre una soluzione particolare, grazie al Teorema 5.23 delle dispense, sarà data da

$$y_1(x) = \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + 3x^3 + 12x^2;$$

la soluzione generale sarà quindi data da

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 x e^x + \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + 3x^3 + 12x^2.$$

Soluzione 5.65 - La soluzione dell'equazione omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 e^{-x} + e^{-x/2} \left(c_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}x \right)$$

mentre la soluzione particolare, ottenuta usando il metodo illustrato nel Teorema 5.23 delle dispense, è data da $y_1 = x - 2$. Imponendo infine le condizioni iniziali, si trova che la soluzione è data dalla funzione

$$y(x) = e^{-x} + e^{-x/2} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + x - 2.$$