Capitolo 6

Integrali

Ultimo aggiornamento: 18 febbraio 2017

Esercizio 6.1 - Integrare la funzione $f(x,y) = y(x^2 + \operatorname{sen} x) + e^x$ sull'insieme $Q = (0,\pi) \times (0,3)$.

Esercizio 6.2 - Calcolare $\displaystyle\int_E (x^2+y)dxdy$ dove $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant x^2\,,\ 0 \leqslant x \leqslant 2\}$.

Esercizio 6.3 - Calcolare l'integrale

$$\int_E (x^2 - 3y^2)\operatorname{sen}(xy)dxdy$$

dove $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geqslant -3\,,\ y \leqslant 3\,,\ y \geqslant x\}$.

Esercizio 6.4 - Calcolare $\displaystyle\int_E \frac{x}{x^2+y^2}dxdy$ dove $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leqslant x \leqslant 2\,,\ x^2/2 \leqslant y \leqslant x^2\}$.

Esercizio 6.5 - Calcolare $\displaystyle\int_E x dxdy$ dove $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 4\,, x^2+y^2 \geqslant 1\,, 0 \leqslant y \leqslant 1\,, x \geqslant 0\}$.

Esercizio 6.6 - Calcolare l'integrale

$$\int_E x^3y^5dxdy$$

dove $E = E_1 \cup E_2$ con

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\,,\, -1 \leqslant y \leqslant x^2\} \\ E_2 &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geqslant 1\,,\, x^2+y^2-2x \leqslant 0\} \end{aligned}$$

Esercizio 6.7 - Calcolare $\displaystyle\int_E \frac{xy^2}{x^2+y^2}dxdy$ dove $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \geqslant x\,, 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2\}$.

Esercizio 6.8 - Calcolare $\displaystyle\int_E \frac{\operatorname{tg}(x+y)}{x+y}dxdy$ dove $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < x+y \leqslant 1\,, x,y > 0\}$.

Esercizio 6.9 - Calcolare $\displaystyle\int_E (x+y)dxdy$ dove $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < x < y < 2x\,, 1 < xy < 2\,\}$.

Esercizio 6.10 - Calcolare $\displaystyle\int_E (x^2+y^2)\Big(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}\Big)dxdy$ dove $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 < x^2-y^2 < 2\,, 1 < xy < 3\,\}$.

Esercizio 6.11 - Calcolare $\displaystyle\int_E x^2(y-x^3)e^{y+x^3}dxdy$ dove $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^3 \leqslant y \leqslant 3\,, x \geqslant 1\}$.

Esercizio 6.12 - Calcolare $\displaystyle\int_E \frac{3}{x^2y^2}dxdy$ dove $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > 1/x\,, x \leqslant y \leqslant 4x\}$.

Esercizio 6.13 - Determinare per quali valori del parametro reale $\alpha \in \mathbf{R}$ risulta integrabile la funzione $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-\alpha}$ su $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$.

Esercizio 6.14 - Calcolare $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx$ (Suggerimento; considerare la funzione $f(x,y) = \operatorname{sen} x e^{-xy}$ e integrarla sull'insieme $[0,+\infty) \times [0,+\infty)$).

Esercizio 6.15 - Calcolare l'area della regione S interna ad entrambe le due curve chiuse date in forma implicita

$$\begin{aligned} &x^2+y^2-x = 0 \\ &\rho^2 = 2\cos 2\vartheta, \quad \vartheta \in [-\pi/4, \pi/4]. \end{aligned}$$

Esercizio 6.16 - Trovare il volume del tetraedro T di vertici $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.

Esercizio 6.17 - Determinare il volume dell'intersezione dei due cilindri

$C_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$, $\qquad C_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+z^2 \leqslant 1\}$.

Esercizio 6.18 - Determinare il volume del toro di raggio R ottenuto ruotando una circonferenza di raggio r.

Esercizio 6.19 - Determinare il volume del solido

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 9(1 - \sqrt{x^2+z^2})^2 + 4y^2 \leqslant 1\}.$$

Esercizio 6.20 - Calcolare il volume del solido

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\,, x^2+y^2-2 \leqslant z \leqslant 4-x-y\}.$$

Esercizio 6.21 - Calcolare $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2} dx$ (suggerimento: calcolare in $\mathbf{R}^2$ l'integrale di $e^{-x^2-y^2}$).

Esercizio 6.22 - Determinare l'area dell'ellisse racchiusa dalla curva $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Esercizio 6.23 - Determinare il volume della regione interna sia alla superficie

$$x^2+y^2+z^2 = 4a^2$$

che alla superficie cilindrica

$$x^2 + (y-a)^2 = a^2\,.$$

Esercizio 6.24 - Nell'integrale

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$$

si scambi l'ordine di integrazione, cioè si lasci libera la variabile y e si scriva x in dipendanza da y.

Esercizio 6.25 - Calcolare il volume della porzione di cono $(\alpha > 0)$

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; \alpha(x^2+y^2) \leqslant z^2, 0 \leqslant z \leqslant h\right\}$$

Esercizio 6.26 - Si calcoli l'integrale $\iiint_S \frac{x^2}{x^2+z^2}\, dxdydz$ dove

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2 < 2, x^2-y^2+z^2 < 0, y > 0 \right\}.$$

Esercizio 6.27 - Calcolare, se esiste, l'integrale $\iint_E f(x,y)dxdy$ dove

$$f(x,y) = \operatorname{sen} \frac{\pi x}{x+y}\,, \qquad E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \; | x < y < 2x,\; 0 < x+y < 2\}.$$

Esercizio 6.28 - Calcolare il seguente integrale

$$\iiint_E \operatorname{sen}(x+y+z)\, dxdydz$$

dove $E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$.

Esercizio 6.29 - Calcolare il seguente integrale

$$\iiint_E e^{\frac{x+y}{\sqrt{2}}}\, dxdydz$$

dove

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leqslant 1 \right\}.$$

Integrali di superficie

Esercizio 6.30 - Calcolare l'area della superficie della sfera

$$\left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2 = r^2 \right\}.$$

Esercizio 6.31 - Calcolare l'area della superficie

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2 \leqslant 1\,, x^2+y^2-z = 0 \right\}.$$

Esercizio 6.32 - Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int_\Sigma \frac{z+y^2}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}} d\sigma$$

dove

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \; | \; z = x^2-y^2\,, x^2+y^2 \geqslant 1\,, x^2+4y^2 \leqslant 4\}.$$

Esercizio 6.33 - Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int_{\Sigma} \frac{x}{\sqrt{4z+1}} d\sigma$$

dove Σ è la superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = x^2 + y^2 \, , x^2 + y^2 - y \leqslant 0 \, , y \geqslant 1/2 \, , x \geqslant 0\}.$$

Flussi

Esercizio 6.34 - Calcolare l'area del cerchio di raggio $r > 0$.

Esercizio 6.35 - Calcolare il flusso del campo

$$F(x,y,z) = (x^3 e^{-z}, 3xz, 3x^2 e^{-z})$$

attraverso la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 16, z \geqslant 0\}$ orientata orientata con la normale che ha terza componente positiva.

Esercizio 6.36 - Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (x^2, y, z)$$

uscente dal tetraedro $T = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x, y, z \geqslant 0 \, , \, x + y + z \leqslant 1\}$.

Esercizio 6.37 - Calcolare il flusso del campo

$$F(x,y,z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \big(x, y, z\big)$$

uscente da una qualsiasi superficie chiusa contenente all'interno l'origine (Legge di Gauss).

Esercizio 6.38 - Calcolare il flusso del campo

$$F(x,y,z) = (x + y, z - y, x^3 y)$$

attraverso la superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = x^2 + y^2 \, , \, x^2 + y^2 \leqslant 4\}$ orientata con la normale che ha la terza componente negativa.

Soluzioni

Soluzione 6.1 - Essendo il dominio un rettangolo si può scrivere

$$\int_Q f(x,y)dxdy = \int_0^\pi \Big(\int_0^3 f(x,y)dy\Big)dx = \int_0^3 \Big(\int_0^\pi f(x,y)dx\Big)dy$$

e integrare indifferentemente prima rispetto ad una variabile e poi rispetto all'altra. Scegliamo di integrare prima rispetto alla variabile y:

$$\begin{aligned}\int_Q f(x,y)dxdy &= \int_0^\pi \Big(\int_0^3 [y(x^2+\operatorname{sen} x)+e^x]dy\Big)dx \\ &= \int_0^\pi \Big(\frac{y^2x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\operatorname{sen} x + ye^x\Big)\Big|_0^3 dx \\ &= \int_0^\pi \Big(\frac{9x^2}{2}+\frac{9}{2}\operatorname{sen} x+3e^x\Big)dx \\ &= \Big(\frac{9x^3}{6}-\frac{9}{2}\cos x+3e^x\Big)\Big|_0^\pi \\ &= \frac{9\pi^3}{6}+\frac{9}{2}-\frac{9}{2}+3e^\pi-3\,.\end{aligned}$$

Soluzione 6.2 - L'insieme E è quello rappresentato in Figura 6.1. Sce-

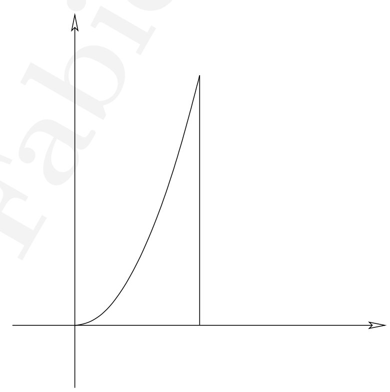


Figura 6.1:

gliendo x come variabile libera si può scrivere l'integrale

$$\int_0^2 dx\Big(\int_0^{x^2}(x^2+y)dy\Big)$$

che diventa
$$\int_0^2 dx\Big(x^2y+\frac{y^2}{2}\Big)\Big|_{y=0}^{y=x^2}=\int_0^2\frac{3}{2}x^4dx=\frac{48}{5}\,.$$
Scegliendo y come variabile libera l'integrale diventa (svolgerlo per esercizio)
$$\int_0^4 dy\Big(\int_{\sqrt{y}}^2(x^2+y)dx\Big)\,.$$

Soluzione 6.3 - Il dominio di integrazione è normale rispetto ad entrambe le variabili; scrivendo
$$\int_E(x^2-3y^2)\,\mathrm{sen}\,(xy)dxdy=\int_E x^2\,\mathrm{sen}\,(xy)dxdy-3\int_E y^2\,\mathrm{sen}\,(xy)dxdy$$
conviene tenere nel primo integrale come variabile libera la x, mentre nel secondo conviene tenere come variabile libera la y; quindi
$$\begin{aligned}\int_E(x^2-3y^2)\,\mathrm{sen}\,(xy)dxdy &= \int_{-3}^3 x^2\int_x^3\ \mathrm{sen}\,(xy)dydx+\\ &\quad -3\int_{-3}^3 y^2\int_{-3}^y\ \mathrm{sen}\,(xy)dxdy\\ &= \int_{-3}^3(x\cos x^2-x\cos 3x)dx+\\ &\quad -3\int_{-3}^3(y\cos 3y-y\cos y^2)dy=0,\end{aligned}$$
in quanto integrali di funzioni dispari su intervalli simmetrici rispetto all'origine.

Soluzione 6.4 - Scegliendo x come variabile libera, l'integrale diventa
$$\begin{aligned}\int_E\frac{x}{x^2+y^2}dxdy &= \int_1^2\left(\int_{x^2/2}^{x^2}\frac{x}{x^2+y^2}dy\right)dx\\ &= \int_1^2(\mathrm{arctg}\,x-\mathrm{arctg}\,x/2)\,dx\\ &= \left[x\,(\mathrm{arctg}\,x-\mathrm{arctg}\,x/2)+\log\left(\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right]_1^2\\ &= 2\mathrm{arctg}\,2-\frac{3}{4}\pi+\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}+\log\frac{8}{5}\sqrt{\frac{2}{5}}.\end{aligned}$$

Soluzione 6.5 - Se scegliamo x come variabile libera dobbiamo spezzare in tre l'integrale (in tre insiemi come indicato in Figura 6.2). Conviene

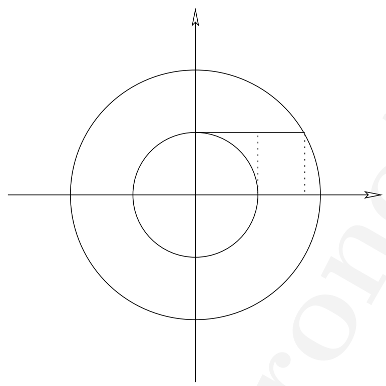


Figura 6.2:

quindi scegliere y come variabile libera:

$$\begin{aligned}\int_E f(x,y)dxdy &= \int_0^1 \Big(\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} xdx \Big) dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}\big(4-y^2-(1-y^2)\big)dy = \frac{3}{2}\,.\end{aligned}$$

Soluzione 6.6 - Notiamo anzitutto che la funzione integranda è dispari rispetto ad entrambe le variabile, inoltre il dominio E_1 è simmetrico rispetto all'asse y mentre E_2 è simmetrico rispetto all'asse x, quindi

$$\int_E x^3y^5dxdy = \int_{E_1} x^3y^5dxdy + \int_{E_2} x^3y^5dxdy = 0.$$

Soluzione 6.7 - L'insieme di integrazione non è normale rispetto a nessuna delle due variabili; notiamo però che se passiamo alle coordinate polari, esso diventa, nelle variabili ϱ e ϑ, il rettangolo $[1,\sqrt{2}] \times [\pi/4, 5\pi/4]$. Otteniamo quindi che

$$\begin{aligned}
\int_E \frac{xy^2}{x^2+y^2}dxdy &= \int_{[1,\sqrt{2}]\times[\pi/4,5\pi/4]} \frac{\varrho\cos\vartheta\varrho^2\operatorname{sen}^2\vartheta}{\varrho^2}\varrho d\varrho d\vartheta \\
&= \int_1^{\sqrt{2}}\int_{\pi/4}^{5\pi/4}\varrho^2\cos\vartheta\operatorname{sen}^2\vartheta d\vartheta d\varrho \\
&= \frac{\sqrt{2}-4}{18}.
\end{aligned}$$

Soluzione 6.8 - Notiamo che il dominio di integrazione è normale rispetto ad entrambe le variabili, però la funzione integranda $\operatorname{tg} t/t$ non ammette primitiva; proviamo quindi ad effettuare. Cerchiamo un cambio di variabili tale che la matrice del cambiamento di coordinate abbia determinante 1; un possibile cambio di variabili di questo tipo si può ottenere ponendo $u = x + y$, $v = x$. Nelle variabili (u, v) l'insieme E diventa $\{(u,v) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < u \leqslant 1\,, 0 < v < u\}$, e quindi

$$\begin{aligned}
\int_E \frac{\operatorname{tg}(x+y)}{x+y}dxdy &= \int_0^1\left(\int_0^u \frac{\operatorname{tg} u}{u}dv\right)du = \int_0^1 \operatorname{tg} u du \\
&= -\log\cos 1.
\end{aligned}$$

Soluzione 6.9 - L'insieme E è quello in Figura 6.3. Si può svolgere il

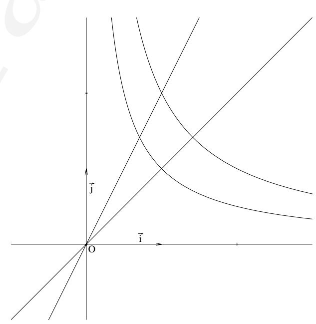


Figura 6.3:

calcolo in coordianate cartesiane, ma è più semplice effettuare il cambio di coordinate

$$u = xy\,, \qquad v = \frac{y}{x}$$

da cui si ricava che

$$x = \sqrt{\frac{u}{v}}\,, \qquad y = \sqrt{uv}\,.$$

Lo jacobiano di tale trasformazione è dato da $1/2v$ per cui si ottiene

$$\int_1^2 dv \int_1^2 du \Big(\sqrt{uv} + \sqrt{\frac{u}{v}}\Big)\frac{1}{2v}$$

che svolto dà il risultato.

Soluzione 6.10 - Ponendo $u = xy$ e $v = x^2 - y^2$ si ottiene che

$$u_x = y\,, u_y = x\,, v_x = 2x\,, v_y = -2y$$

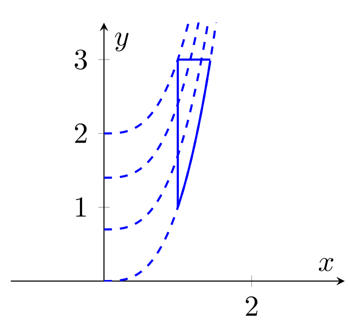
per cui lo jacobiano della matrice (inversa) del cambiamento di variabili è $2x^2 + 2y^2$ (cioè il cambio dalla coppia (u, v) alla coppia (x, y)). Di conseguenza, poiché $(x^2+y^2)(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}) = (x^2+y^2)(\frac{x^2-y^2}{x^2y^2})$, l'integrale scritto nulle nuove variabili diventa

$$\int_1^3 du \int_1^2 dv\, \frac{1}{2}\frac{v}{u^2} = \frac{1}{2}\,.$$

Soluzione 6.11 - Se effettuiamo la sostituzione $u = y - x^3$, $v = y + x^3$, notiamo che la funzione $F(x, y) = (y - x^3, y + x^3)$ è una applicazione differenziabile con

$$|\det DF(x, y)| = \left|\det \begin{pmatrix} 3x^2 & 1 \\ -3x^2 & 1 \end{pmatrix}\right| = 6x^2,$$

e quindi eccettuato i punti in cui $x = 0$, la funzione F è un diffeomorfismo. Notiamo che sull'insieme E, mostrato in figura,



si ha $x \geqslant 1$, e quindi possiamo applicare la formula di cambiamento di variabili, tenendo presente che nelle variabili (u, v) l'insieme E diventa $\{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leqslant u \leqslant 2\,, u+2 \leqslant v \leqslant u+6\}$. In figura le curve tratteggiate sono alcune curve del tipo

$$y - x^3 = c\,, \qquad c \in \mathbf{R}\,.$$

Si ha quindi che $y - x^3$ varia tra 0, facilmente ricavabile dalle limitazioni date per definire E, e un valore che si ricava in corrispondenza del punto $(1, 3)$, il vertice in alto a sinistra in figura. In corrispondenza a $x = 1$ e $y = 3$ la quantità $y - x^3$ assume il valore 2, per cui

$$0 \leqslant u \leqslant 2\,.$$

Scrivendo $y + x^3$ come $y - x^3 + 2x^3$ e poiché

$$x^3 \quad \text{varia tra} \quad 1 \text{ e } 3$$

si ha che

$$v \quad \text{varia tra} \quad u+2 \text{ e } u+6$$

$$\begin{aligned}
\int_E x^2 (y - x^3) e^{y+x^3} dxdy &= \frac{1}{6} \int_E |\det DF(x,y)| (y - x^3) e^{y+x^3} dxdy \\
&= \frac{1}{6} \int_0^2 \left(\int_{u+2}^{u+6} u\, e^v dv \right) du \\
&= \frac{e^8 + e^6 - e^4 - e^2}{6}.
\end{aligned}$$

Soluzione 6.12 - Passando alle coordinate polari, l'insieme E diventa $\{(\vartheta, \rho) \in \mathbf{R}^2 \mid \pi/4 \leqslant \vartheta \leqslant \operatorname{arctg} 4\,, \rho \geqslant 1/\sqrt{\cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta}\}$; quindi l'integrale diventa

$$\begin{aligned}
\int_E \tfrac{3}{x^2 y^2} dxdy &= \int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 4} d\vartheta \int_{1/\sqrt{\operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta}}^{+\infty} \tfrac{3}{\rho^4 \cos^2\vartheta \operatorname{sen}^2\vartheta} \rho d\rho \\
&= \tfrac{3}{2} \int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 4} \tfrac{1}{\operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta} d\vartheta \\
&= 3 \log 2.
\end{aligned}$$

Provare anche con il cambio di variabile $u = xy$ e $v = y/x$.

Soluzione 6.13 - Passando alle coordinate polari otteniamo

$$\begin{aligned}\int_E \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} dxdy &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \frac{\rho}{\rho^{2\alpha}} d\rho \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{1}{\rho^{2\alpha-1}} d\rho,\end{aligned}$$

e quindi la funzione sarà integrabile per $\alpha < 1$.

Soluzione 6.14 - Se integriamo la funzione $f(x,y) = \operatorname{sen} x e^{-xy}$ su $[0,+\infty) \times [0,+\infty)$ prima rispetto a y otteniamo

$$\int_{[0,+\infty)\times[0,+\infty)} f(x,y) dydx = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx,$$

mentre se integriamo prima rispetto a x si ottiene

$$\int_0^{\infty} \int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x e^{-xy} dxdy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2} dy = \frac{\pi}{2},$$

da cui si ricava che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Soluzione 6.15 - Riscrivendo la prima curva, che è una circonferenza centrata in $(1/2, 0)$ e raggio $1/2$, in coordinate polari, abbiamo che essa è descritta dall'equazione

$$\rho = \cos\vartheta, \quad \vartheta \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Notando a questo punto che il dominio S di cui si vuole calcolare l'area è simmetrico rispetto all'asse x (si veda la figura (6.4)), la sua area sarà data da

$$\text{Area}(S) = 2\text{Area}(S'),$$

dove S' è individuata, nelle coordinate polari, da $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi/4$. Cerchiamo anzitutto l'angolo ϑ_0 per il quale le due curve si incontrano; esso sarà individuato dalla condizione

$$\cos^2\vartheta = 2\cos 2\vartheta,$$

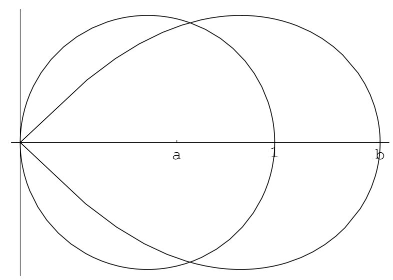


Figura 6.4:

che ha come soluzione

$$\operatorname{sen}\vartheta_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\vartheta_0 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

L'area di S' sarà quindi data da

$$\begin{aligned}
\text{Area}(S') &= \int_{S'} dxdy = \int_{S'} \rho\, d\rho d\vartheta \\
&= \int_0^{\vartheta_0} d\vartheta \int_0^{\cos\vartheta} \rho\, d\rho + \int_{\vartheta_0}^{\pi/4} d\vartheta \int_0^{\sqrt{2\cos 2\vartheta}} \rho\, d\rho \\
&= \frac{\vartheta_0}{4} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

per cui

$$\text{Area}(S) = \frac{\vartheta_0}{2} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Soluzione 6.16 - Il tetraedro è il solido delimitato dai quattro piani $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$ e rappresentato in Figura 6.5. Per calcolare il volume di un solido S (e in generale la misura n-dimensionale di un aperto in $\mathbf{R}^n$) si può calcolare l'integrale della funzione 1 sull'insieme S. Per cui valutiamo

$$\int_T dxdydz\,.$$

Scegliendo x come variabile libera si hanno le limitazioni $0 \leqslant x \leqslant 1$. Per x fissato ora esprimiamo gli estremi per y e z (si veda il secondo disegno in Figura 6.5). Scegliendo y si ottiene $0 \leqslant y \leqslant 1 - x$ e infine $0 \leqslant z \leqslant 1 - x - y$.

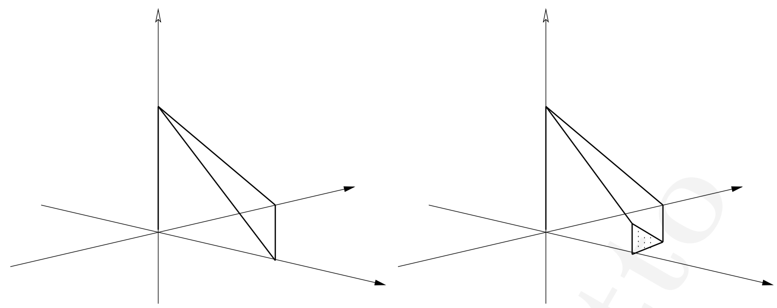


Figura 6.5:

Quindi

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Vol}\,(T) &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy(1-x-y) \\
&= \int_0^1 dx\,(y - xy - y^2/2)\Big|_{y=0}^{y=1-x} \\
&= \int_0^1 \Big[1 - 2x + x^2 - \frac{x^2-2x+1}{2}\Big] dx = \frac{1}{6}\,.
\end{aligned}
$$

Soluzione 6.17 - Chiamando V il solido dato dall'intersezione di C_1 e C_2 si ha

$$
\int_V dx\,dy\,dz = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} dz = \frac{16}{3}\,.
$$

Soluzione 6.18 - Il toro è una figura la cui superficie può essere ottenuta ruotando una circonferenza di raggio r su una circonferenza di raggio R ortogonale alla prima, $0 < r < R$ per ottenere una figura come quella a sinistra in Figura 6.6. In generale per calcolare il volume di un solido di rotazione, cioè un solido la cui superficie si ottiene ruotando una curva $(z, f(z))$ nel piano con $f > 0$ (si veda la Figura 6.7), si possono usare le coordinate cilindriche. Considerando $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, $f \geqslant 0$, e il solido ottenuto ruotando il grafico di f, descriviamo il solido con le coordinate

$$
(\rho, \vartheta, z) \mapsto (\rho\cos\vartheta, \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta, z)
$$

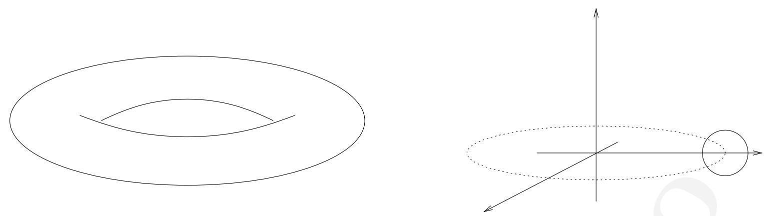


Figura 6.6:

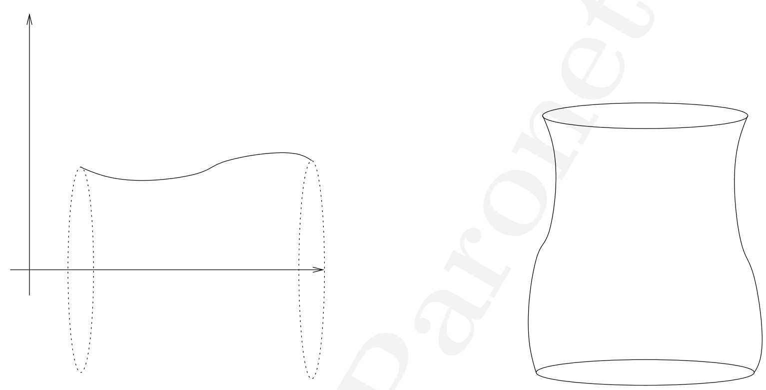


Figura 6.7:

il cui jacobiano è ρ. Se denotiamo con S il solido, integrando si ha

$$\mathrm{Vol}(S) = \int_a^b dz \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{f(z)} \rho\, d\rho = \pi \int_a^b f^2(z) dz\,.$$

Per calcolare il volume del toro consideriamo quindi le funzioni $f(z) = \sqrt{r^2 - z^2} + R$ e $g(z) = -\sqrt{r^2 - z^2}$ definite tra $-r$ e r valutando prima l'integrale di f^2 al quale sottraiamo l'integrale di g^2. Si ha quindi

$$\pi \int_{-r}^{r} [f^2(z) - g^2(z)] dz = 4R\pi^2 \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - z^2} dz\,.$$

Si noti che l'integrale da calcolare fornisce l'area del semicerchio, per cui il volume del toro è dato da

$$4R\pi \frac{\pi r^2}{2} = 2\pi^2 R r^2\,.$$

Si noti che questa quantità è data dal prodotto dell'area del cerchio piccolo πr^2 moltiplicata per la lunghezza della circonferenza grande $2\pi R$.

Soluzione 6.19 - Notiamo che l'insieme dato è invariante per rotazioni attorno all'asse y, quindi possiamo provare a passare alle coordinate cilindriche con asse lungo l'asse y, cioè

$$\begin{cases} x = \varrho \cos \vartheta \\ y = t \\ z = \varrho \operatorname{sen} \vartheta. \end{cases}$$

In queste nuove coordinate l'insieme E risulta essere determinato da

$$\left\{ (\vartheta, \varrho, t) \in [0, 2\pi) \times \mathbf{R}^2 \mid -\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, 1 - \frac{\sqrt{1-4t^2}}{3} \leqslant \varrho \leqslant 1 + \frac{\sqrt{1-4t^2}}{3} \right\}.$$

Otteniamo quindi che il volume di E è dato da

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(E) &= \int_E dxdydz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{-1/2}^{1/2} dt \int_{1-\frac{\sqrt{1-4t^2}}{3}}^{1+\frac{\sqrt{1-4t^2}}{3}} \varrho d\varrho \\ &= \frac{4\pi}{3} \int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{1-4t^2} dt = \frac{\pi^2}{3}. \end{aligned}$$

Soluzione 6.20 - L'insieme di sui si vuole calcolare il volume è costituito dalla la regione dello spazio in cui z è compresa tra il paraboloide x^2+y^2-2 e il piano $4-x-y$, mentre x e y appartengono alla palla B centrata nell'origine e di raggio 1. Siccome il paraboloide e il piano si incontrano quando x e y appartengono alla circonferenza centrata in $(-1/2, 1/2)$ e raggio $\sqrt{13/2}$ (circonferenza che contiene la palla B), abbiamo che il volume può essere calcolato come integrale triplo della funzione $f(x, y, z) = 1$ sul dominio E che è normale rispetto alla variabile z. Otteniamo quindi che

$$\mathrm{Vol}(E) = \int_E dxdydz = \int_B dxdy \int_{x^2+y^2-2}^{4-x-y} dz = \int_B (6 - x - y - x^2 - y^2) dxdy$$

Quest'ultimo integrale può infine essere calcolato utilizzando le coordinate polari, in modo da ottenere

$$\mathrm{Vol}(E) = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 (6 - \varrho\cos\vartheta - \varrho \operatorname{sen}\vartheta - \varrho^2) \varrho d\varrho = \frac{11}{2}\pi.$$

Soluzione 6.21 - La funzione $f(x) = e^{-x^2}$ non ammette un'esplicita primitiva. Per calcolare quest'integrale usiamo un trucco: passiamo attraverso un integrale in $\mathbf{R}^2$. Valutiamo

$$\int_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy\,.$$

Usando le coordinate polari, il cui jacobiano è ρ, otteniamo

$$\int_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2}\,d\rho = \pi\,.$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy &= \int_{\mathbf{R}} dx\Big(\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2-y^2}\,dy\Big) = \\ &= \int_{\mathbf{R}} dx\Big(e^{-x^2}\int_{\mathbf{R}} e^{-y^2}\,dy\Big) = \\ &= \Big(\int_{\mathbf{R}} e^{-t^2}\,dt\Big)^2\end{aligned}$$

da cui si conclude che $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ e più in generale

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{-|x|^2}\,dx = (\pi)^{n/2}\,.$$

Soluzione 6.22 - Uso le coordinate polari modificate che possiamo chiamare coordinate ellittiche

$$(\rho, \vartheta) \mapsto (a\rho\cos\vartheta, b\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta)$$

che ha jacobiano $ab\rho$. L'area diventa

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \rho ab\,d\rho = \pi ab\,.$$

Soluzione 6.23 - Sfruttando la simmetria sia rispetto al piano x, y che rispetto al piano y, z il volume del solido risulta essere quattro volte il volume del solido delimitato inoltre dalle condizioni $x > 0$ e $z > 0$.

A questo punto usiamo le coordinate cilindriche con asse lungo l'asse z e centrate nell'origine: il cilindro è determinato dall'equazione

$$\rho^2 \cos^2 \vartheta + (\rho \operatorname{sen} \vartheta - a)^2 = a^2$$

che equivalentemente può essere scritto come

$$\rho(\rho - 2a \operatorname{sen} \vartheta) = 0$$

che ha soluzioni $\rho = 0$ e $\rho = 2a \operatorname{sen} \vartheta$. Quindi le limitazioni per le variabili sono

$$0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi/2\,, \qquad 0 \leqslant \rho \leqslant 2a \operatorname{sen} \vartheta\,.$$

Infine da $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ si ricava $z^2 = 4a^2 - \rho^2$ da cui le limitazioni sulla z diventano

$$0 \leqslant z \leqslant \sqrt{4a^2 - \rho^2}\,.$$

Quindi il volume è dato da

$$V = 4 \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{2a \text{ sen } \vartheta} d\rho \int_0^{\sqrt{4a^2 - \rho^2}} \rho dz$$

che fornisce, usando il fatto che per $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi/2$ $\sqrt{1 - \text{ sen }^2 \vartheta} = \cos \vartheta$, il seguente risultato

$$V = \frac{16}{9}(3\pi - 4)a^3\,.$$

Soluzione 6.24 - L'insieme delimitato dagli estremi -1 e 1 per la variabile x e $|x|$ e $\sqrt{2 - x^2}$ per la variabile y è quello in Figura 6.8. Quindi l'integrale diventa

$$\int_0^1 dy \int_{-y}^{y} f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx\,.$$

Soluzione 6.25 - Uso le coordinate cilindriche

$$\int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{z/\sqrt{\alpha}} \rho d\rho = \frac{h^3 \pi}{3\alpha}\,.$$

Provare alternativamente ad usare la formula per i solidi di rotazione (si veda la soluzione dell'Esercizio 6.18).

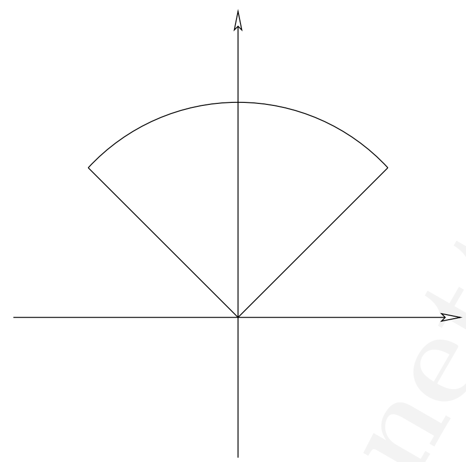


Figura 6.8:

Soluzione 6.26 - Utilizziamo le coordinate cilindriche

$$x = \rho\cos\vartheta\,, \quad y = t\,, \quad z = \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,,$$

con $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ e $\rho \leqslant t \leqslant \sqrt{2-\rho^2}$. L'integrale diventa

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 d\rho \int_\rho^{\sqrt{2-\rho^2}} \left(\rho\,\frac{\rho^2\cos^2\vartheta}{\rho^2}\right) dt = (2\sqrt{2}-2)\frac{\pi}{3}\,.$$

Provare anche ad utilizzare le coordinate sferiche (opportunamente!).

Soluzione 6.27 - L'insieme E è quello a sinistra in Figura 6.9. Sicuramente l'integrale esiste perché la funzione integranda è limitata e quindi $|\int_E f dxdy| \leqslant |E|$.
Un modo di risolvere questo integrale è effettuare il cambio di variabile

$$\phi(s,t) = \Big(\frac{s}{1+t}, \frac{st}{1+t}\Big)\,, \qquad 0 \leqslant s \leqslant 2\,, 1 \leqslant t \leqslant 2\,.$$

che porta il rettangolo $\widetilde{E}$ in E. Il cambio ϕ si ottiene ponendo $y/x = t$ e $x + y = s$. Lo jacobiano è dato da $\frac{s}{(1+t)^2}$, per cui si perviene all'integrale

$$\int_0^2 ds \int_1^2 dt \frac{s}{(1+t)^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{1+t}$$

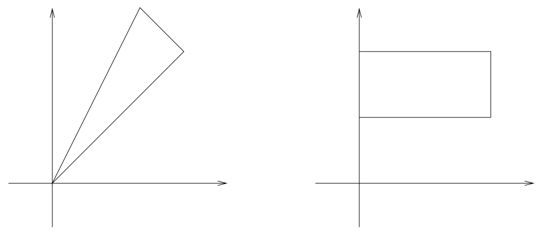


Figura 6.9: a sinistra l'insieme E, a destra $\widetilde{E}$

che risolto è

$$\int_0^2 \frac{s}{\pi} \cos \frac{\pi}{1+t}\Big|_{t=1}^{t=2} ds = \int_0^2 \frac{s}{\pi}\Big(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{2}\Big) ds = \frac{1}{\pi}\big(\sqrt{3} - \sqrt{2}\big)\,.$$

Provare anche con il cambio di variabile

$$\psi(s,t) = (s - ts, ts)\,, \qquad 0 \leqslant s \leqslant 2\,, \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{2}{3}\,.$$

che mappa $\widetilde{\widetilde{E}}$ in E come indicato in Figura 6.10.

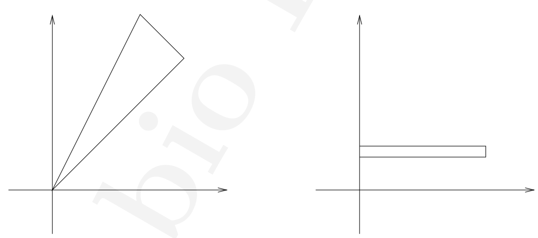


Figura 6.10: a sinistra l'insieme E, a destra $\widetilde{\widetilde{E}}$

Soluzione 6.28 - Per calcolare l'integrale dato, proviamo ad effettuare un cambio di variabili in modo che la funzione integranda si semplifichi ed in modo tale che la matrice del cambiamento di coordinate non dia problemi nell'integrazione e, ancora, che nel nuovo sistema di riferimento l'insieme su cui si vuole integrare non si complichi. Un modo per non avere problemi con la matrice del cambiamento di coordinate è fare in modo che tale matrice abbia determinante pari a 1; particolari trasformazioni con tale determinante sono le rotazioni, trasformazioni che hanno il vantaggio nel nostro caso di trasformare la palla B centrata nell'origine e di raggio 1 in se stessa.

Cerchiamo quindi una rotazione dello spazio che ad esempio mandi il piano $x + y + z = 0$ nel piano determinato nelle nuove coordinate (u, v, w) ad esempio da $u = 0$. Una tale rotazione è data ad esempio

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Con tale trasformazione si ottiene che l'integrale diventa

$$\int_B \operatorname{sen}(x + y + z)dxdydz = \int_B \operatorname{sen}(u\sqrt{3})dudvdw.$$

A questo punto notiamo che la funzione integranda è dispari nella variabile u e il dominio B è simmetrico rispetto a tale variabile, e quindi si ottiene che

$$\int_B \operatorname{sen}(u\sqrt{3})dudvdw = 0.$$

Soluzione 6.29 - Notiamo che l'insieme di integrazione è invariante per rotazioni intorno all'asse z; seguendo la discussione del punto precedente, cerchiamo una rotazione dello spazio in modo che il piano $x + y = 0$ diventi nelle nuove coordinate (u, v, w) il piano $u = 0$ e consideriamo una rotazione che lasci inalterato l'insieme di integrazione, cioè una rotazione effettuata attorno all'asse z. Una tale rotazione è data ad esempio da

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

L'integrale diventa quindi

$$\int_E e^{\frac{x+y}{\sqrt{2}}} dxdydz = \int_E e^u dudvdw = \int_{I_u} e^u A_u du,$$

dove A_u è l'area dell'ellisse

$$E_u = \left\{(v,w) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{v^2}{a^2-u^2} + \frac{a^2}{b^2}\frac{z^2}{a^2-u^2} \right\}$$

e $I_u = [-a,a]$. In definitiva troviamo che

$$\int_E e^{\frac{x+y}{\sqrt{2}}} dxdydz \quad = \quad \int_{-a}^{a} e^u \pi \frac{b}{a}\left(a^2-u^2\right) du = 2\pi\frac{b}{a}((a-1)e^a + (a+1)e^{-a})$$

Soluzione 6.30 - Parametrizzando con le coordinate sferiche la superficie

$$f(\vartheta,\varphi) = (r\cos\vartheta \operatorname{sen}\varphi, r\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\varphi, r\cos\varphi)$$

con $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Le derivate sono

$$f_\vartheta(\vartheta,\varphi) = (-r\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\varphi, r\cos\vartheta\operatorname{sen}\varphi, 0)\,,$$
$$f_\varphi(\vartheta,\varphi) = (r\cos\vartheta\cos\varphi, r\operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi, -r\operatorname{sen}\varphi)\,.$$

Il prodotto vettoriale è dato da

$$f_\vartheta \wedge f_\varphi = -r^2(\cos\vartheta\operatorname{sen}^2\varphi,\ \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}^2\varphi,\ \operatorname{sen}^2\vartheta\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + \cos^2\vartheta\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi)$$

da cui

$$|f_\vartheta \wedge f_\varphi| = r^4\operatorname{sen}^2\varphi\,.$$

Quindi se S è la sfera l'area è

$$\int_S d\sigma = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\pi} d\varphi\, r^2\operatorname{sen}\varphi = 4\pi r^2\,.$$

Soluzione 6.31 - La superficie S può essere vista come il grafico della funzione $f(x,y) = x^2+y^2$ definita nel dominio $C = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\right\}$ (si veda la Figura 6.11). L'integrale diventa

$$\int_S d\sigma = \int_C \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dxdy$$

che trasformato in coordinate polari diventa

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 d\rho\,\rho\sqrt{1+4\rho^2} = \frac{4}{3}\pi\,.$$

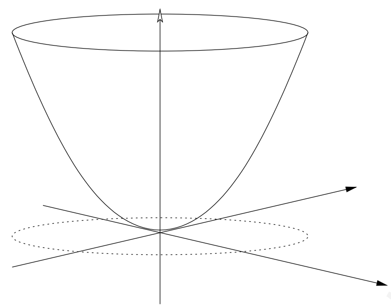


Figura 6.11:

Soluzione 6.32 - L'integrale che si vuole calcolare è l'integrale della funzione

$$f(x,y,z) = \frac{z+y^2}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}}$$

sulla superficie, data come grafico della funzione

$$z = g(x,y) = x^2 - y^2$$

sul dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \geqslant 1, x^2+4y^2 \leqslant 4\}.$$

Usando quindi la definizione di integrale superficiale, si ottiene che

$$d\sigma = \sqrt{1+|\nabla g(x,y)|^2}dxdy = \sqrt{1+4(x^2+y^2)}dxdy,$$

da cui

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \frac{z+y^2}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}}d\sigma &= \int_D \frac{x^2-y^2+y^2}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}}\sqrt{1+4(x^2+y^2)}dxdy \\ &= \int_D x^2 dxdy = \frac{7}{4}\pi. \end{aligned}$$

Soluzione 6.33 - La superficie sulla quale si vuole calcolare l'integrale è dato dal grafico della funzione

$$z = g(x,y) = x^2 + y^2$$

con $(x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2-y \leqslant 0\,,\ y \geqslant 1/2\,,\, x \geqslant 0\}$. Quindi otteniamo che

$$d\sigma = \sqrt{1+|\nabla g(x,y)|}dxdy = \sqrt{1+4(x^2+y^2)}dxdy$$

e l'integrale di superficie diventa quindi

$$\int_D \frac{x}{\sqrt{4(x^2+y^2)+1}}\sqrt{1+4(x^2+y^2)}dxdy = \int_D xdxdy = \frac{1}{24}.$$

Soluzione 6.34 - Denotato con C il cerchio di raggio r centrato nell'origine, per il teorema della divergenza si ha

$$\mathrm{Area}(C) = \int_C 1\, dxdy = \int_{\partial C} F\cdot\nu\, ds$$

dove F è un qualunque campo cha abbia divergenza 1 e ν la normale esterna al bordo di C. Si può prendere $F(x,y) = (\alpha x, \beta y)$ con $\alpha + \beta = 1$, l'esempio più semplice è prendere $\alpha = \beta = 1/2$. Parametrizzando poi la circonferenza con $(r\cos t, r \operatorname{sen} t)$ si ottiene

$$\int_{\partial C} F\cdot\nu\, ds = \int_0^{2\pi}\Big[\frac{r^2}{2}\cos^2 t + \frac{r^2}{2}\operatorname{sen}^2 t\Big]dt = r^2\pi\,.$$

Soluzione 6.35 - Per calcolare il flusso di tale campo si può procedere in due modi: scrivendo l'integrale di superficie oppure cercare di applicare il Teorema della divergenza in $\mathbf{R}^3$. Lasciamo il primo caso come esercizio e vediamo come procedere nel secondo caso. Per poter applicare il Teorema dalla divergenza dobbiamo avere a che fare con superfici chiuse, quindi, siccome nel nostro caso abbiamo solo l'emisfero superiore E della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, dobbiamo prima di tutto chiudere tale superficie; il modo più semplice per fare ciò è considerare l'insieme

$$\Sigma = \{(x,y,0) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2 \leqslant 16\}.$$

A questo punto abbiamo che, se

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z \geqslant 0\,,\, x^2+y^2+z^2 \leqslant 16\},$$

allora $\partial A = \Sigma \cup S$ e quindi

$$\int_{\Sigma \cup S} F \cdot \nu \, d\sigma = \int_{\partial A} F \cdot \nu \, d\sigma = \int_A \mathrm{div} F dxdydz.$$

Quindi, dato che $\mathrm{div} F = 0$,

$$\int_S F \cdot \nu \, d\sigma = -\int_\Sigma F \cdot \nu \, d\sigma.$$

Su Σ si ha che $F(x,y,0) = (x^3, 0, 3x^2)$, $\nu = (0,0,-1)$ e $d\sigma = dxdy$, quindi, definito $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 16\}$, si ha

$$\int_\Sigma F \cdot \nu \, d\sigma = -\int_C 3x^2 dxdy = -192\,\pi;$$

Concludendo si ha che

$$\int_S F \cdot \nu \, d\sigma = 192\pi.$$

Soluzione 6.36 - Utilizzando il Teorema della divergenza, tenendo presente che $\mathrm{div} F(x,y,z) = 2x + 2$, otteniamo che

$$\begin{aligned}\int_{\partial T} F \cdot \nu d\sigma &= \int_T \mathrm{div} F dxdydz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (2x+2) dz = \frac{5}{12}.\end{aligned}$$

Per controllare che tale risultato sia giusto, si potrebbe calcolare l'integrale di superficie del campo vettoriale F.

Soluzione 6.37 - Notiamo anzitutto che il campo dato ha la proprietà che $\mathrm{div} F(x,y,z) = 0$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Questo vuol dire che se T è un qualsiasi dominio che non contiene l'origine, si ha che

$$\int_{\partial T} F \cdot \nu d\sigma = 0.$$

A questo punto, se $\Sigma = \partial A$ è una qualsiasi superficie chiusa che contiene al suo interno l'origine, non possiamo concludere che il flusso sia nullo in quanto la singolarità del campo F cade proprio nella porzione di spazio racchiusa dalla superficie Σ. Siccome l'origine è un punto interno a Σ, esisterà un raggio R tale che la palla $B_R(0)$ è tutta contenuta all'interno di Σ consideriamo quindi la porzione di spazio $T = A \setminus B_R(0)$, abbiamo che $\partial T = \Sigma \cup \partial B_R(0)$ e a questo punto l'origine non è più all'interno di T, quindi

$$0 = \int_T \mathrm{div} F dxdydz = \int_\Sigma F \cdot \nu d\sigma - \int_{\partial B_R(0)} F \cdot \nu d\sigma$$

dove il segno meno nell'ultimo integrale tiene conto che ν è la normale esterna alla palla $B_R(0)$ che però rappresenta in tali punti la normale entrante nella regione T. Quindi

$$\int_\Sigma F \cdot \nu d\sigma = \int_{\partial B_R(0)} F \cdot \nu d\sigma;$$

su $\partial B_R(0)$ abbiamo che il campo si scrive

$$F(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{R^3}$$

mentre la normale uscente da $B_R(0)$ si scrive come

$$\nu(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{R}.$$

Per calcolare l'integrale utilizziamo le coordinate polari e tenendo presente che $d\sigma = R^2 \operatorname{sen} \varphi d\varphi d\vartheta$, otteniamo che

$$\int_{\partial B_R(0)} F \cdot \nu d\sigma = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2} R^2 \operatorname{sen} \varphi d\vartheta = 4\pi.$$

Soluzione 6.38 - Si noti anzitutto che $\mathrm{div} F = 0$. Volendo applicare il teorema della divergenza dobbiamo considerare una superficie chiusa, dobbiamo cioè chiudere la superficie data. Per fare questo possiamo ad esempio considerare la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = 4, x^2 + y^2 \leqslant 4\}.$$

Se poniamo

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leqslant z \leqslant 4\,,\, x^2 + y^2 \leqslant 4\}$$

abbiamo che $\partial A = S \cup \Sigma$, e quindi dalla condizione $\text{div} F = 0$ si ricava che

$$\int_{\Sigma} F \cdot \nu \, d\sigma = -\int_{S} F \cdot \nu \, d\sigma.$$

Ma su S la normale uscente è data dal vettore $(0,0,1)$ e $d\sigma = dxdy$, quindi

$$\int_{\Sigma} F \cdot \nu \, d\sigma = \int_{C} x^3 y \, dxdy = 0,$$

dove $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.