Capitolo Quinto

CALCOLO DIFFERENZIALE DELLE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI ED ELEMENTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE DELLE SUPERFICIE

Contenuto del capitolo.

- Continuità delle funzioni scalari e vettoriali di n variabili. Funzioni continue su insiemi chiusi e limitati e su insiemi connessi. Limiti.
- Derivate direzionali e parziali. Gradiente. Matrici jacobiane. Derivate delle funzioni composte.
- Differenziale. Formule di Taylor. Massimi e minimi relativi e condizionati.
- Superficie, piani tangenti, curve su una superficie.

Scopi del capitolo.

Questo capitolo deve mettere lo studente in grado di fare le seguenti cose:

- Riconoscere se una funzione è continua.
- Calcolare derivate parziali e direzionali, gradiente, matrici jacobiane, differenziali, formule di Taylor.
- Trovare i massimi e minimi relativi e condizionati delle funzioni scalari di più variabili.
- Trovare il piano tangente a una superficie in un punto.

Motivazione del capitolo.

Questo capitolo è una introduzione ad alcuni strumenti di calcolo indispensabili per lo studio di vari fenomeni fisici. Esso è utile inoltre per lo studio dell'integrazione delle funzioni e delle forme differenziali e per varie questioni di geometria differenziale.

0. Premessa

Nel vol. I sono state studiate a fondo le funzioni reali di una variabile reale e nel cap. IV le funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Ci proponiamo ora di iniziare lo studio di funzioni più generali, cioè di funzioni di più variabili, che possono assumere valori in $\mathbb{R}^m$.

In questo capitolo daremo la nozione di funzione continua e introdurremo le prime regole e i primi risultati sulle derivate, che saranno poi applicate all'importante problema dell'approssimazione delle funzioni (differenziale, formula di Taylor) e per la ricerca dei massimi e dei minimi relativi e condizionati.

1. Generalità sulle funzioni di più variabili e sulle funzioni vettoriali

Nel corso di Analisi Matematica I si sono studiate le funzioni reali di una variabile reale, cioè le applicazioni $f : I \to \mathbb{R}$, dove I è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

Ci proponiamo ora di sostituire I con un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ (ottenendo così le funzioni reali di n variabili) ed $\mathbb{R}$ con $\mathbb{R}^m$ (ottenendo così le funzioni vettoriali).

1.1. *Funzioni reali di n variabili*

Una *funzione reale di n variabili* è una applicazione

$$f : I \to \mathbb{R} \qquad \text{dove } I \subset \mathbb{R}^n .$$

Ciò vuol dire che f è una legge che ad ogni $P \in I$ fa corrispondere uno e un solo numero reale. Il numero reale che f fa corrispondere a P si denota con $f(P)$ e si chiama *valore di f in P* o *immagine di P* mediante f. L'insieme I si chiama *dominio* di f.

Se $P = (x_1, ..., x_n)$ si scrive anche

$$f(x_1, ..., x_n) \qquad \text{invece di} \quad f(P) \ .$$

In accordo con le definizioni del corso di Analisi Matematica I una *funzione* di n variabili si può denotare anche con

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ .$$

In tal caso il dominio di f non è necessariamente $\mathbb{R}^n$, ma un suo sottoinsieme I in cui f sia definita.

Esempio 1. Se $n = 1$ le funzioni del tipo precedente sono quelle del corso di Analisi matematica I.

Esempio 2. L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da: $f(x, y) = x + y$ è una funzione di due variabili. Il dominio di f è $I = \mathbb{R}^2$. Il valore di f in $P = (1, 2)$ è $f(P) = 1 + 2 = 3$.

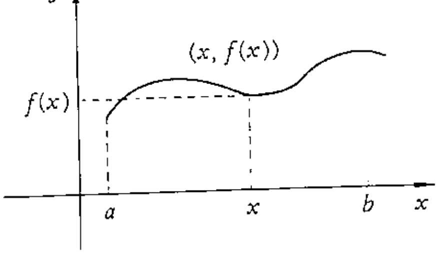
Esempio 3. Le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sono funzioni di n variabili.

Esempio 4. Nei capitoli I e II abbiamo incontrato varie funzioni di due e tre variabili, nelle equazioni parametriche e cartesiane delle curve e delle superfici.

Esempio 5. Moltissimi fenomeni fisici sono rappresentati da funzioni di più di una variabile. Ad esempio la temperatura di un punto dello spazio è una funzione delle tre coordinate del punto.

1.2. *Grafico di una funzione di due variabili*

Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ di una variabile reale è rappresentata geometricamente dal suo grafico, cioè dai punti del piano Oxy di coordinate $(x\ , f(x))$ dove x varia nel dominio di f.



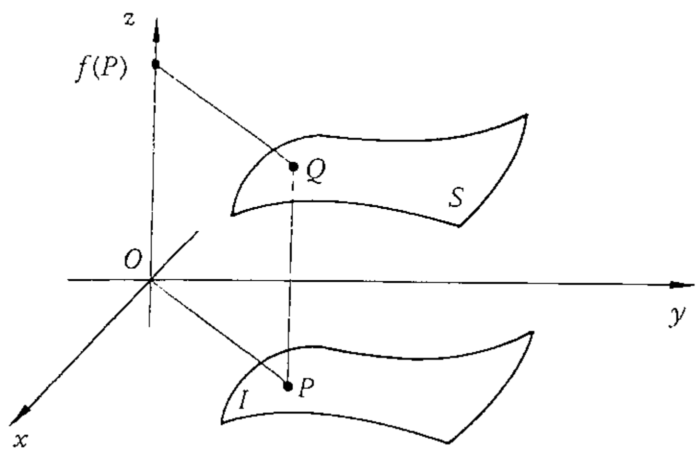
$I = [a, b]$

In genere questo grafico sarà una curva del piano Oxy.

Se $f : I \to \mathbb{R}$ è invece una funzione di due variabili (cioè $I \subset \mathbb{R}^2$), la funzione f si può rappresentare geometricamente con un grafico nello spazio $Oxyz$. Più precisamente il grafico di f è l'insieme

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y) \ \ \& \ \ (x, y) \in I\} \ .$$

In genere questo grafico è una superficie (con equazione $z = f(x, y)$, $(x, y) \in I$).



Q è il punto di coordinate $(x, y, f(x, y))$ dove (x, y) sono le coordinate di P sul piano Oxy.

S è il grafico di f.

Esempio 1. Il grafico della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita dalla formula $f(x, y) = x + y$ è il piano di equazione $x + y - z = 0$.

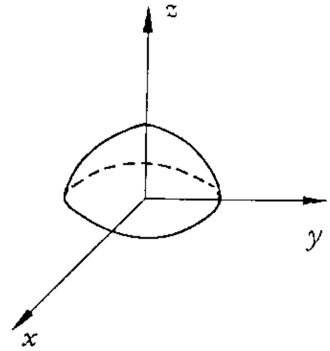
Esempio 2. Il grafico della funzione $f : I \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \quad \text{dove} \quad I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

è la superficie di equazione $\sqrt{1 - (x^2 + y^2)} - z = 0$ ossia

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \qquad \text{con} \quad z \geq 0 \ .$$

Si tratta dunque della semisuperficie sferica di centro O e raggio 1.



Esempio 3. Una superficie S di equazione $g(x, y, z) = 0$ è il grafico di una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ se e solo se per ogni $P \in I$ la parallela all'asse z passante per P incontra S in un solo punto. In tal caso f è definita così:

$f(P) =$ terza coordinata del punto in cui la parallela all'asse z passante per P incontra S (cfr. figura a pagina 4).

In particolare: una superficie sferica non rappresenta nessuna funzione, un piano rappresenta una funzione se e solo se non è parallelo all'asse z, etc.

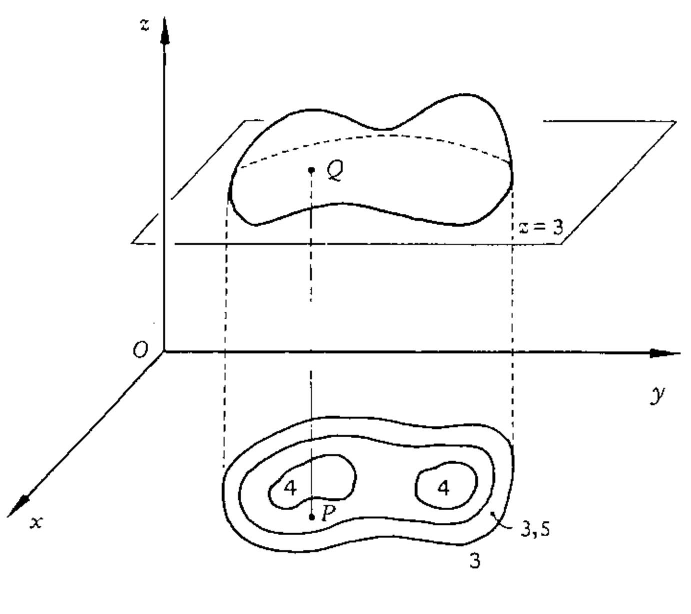
Osservazione. Per funzioni di tre o più variabili il grafico si può definire in modo analogo. Trattandosi però di una figura in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 4$ non è possibile tracciare un disegno.

1.3. *Curve di livello*

Una funzione di due variabili si può rappresentare sul piano Oxy mediante le *curve di livello*. Se $f : I \to \mathbb{R}$ è una tale funzione, la curva di livello c di f è la curva del piano Oxy avente equazione

$$f(x, y) = c \qquad (x, y) \in I \ .$$

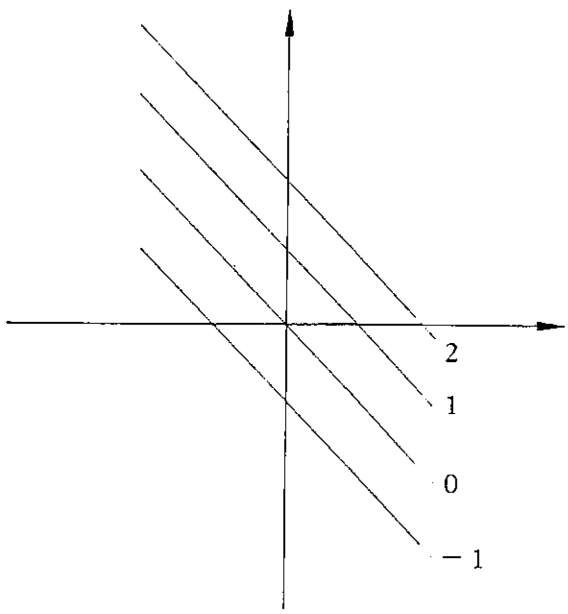
Questa curva è la proiezione sul piano Oxy dell'intersezione del grafico di f col piano di equazione $z = c$.



Avendo a disposizione un numero sufficiente di curve di livello e il livello di ognuna si possono avere informazioni sull'andamento di f. Ciò risulta più evidente se i livelli variano con intervalli fissi (ad esempio $f(x,y) = 1$, $f(x,y) = 2$, $f(x,y) = 3$ etc.). In tal caso, ad esempio, quanto più le curve sono fitte, tanto più il grafico di f è "ripido".

Questo tipo di rappresentazione è usata nelle carte geografiche per indicare l'altitudine: di qui il nome di curve di livello.

Esempio 1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da: $f(x,y) = x + y$. Le curve di livello di f sono le rette di equazione $x + y = c$. Disegnamone alcune.



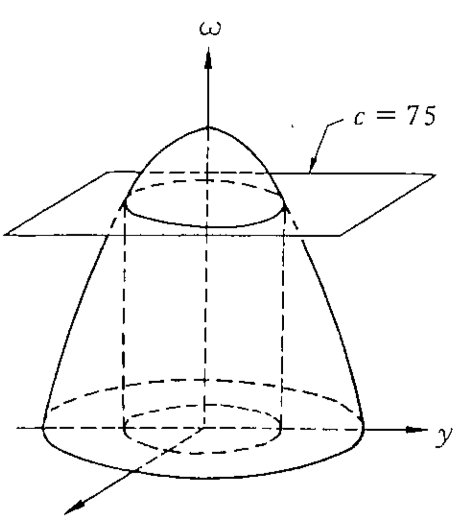
Esempio 2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = 100 - x^2 - y^2 .$$

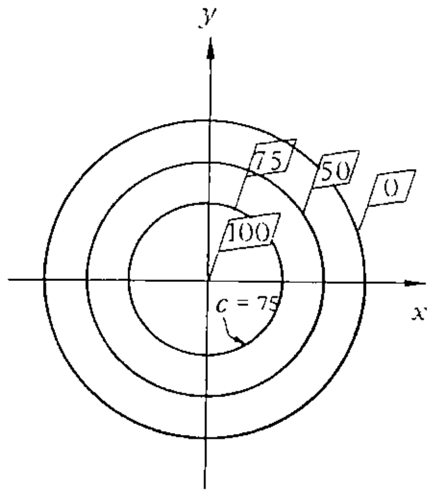
Il grafico di f è un paraboloide di rotazione. Le curve di livello hanno equazione

$$100 - x^2 - y^2 = c$$

e quindi per $c < 100$ sono circonferenze.



(a)



(b)

1.4. *Superficie di livello*

Se f è una funzione di tre variabili, le superficie di equazione $f(x,y,z) = c$ si chiamano *superficie di livello.* Esse sono utili come le curve di livello per studiare graficamente l'andamento di f e presentano il vantaggio di dare una rappresentazione grafica nello spazio ordinario $\mathbb{R}^3$, mentre il grafico di f è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$.

Esempio. Se f è la funzione definita della formula $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, le superfici di livello di f sono superfici sferiche di centro l'origine.

1.5. *Funzioni vettoriali di n variabili*

Un'applicazione

$$f : I \to \mathbb{R}^m \qquad \text{con} \quad I \subset \mathbb{R}^n$$

si chiama anche *funzione vettoriale di n variabili* (definita in I e a valori in $\mathbb{R}^m$). Come per le funzioni a valori reali si dice che I è il dominio di f, e il punto di $\mathbb{R}^m$ corrispondente a $P \in \mathbb{R}^n$ si indica con $f(P)$.

Una funzione vettoriale si può anche rappresentare mediante m funzioni a valori reali, cioè:

$$f(x_1, ..., x_n) = (f_1(x_1, ..., x_n) \, , \, ... \, , \, f_m(x_1, ..., x_n)) \; .$$

Esempio 1. Le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ viste nel cap. IV sono funzioni vettoriali di una variabile.

Esempio 2. La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(u,v) = (\cos u \sin v\,,\ \sin u \sin v\,,\ \cos v)$$

è una funzione vettoriale di due variabili. L'insieme $f(\mathbb{R}^2)$ è la superficie sferica di centro O e raggio 1.

Esempio 3. Le applicazioni lineari $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sono funzioni vettoriali di n variabili.

2. Funzioni continue

Ci proponiamo ora di estendere la nozione di funzione continua (già studiata nel corso di Analisi Matematica I per funzioni di una variabile) alle funzioni di n variabili e alle funzioni vettoriali e di studiare alcune proprietà importanti delle funzioni continue.

A. LA DEFINIZIONE DI FUNZIONE CONTINUA

Nel corso di Analisi Matematica I la definizione di funzione continua è stata data nel modo seguente:

la funzione $f : I \to \mathbb{R}$ $(I \subset \mathbb{R})$ è continua in $x_0 \in I$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|x - x_0| < \delta \ \ \&\ \ x \in I = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\ ,$$

dove $|x - x_0| < \delta$ significa: *distanza* fra x_0 e x minore di δ.

Per definire la continuità più in generale faremo uso del concetto di *distanza*, introdotto nel cap. IV, **1.1**.

2.1. *Definizione di continuità* "con ε e δ".

Una funzione $f : I \to \mathbb{R}^m$ $(I \subset \mathbb{R}^n)$ è continua in $P_0 \in I$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

$$||P - P_0|| < \delta \ \ \&\ \ P \in I \Rightarrow ||f(P) - f(P_0)|| < \varepsilon$$

f è continua in I se è continua in ogni punto di I.

Questa definizione coincide, per $n = 1$, con l'analoga definizione data nel cap. IV.

Esempio 1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y) = x + y \ .$$

Allora f è continua in ogni punto di $\mathbb{R}^2$ (cioè è continua in $\mathbb{R}^2$). Infatti se $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ si ha:

$$\begin{aligned} |f(P) - f(P_0)| &= |x + y - (x_0 + y_0)| \\ &= |(x - x_0) + (y - y_0)| \\ &\leq |x - x_0| + |y - y_0| \\ &\leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \\ &= 2\,||P - P_0|| \ . \end{aligned}$$

Quindi se $\varepsilon > 0$ e $\delta = \varepsilon/2$ si ha:

$$|f(P) - f(P_0)| \leq 2\,||P - P_0|| < 2\delta = \varepsilon \ .$$

Cioè: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ (cioè $\delta = \varepsilon/2$) tale che

$$||P - P_0|| < \delta \ \ \& \ \ P \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow |f(P) - f(P_0)| < \varepsilon$$

in accordo con la definizione di continuità.

Ad esempio: se $\varepsilon = 1/2$ si può prendere $\delta = 1/4$. Allora se

$$||P.P_0|| < \frac{1}{4} \qquad \text{si ha} \qquad |f(P) - f(P_0)| < \frac{1}{2}$$

Analogamente: se $\varepsilon = \dfrac{1}{1000}$ basta prendere $\delta = \dfrac{1}{2000}$ e si ha:

$$||P - P_0|| < \frac{1}{2000} \Rightarrow |f(P) - f(P_0)| < \frac{1}{1000}$$

e così via per ogni $\varepsilon > 0$.

Esempio 2 (continuità delle funzioni coordinate). Sia $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$p_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i \ .$$

Allora p_i è continua in ogni $P \in \mathbb{R}^n$. Infatti per ogni $\varepsilon > 0$ basta prendere $\delta = \varepsilon$, come si verifica facilmente.

La funzione p_i si chiama anche *i-esima funzione coordinata* definita in $\mathbb{R}^n$.

B. ESEMPI DI FUNZIONI CONTINUE

2.2. *Operazioni con le funzioni continue*

Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ $(I \subset \mathbb{R}^n)$ due funzioni continue. Allora le seguenti funzioni sono continue:

– la somma $f + g$ (definita da: $(f+g)(P) = f(P) + g(P)$, $P \in I$);
– il prodotto fg (definito da: $(fg)(P) = f(P)\, g(P)$, $P \in I$);
– il quoziente f/g (definito, quando $g(P) \neq 0$, da $(f/g)(P) = f(P)/g(P)$).

Se poi $f, g : I \to \mathbb{R}^m$ sono due funzioni continue $(I \subset \mathbb{R}^n)$, sono continue anche

– la somma $f + g$ (definita come sopra)
– il prodotto af (definito da $(af)(P) = af(P)$), dove $a \in \mathbb{R}$.

Questi fatti si verificano come per le funzioni reali di una variabile reale, oppure seguono dal prossimo teorema **2.3.**

Diamo ora altri due utili risultati, sulle funzioni continue.

2.3. Teorema (continuità delle funzioni composte). *La composizione di due funzioni continue è una funzione continua.*

Più precisamente, se le funzioni

$$f : I \to \mathbb{R}^m \qquad I \subset \mathbb{R}^n$$
$$g : J \to \mathbb{R}^p \qquad f(I) \subset J \subset \mathbb{R}^m$$

sono continue, la funzione

$$g \circ f : I \to \mathbb{R}^p \quad \text{(definita da: } (g \circ f)(P) = g(f(P)) \text{ per ogni } P \in I)$$

è continua.

Esempio. La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = x + y$ è continua. La funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(t) = \cos t$ è continua. La funzione composta $g \circ f$ è la funzione $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$(g \circ f)(x, y) = g(f(x, y)) = g(x + y) = \cos(x + y) .$$

Per il teorema **2.3** questa funzione è continua.

2.4. Teorema (continuità delle funzioni vettoriali). *Sia* $f : I \to \mathbb{R}^m$ $(I \subset \mathbb{R}^n)$ *la funzione definita da:*

$$f(x_1, ..., x_n) = (f_1(x_1, ..., x_n) , \ldots , f_m(x_1, ..., x_n)) .$$

Allora f *è continua se e solo se* $f_1, ..., f_n$ *sono continue.*

Esempio. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(t) = (3t + 1 , 2t , t - 1)$ è continua. Infatti le funzioni

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{definita da} \qquad f_1(t) = 3t + 1 , \qquad \text{etc.}$$

sono continue.

2.5. ***Osservazione.*** Le proprietà ora viste estendono quanto provato nel cap. IV **1.3, 1.4, 1.8** per le funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ (ponendo $n = 1$ ritroviamo esattamente quei fatti).

2.6. ***Alcuni esempi di funzioni continue***

Funzioni polinomiali

Abbiamo visto che le funzioni coordinate $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (definite da: $p_i(x_1, ..., x_n) = x_i$) sono continue (cfr. **2.1**, es. 2). Da **2.2** segue allora che le funzioni ottenute da $p_1, ..., p_n$ mediante somme e prodotti sono continue. Le funzioni così ottenute si chiamano anche *funzioni polinomiali* o *razionali intere* di n variabili.

Esempio 1. La funzione f di tre variabili definita da $f(x, y, z) = x^2 + y^3 - xyz$ è una funzione polinomiale, quindi continua.

Funzioni razionali

Se f, g sono due funzioni polinomiali di n variabili, la funzione f/g è continua in tutti i punti in cui è definita (cfr. **2.2**). Le funzioni di questo tipo si chiamano *funzioni razionali* di n variabili. Le funzioni polinomiali sono particolari tipi di funzioni razionali.

Esempio 2. La funzione di due variabili definita da $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^3}{x+y}$ è una funzione razionale (definita per $x+y\neq 0$), quindi continua in tutti i punti in cui è definita.

Esponenziale, seno, logaritmo etc. di funzioni continue.

Se f è una funzione continua di n variabili, le seguenti funzioni sono continue per **2.3** (in tutti i punti in cui sono definite).

- La funzione g definita da: $g(P)=e^{f(P)}$
- La funzione h definita da: $h(P)=\sin f(P)$
- La funzione l definita da: $l(P)=\log f(P)$
- etc.

Esempio 3. Le funzioni definite delle seguenti formule sono continue in tutti i punti in cui sono definite:

$$f(x,y,z)=e^{x^2+y^3-xyz}$$

$$f(x,y)=\cos\frac{x^2+y^3}{x+y}$$

$$f(x,y,z,t)=\log(t+\sqrt{x+y-z^2})\ .$$

Funzioni composte con una funzione vettoriale

Sia f una funzione continua e siano $g_1,...,g_n$ n funzioni continue di m variabili. Allora la funzione F definita dalla formula

$$F(x_1,...,x_m)=f\big(g_1(x_1,...,x_m)\,,\,...\,,\,g_n(x_1,...,x_m)\big)$$

è continua in tutti i punti di $\mathbb{R}^m$ in cui è definita. Infatti F è la composizione di f con la funzione vettoriale g definita dalla formula:

$$g(x_1,...,x_m)=\big(g_1(x_1,...,x_m)\,,\,...\,,\,g_n(x_1,...,x_m)\big)\ .$$

La g è continua per **2.4**.

Esempio 4. Se f è una funzione continua di tre variabili, la funzione F di una variabile definita da:

$$F(t) = f(lt + x_0\,,\ mt + y_0\,,\ nt + z_0)$$

è continua.

Le applicazioni lineari

Un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ è una funzione continua per **2.4**, in quanto è definita da m funzioni polinomiali.

C. FUNZIONI CONTINUE SUGLI INSIEMI CHIUSI E LIMITATI

Ci proponiamo di estendere alle funzioni di n variabili un enunciato visto nel corso di Analisi Matematica per funzioni reali di una variabile reale, cioè:

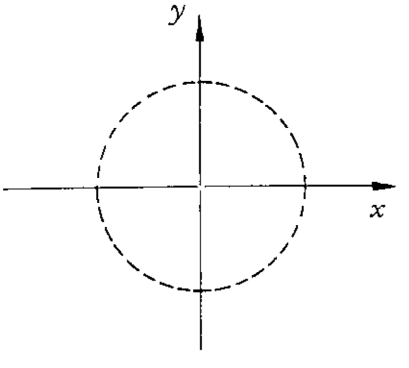
una funzione continua definita in un intervallo chiuso e limitato ha massimo e minimo.

Per ottenere il nostro scopo dobbiamo introdurre le nozioni di: insieme aperto, punto di accumulazione, insieme chiuso. Queste nozioni saranno utili anche per lo studio delle derivate.

2.7. *Insiemi aperti e insiemi chiusi in* $\mathbb{R}^n$.

Definizione di intorno: sia $P_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$ un numero reale; l'insieme $\mathcal{U} = \mathcal{U}(P_0, r) = \{P \in \mathbb{R}^n / \|P - P_0\| < r\}$ si dice *intorno di* P_0 *di raggio* r.

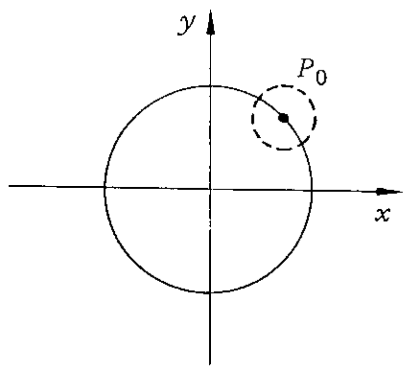
Esempio. Sia P_0 = origine del piano (x, y) e r un numero > 0. Allora $\mathcal{U}(P_0, r)$ = cerchio di centro l'origine e raggio r, *circonferenza esclusa.*



Definizione di punto interno: $P_0 \in I \subseteq \mathbb{R}^n$ è *interno* a I se I contiene almeno un intorno di P_0.

Esempio 1. L'origine è interna alla sfera di centro l'origine e raggio 1.

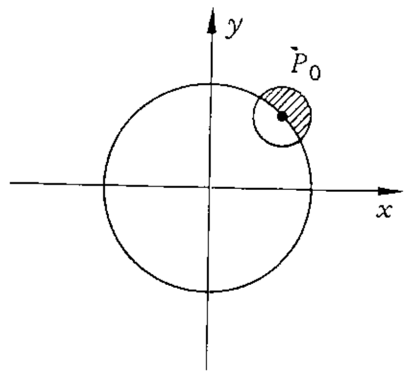
Esempio 2. $P_0 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ non è interno al cerchio definito dalla disequazione: $x^2 + y^2 \leq 4$:



Definizione di insieme aperto: $I \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *aperto* se, per ogni $P_0 \in I$, P_0 è interno a I.

Esempio 1. La sfera $S = \{P \in \mathbb{R}^3 / \|P - O\| < 9\}$ è un insieme aperto.

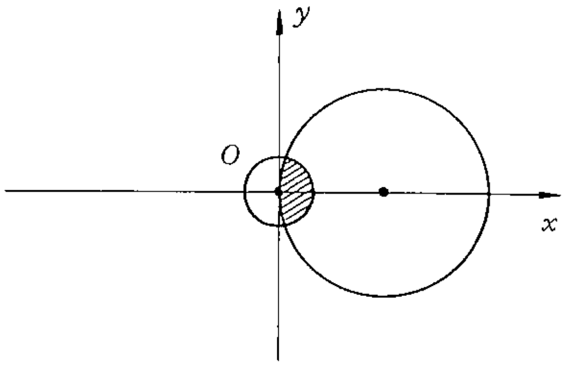
Esempio 2. Il cerchio $C = \{P \in \mathbb{R}^2 / \|P - O\| \leq 3\}$ non è un insieme aperto, in quanto contiene i punti della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 9$:



Esempio 3. Un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ è un insieme aperto di $\mathbb{R}$.

Definizione di punto di accumulazione: $P_0 \in \mathbb{R}^n$ è un *punto di accumulazione* per l'insieme $I \subseteq \mathbb{R}^n$ se ogni intorno di P_0 contiene punti di I distinti da P_0.

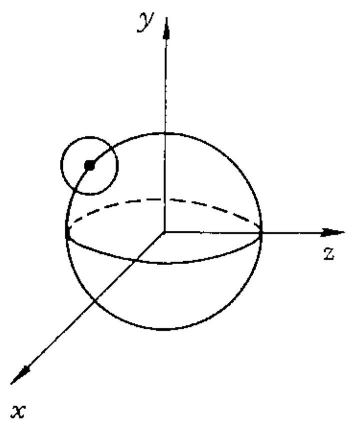
Esempio. L'origine è punto di accumulazione per il cerchio $C = \{P \in \mathbb{R}^2 / \|P - (1,0)\| < 1\}$ = cerchio di centro $(1, 0)$ e raggio 1:



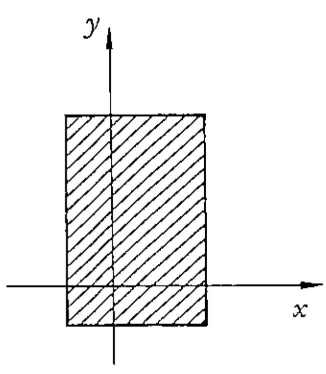
Definizione di insieme chiuso: $I \subseteq \mathbb{R}^n$ è *chiuso* se contiene tutti i suoi punti di accumulazione.

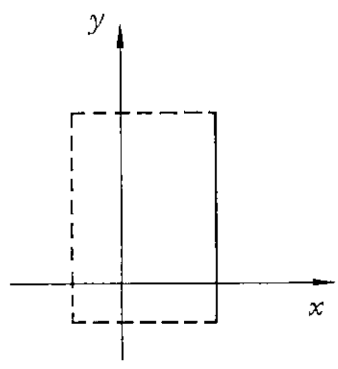
Esempio 1. Il cerchio $C = \{P \in \mathbb{R}^2 / \|P - O\| \leq 10\}$ è chiuso.

Esempio 2. La sfera $S = \{P \in \mathbb{R}^3 / \|P - O\| < 1\}$ non è un insieme chiuso, in quanto i punti della superficie sferica $\sigma = \{P \in \mathbb{R}^3 / \|P - O\| = 1\}$ sono punti di accumulazione per S ma non appartengono a S.



Esempio 3. Il rettangolo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq x \leq 2\,,\ -1 \leq y \leq 4\}$ è chiuso; mentre $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -1 < x \leq 1\,,\ -1 < y < 4\}$ non è chiuso:





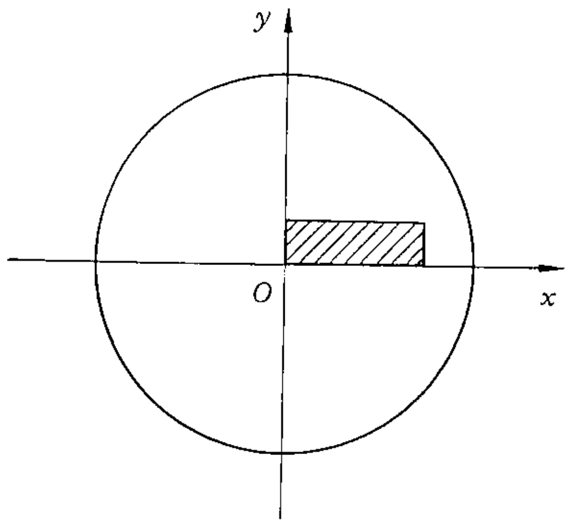
Osservazione. I concetti ora introdotti generalizzano ad $\mathbb{R}^n$ i concetti di intorno, aperto, chiuso, visti per la retta reale.

2.8. *Insiemi limitati*

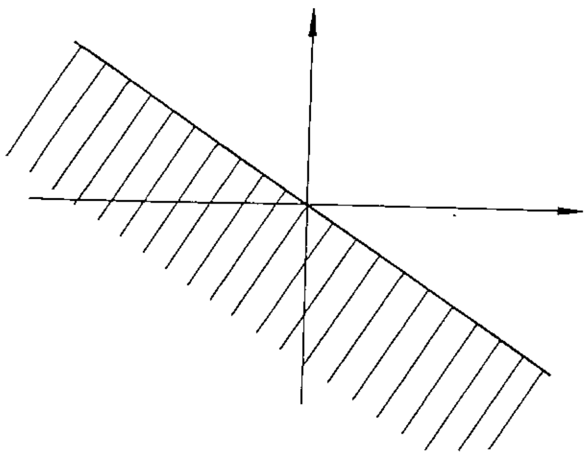
Un insieme $I \subset \mathbb{R}^n$ si dice *limitato* se esiste un intorno $\mathcal{U}(P_0, r)$ che lo contiene.

Esempio 1. Un insieme finito è limitato. $\mathbb{R}^n$ non è limitato.

Esempio 2. $I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3\,,\ 0 \leq y \leq 1\}$ è limitato. Infatti $I \subset \mathcal{U}(0,4)$.



Esempio 3. L'insieme $I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 0\}$ non è limitato.



Possiamo ora dare la generalizzazione del teorema sui massimi e minimi.

2.9. Teorema (esistenza del massimo e del minimo). *Sia* $I \subset \mathbb{R}^n$ *un insieme chiuso e limitato e sia* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *una funzione continua. Allora* f *ha un massimo e minimo* (in I).

Ricordiamo che il massimo di f (se esiste) è il più grande tra i numeri $f(P)$ $P \in I$. Quindi M è massimo di f se

a) $f(P) \leq M$, per ogni $P \in I$, e inoltre:

b) esiste un punto $P_0 \in I$ tale che $f(P_0) = M$.

Analogamente per il minimo.

Il teorema precedente vuol dire, dunque, che esistono due punti P_1 e $P_2 \in I$ tali che

$$f(P_1) \leq f(P) \leq f(P_2) \qquad \text{per ogni } P \in I\ .$$

Esempio 1. Sia $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$. Allora la funzione continua

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{definita da: } f(x, y) = x^2 + y^2$$

non ha minimo in I. Ciò non è in contraddizione col teorema **2.9**, in quanto I è limitato ma non è chiuso (il punto $(0,0)$ non appartiene ad I).

Esempio 2. Sia $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$. Allora la funzione continua

$$f : I \rightarrow \mathbb{R} \qquad \text{definita da} \qquad f(x, y) = x$$

ha minimo uguale a zero e non ha massimo. Si osservi che I è chiuso, ma non limitato.

D. LIMITI E CONTINUITÀ

Nel corso di Analisi Matematica I (e nel cap. IV) si è definita la continuità anche mediante il concetto di limite. Vediamo come questo concetto si può estendere a funzioni di tipo generale.

2.10. *Definizione di limite*

Siano $I \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme, P_0 un punto interno a I ed

$$f : I - \{P_0\} \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

una funzione. Sia poi $L \in \mathbb{R}^m$. Diciamo che L è il limite di $f(P)$ per P tendente a P_0:

$$L = \lim_{P \to P_0} f(P)$$

se si ha: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

$$0 < ||P - P_0|| < \delta \ \ \& \ \ P \in I \Rightarrow ||f(P) - L|| < \varepsilon \ .$$

Si noti che in questa definizione non si tiene conto del fatto che f sia definita o no nel punto P_0 o dell'eventuale valore che f può assumere in P_0.

2.11. *Limite di una funzione continua*

Sia $f : I \to \mathbb{R}^m$ una funzione definita nell'insieme $I \subset \mathbb{R}^m$ e sia P_0 un punto *interno* ad I. Allora f è continua in P_0 se e solo se

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0) \ .$$

Esempio 1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = \sin xy$. Poichè f è continua si ha:

$$\lim_{P \to (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0 \ .$$

2.12. *Limite di una funzione vettoriale*

Sia $f : I \to \mathbb{R}^m$ $(I \subset \mathbb{R}^n)$ la funzione definita da:

$$f(x_1, ..., x_n) = (f_1(x_1, ..., x_n) \, , \, ... \, , \, f_m(x_1, ..., x_n))$$

e sia P_0 un punto interno ad I. Allora le due condizioni seguenti sono equivalenti:

a) $\lim_{P \to P_0} f(P) = Q = (q_1, ..., q_m)$

b) $\lim_{P \to P_0} f_1(P) = q_1 \, , \, ... \, , \lim_{P \to P_0} f_m(P) = q_m$.

Ciò vuol dire, in sostanza, che i limiti delle funzioni vettoriali si possono studiare mediante le componenti.

2.13. *Proprietà dei limiti*

Tutte le proprietà dei limiti viste nel corso di Analisi Matematica I (e nel cap. IV) per funzioni di una variabile sono valide in generale (purchè abbiano senso).

Ad esempio per funzioni a valori in $\mathbb{R}^m$ con $m \geq 2$ non hanno senso: il teorema della permanenza del segno, il teorema sul prodotto etc.

2.14. *Osservazione sulla definizione di limite*

La definizione di limite data in **2.10** richiede che il dominio di f contenga tutti i punti di un intorno di P_0, escluso P_0. Tale definizione si può estendere a situazioni più generali: occorre per questo che P_0 sia almeno un *punto di accumulazione* per il dominio di f. Ciò vuol dire, per definizione, che ogni intorno di P_0 contiene punti di $\operatorname{dom} f$ distinti da P_0.

3. Calcolo differenziale delle funzioni di più variabili

Nel corso di Analisi Matematica I e nel cap. IV si è studiata la derivata di una funzione e se ne sono viste svariate applicazioni.

Anche per le funzioni di più variabili si può parlare di derivate: la situazione è però assai più complicata. Infatti, mentre per le funzioni reali o vettoriali di una variabile c'è una sola derivata, per funzioni di più variabili ce ne sono infinite: si tratta delle *derivate direzionali*. Tra queste ce ne sono alcune privilegiate, che si chiamano *derivate parziali*. Queste derivate si possono usare per studiare le funzioni di più variabili.

A. DERIVATA DIREZIONALE, DERIVATE PARZIALI, GRADIENTE DELLE FUNZIONI A VALORI REALI

La nozione di derivata si introduce per misurare la "rapidità di cambiamento" di una funzione, come si è visto nel caso di funzioni di una variabile.

Nel caso di più di una variabile l'idea intuitiva di "rapidità di cambiamento" è più complicata, in quanto si tratta di una quantità che dipende anche dalla direzione e verso in cui si considera il fenomeno. Ad esempio consideriamo la funzione che ad ogni punto P della superficie terrestre associa la quota $f(P)$ di P sul livello del mare. Se P_0 è un punto della superficie terrestre, non ha senso dire: il terreno in P_0 è in salita o in discesa o molto ripido, etc., se non specifichiamo in quale direzione e in quale verso. Ad esempio si dirà: il terreno in P_0 è in salita (molto ripida) nella direzione SUD-NORD e nel verso da SUD a NORD. Naturalmente nel verso NORD-SUD il terreno sarà in discesa. Può benissimo capitare che in direzione EST-OVEST sia pianeggiante (o poco ripido) etc.

Per precisare matematicamente questo concetto intuitivo di "rapidità di cambiamento in una data direzione e in un dato verso" si introduce la nozione di *derivata direzionale*. Per l'uso pratico delle derivate direzionali è utile considerare le *derivate parziali*, che sono particolari tipi di derivate direzionali. In questa parte A del n. **3** illustreremo questi concetti.

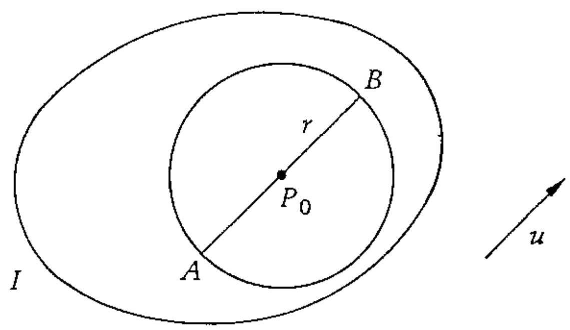
3.1. *Derivata direzionale*

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione definita in $I \subset \mathbb{R}^n$ e sia P_0 un punto *interno* ad I (cfr. **2.7**). Sia poi $\mathbf{u} = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ un versore (*).

Consideriamo la funzione in t:

$$F(t) = f(P_0 + t\mathbf{u}) \ .$$

Questa funzione è definita per i valori di t tali che $P_0 + t\mathbf{u} \in I$. Poichè P_0 è interno, la funzione $F(t)$ è definita in un intorno di $t = 0$. Più precisamente se $S(P_0, r)$ è un intorno di P_0 contenuto in I la funzione $F(t)$ è definita, almeno, nell'intervallo $(-r, r)$. Si veda la seguente figura per $n = 2$.



I punti del tipo: $P_0 + t\mathbf{u}$ sono quelli della retta passante per P_0 e parallela ad $\mathbf{u}$. I punti $P_0 + t\mathbf{u}$ con $-r < t < r$ sono contenuti in I.

Si ha ovviamente $F(0) = f(P_0)$. Se F è derivabile per $t = 0$, la derivata $F'(0)$ si chiama *derivata direzionale di* f *in* P_0 *secondo* $\mathbf{u}$. Questa derivata (se esiste) è dunque

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + t\mathbf{u}) - f(P_0)}{t} \ .$$

(*) Cioè un vettore $\mathbf{u} = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tale che $\alpha_1^2 + ... + \alpha_n^2 = 1$. Ciò estende in modo naturale la nozione di versore vista nel vol. I cap. I.

Se esiste la derivata direzionale precedente si dice anche che f è derivabile in P_0 secondo $\mathbf{u}$.

Esempio. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da: $f(x,y) = x + y$ e sia $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Calcoliamo la derivata direzionale di f in $P_0 = (1,0)$ secondo $\mathbf{u}$. Si ha:

$$F(t) = f(P_0 + t\mathbf{u}) = f\left((1,0) + t\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = 1 + \frac{2}{\sqrt{2}}t$$

$$F'(0) = \frac{2}{\sqrt{2}} \ .$$

Pertanto la derivata direzionale cercata è $\frac{2}{\sqrt{2}}$.

Se invece $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ si vede che

$$F(t) = 1$$

e quindi la derivata in P_0 secondo $\mathbf{u}$ è uguale a zero.

Nomenclatura e notazioni

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ un versore. Se la derivata direzionale di f secondo $\mathbf{u}$ in P_0 esiste, si dice che f *è derivabile in* P_0 *secondo* $\mathbf{u}$ (o nella direzione di $\mathbf{u}$). La derivata di f secondo $\mathbf{u}$ si indica coi simboli

$$\frac{df}{d\mathbf{u}} \qquad \text{oppure} \qquad f_{\mathbf{u}} \ (*).$$

Osservazione 1. Il simbolo $\frac{df}{d\mathbf{u}}$ ha senso in blocco: esso non indica una divisione.

Osservazione 2. La derivata direzionale gode delle stesse proprietà formali

(*) Alcuni autori usano il simbolo $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}$.

delle derivate di funzioni di una variabile. Si ha cioè:

$$\frac{d}{d\mathbf{u}}(f+g) = \frac{df}{d\mathbf{u}} + \frac{dg}{d\mathbf{u}}$$

$$\frac{d}{d\mathbf{u}}(af) = a\,\frac{df}{d\mathbf{u}} \qquad (a \in \mathbb{R})$$

$$\frac{d}{d\mathbf{u}}(fg) = g\,\frac{df}{d\mathbf{u}} + f\,\frac{dg}{d\mathbf{u}}$$

$$\frac{d}{d\mathbf{u}}\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{1}{f^2}\,\frac{df}{d\mathbf{u}}$$

(tutte le volte che le formule hanno senso).

Osservazione 3. Se $I \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme aperto e $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile secondo il versore $\mathbf{u}$ in ogni punto di I, la $\dfrac{df}{d\mathbf{u}}$ definisce una nuova funzione di I in $\mathbb{R}$.

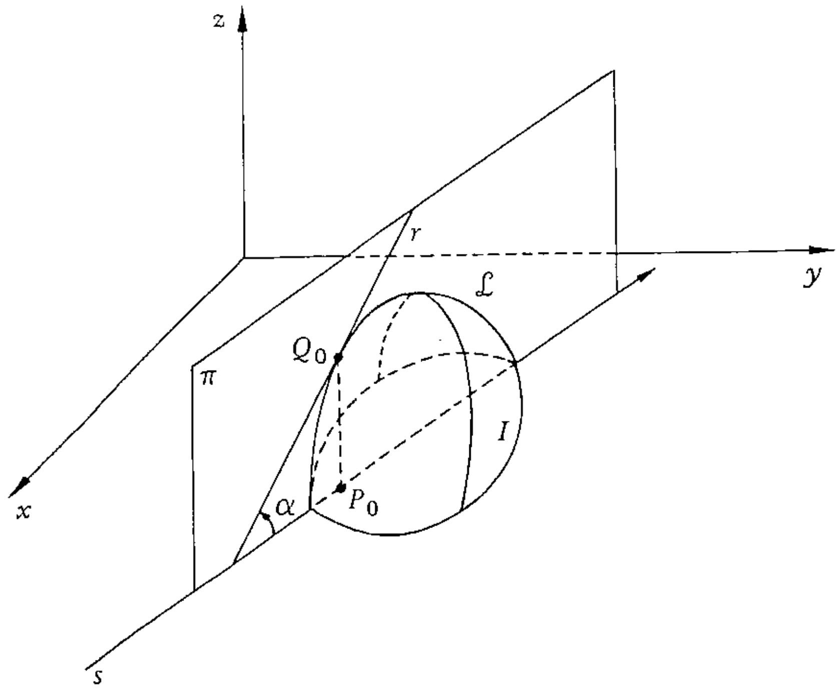
Osservazione 4. Dall'osservazione 3 segue facilmente che:

- l'insieme delle funzioni definite in $I \subset \mathbb{R}^n$ e a valori in $\mathbb{R}$ derivabili secondo $\mathbf{u}$ è uno spazio vettoriale reale V;
- l'applicazione $\dfrac{d}{d\mathbf{u}} : V \to \{\text{funzioni definite su } I\}$ è lineare.

3.2. *Significato geometrico della derivata direzionale per funzioni di due variabili*

Sia f una funzione di due variabili e sia S il suo grafico. Sia $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto interno ad $I = \operatorname{dom} f$ e sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ un versore. Supponiamo che $f_{\mathbf{u}}(P_0)$ esista e cerchiamo di darne una interpretazione geometrica.

A tale scopo consideriamo il piano π parallelo all'asse z e ad $\mathbf{u}$, passante per P_0 (vedi figura). Questo piano interseca S in una curva $\mathcal{L}$ contenente il punto $Q_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. $\mathcal{L}$ si può considerare come il grafico della funzione $F(t) = f(P_0 + t\mathbf{u})$ (con opportuna scelta di coordinate). Pertanto $f_{\mathbf{u}}(P_0)$ è la tangente trigonometrica dell'angolo formato dalla tangente ad $\mathcal{L}$ in Q_0 e da $\mathbf{u}$.



La retta s è parallela al versore $\mathbf{u}$ e orientata come $\mathbf{u}$. Il piano π passa per s ed è parallelo all'asse z. La curva $\mathcal{L}$ è l'intersezione del grafico di f con π. La retta r è la tangente ad $\mathcal{L}$ in Q_0.

Si ha allora:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{df}{d\mathbf{u}}(P_0)\,.$$

3.3. *Derivate parziali di una funzione* $f : I \to \mathbb{R}$ $(I \subset \mathbb{R}^n)$.

Le derivate di f secondo i versori fondamentali di $\mathbb{R}^n$ si chiamano anche *derivate parziali* di f.

Se f si esprime mediante la formula $f(x_1, ..., x_n)$ e se esiste la derivata direzionale rispetto al versore fondamentale $\mathbf{e}_i$ si dice che f *è derivabile rispetto a* x_i. Se f è derivabile rispetto ad $x_1, ..., x_n$, si dice che f è *derivabile.*

Notazioni. La derivata parziale di f rispetto a x_i $\left(\text{cioè la } \dfrac{df}{d\mathbf{e}_i}\right)$ si denota con

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad \text{oppure con} \qquad f_{x_i}\,.$$

Dalla definizione risulta subito che se $P_0 = (a_1, ..., a_n)$ si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_i + h, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_n)}{h}\,.$$

Pertanto la f_{x_i} si può calcolare considerando la f come funzione della sola variabile x_i e trattando le altre variabili come costanti.

Esempio. Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è definita da $f(x,y) = \sin xy^2$ si ha:

$$f_x(x,y) = y^2 \cos xy^2 \; ; \qquad f_y = 2xy \cos xy^2 \; .$$

3.4. *Legami tra derivate direzionali e derivate parziali*

Vedremo in seguito (cfr. **3.12**, es. 2) che se f e le sue derivate parziali sono continue vale la seguente formula:

$$\text{(3.1)} \qquad \frac{df}{d\mathbf{u}} = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \quad , \qquad \text{dove } \mathbf{u} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \; .$$

Esempio. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da: $f(x,y) = x + y$ e sia $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \, , \, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$. Si ha allora:

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\mathbf{u}}(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \; . \end{aligned}$$

Si confronti con l'esempio visto in **3.1**.

Dalla (3.1) si vede che $\frac{df}{d\mathbf{u}}$ si può interpretare come prodotto scalare, cioè:

$$\frac{df}{d\mathbf{u}} = \mathbf{u} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \, , \, \ldots \, , \, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \; .$$

3.5. *Il gradiente di una funzione di n variabili*

Sia f una funzione di n variabili derivabile in P_0 (punto interno ad $I = \operatorname{dom} f$). Il *gradiente di f in P_0* è il vettore di $\mathbb{R}^n$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0) \, , \, \ldots \, , \, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0) \right) \; .$$

Il gradiente di f in P_0 si denota con

$$\operatorname{grad}_{P_0} f \qquad \text{oppure con} \qquad \nabla_{P_0} f \; .$$

Se I è aperto ed f è derivabile in ogni $P \in I$, è dunque definita la funzione vettoriale

$$\text{grad} f : I \to \mathbb{R}^n \qquad (\text{o } \nabla f : I \to \mathbb{R}^n)$$

che ad ogni $P \in I$ fa corrispondere $\text{grad}_P f$.

Esempio 1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da: $f(x, y) = \sin xy^2$. Si ha allora:

$$(\text{grad} f)(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = (y^2 \cos xy^2 , 2xy \cos xy^2) .$$

In particolare:

$$(\text{grad} f)(0, 0) = (0, 0) ; \qquad (\text{grad} f)(0, 1) = (1, 0) ,$$
$$(\text{grad} f)(\pi, 1) = (-\pi^2, -2\pi) ; \qquad \text{etc.}$$

Esempio 2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da: $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - xyz$. Si ha allora

$$(\text{grad} f)(x, y, z) = (3x^2 - yz , 3y^2 - xz , 3z^2 - xy) .$$

3.6. *Il gradiente come applicazione lineare*

Siano I un aperto di $\mathbb{R}^n$, V lo spazio vettoriale delle funzioni derivabili $I \to \mathbb{R}$, W lo spazio vettoriale di tutte le funzioni $I \to \mathbb{R}^n$. Allora l'applicazione $\varphi : V \to W$ definita da:

$$\varphi(f) = \text{grad} f$$

è lineare. Inoltre si ha:

$$\text{grad}(fg) = f \,\text{grad}\, g + g \,\text{grad}\, f .$$

Ciò si esprime anche dicendo che grad è una *derivazione* (o operatore differenziale) di V in W.

3.7. *Significato geometrico del gradiente*

Sia f una funzione continua di n variabili con derivate parziali continue definita in un aperto $I \subset \mathbb{R}^n$ e sia $P_0 \in I$. Supponiamo che $\text{grad}_{P_0} f$ sia diverso dal vettore nullo e poniamo

$$\mathbf{u} = \frac{\text{grad}_{P_0} f}{\|\text{grad}_{P_0} f\|} .$$

Si ha allora:

(3.2) $$\frac{df}{d\mathbf{u}}(P_0) = \|\mathrm{grad}_{P_0} f\|$$

(3.3) $$\left|\frac{df}{d\mathbf{v}}(P_0)\right| < \|\mathrm{grad}_{P_0} f\| \qquad \text{per ogni versore} \qquad \mathbf{v} \neq \mathbf{u} \ .$$

Cioè: le derivate direzionali in P_0 non superano, in valore assoluto, il modulo del gradiente di f in P_0. Inoltre la derivata rispetto ad $\mathbf{u}$ è proprio uguale al modulo del gradiente.

Quindi il vettore $\mathrm{grad}_{P_0} f$ indica la direzione e il verso in cui f cresce più rapidamente.

Le formule (3.2) e (3.3) seguono facilmente dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwartz e dalla formula (3.1) che esprime la derivata direzionale come prodotto scalare.

Se f è una funzione di due variabili, $\mathrm{grad}_{P_0} f$ è ortogonale in P_0 alla curva di livello $f(x,y) = f(P_0)$ (cioè, per definizione, è ortogonale alla tangente in P_0 alla curva). Analogo risultato vale per le superfici di livello delle funzioni di tre variabili.

B. DERIVATE DELLE FUNZIONI VETTORIALI. MATRICI JACOBIANE

Vogliamo ora estendere a funzioni vettoriali $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la nozione di derivata vista nel cap. IV, **1.9**, per vettori variabili.

3.8. *Derivate parziali e direzionali delle funzioni vettoriali*

Le derivate direzionali (in particolare parziali) delle funzioni vettoriali si definiscono in modo analogo a quanto fatto per le funzioni scalari.

Quindi se $f : I \to \mathbb{R}^m$ $(I \subset \mathbb{R}^n)$ e la funzione definita da

$$f(x_1, ..., x_n) = (f_1(x_1, ..., x_n), \ldots, f_m(x_1, ..., x_n))$$

risulta per ogni versore $\mathbf{u}$:

$$\frac{df}{d\mathbf{u}} = \left(\frac{df_1}{d\mathbf{u}}, \ldots, \frac{df_m}{d\mathbf{u}}\right)$$

e quindi, in particolare,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}\right) \ .$$

Dunque se f è derivabile in tutto I le derivate definiscono delle nuove funzioni $I \to \mathbb{R}^m$.

Esempio 1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la funzione definita da

$$f(t) = (lt + x_0\,,\ mt + y_0\,,\ nt + z_0)\ .$$

Allora si ha

$$\frac{df}{dt}(t) = (l, m, n)\ .$$

Esempio 2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la funzione definita da

$$f(u,v) = (R\cos u \sin v\,,\ R\sin u \sin v\,,\ R\cos v)\ .$$

Allora si ha (per ogni $(u,v) \in \mathbb{R}^2$)

$$\frac{\partial f}{\partial u} = (-R\sin u \sin v\,,\ R\cos u \sin v\,,\ 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = (R\cos u \cos v\,,\ R\sin u \cos v\,,\ -R\cos v)\ .$$

3.9. *Matrici Jacobiane*

Sia $f : I \to \mathbb{R}^m$ una funzione vettoriale derivabile nell'aperto I di $\mathbb{R}^n$ definita da

$$f(x_1, ..., x_n) = (f_1(x_1, ..., x_n)\,,\ ...,\ f_m(x_1, ..., x_n))\ .$$

Le derivate parziali delle funzioni $f_1, ..., f_n$ vengono di solito raccolte nella seguente matrice Jf, che si chiama *matrice jacobiana* di f:

$$Jf = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}\ .$$

Gli elementi di questa matrice sono funzioni $I \to \mathbb{R}$. La riga i-esima della matrice è costituita dalle derivate parziali di f_i. La colonna j-esima di Jf è la derivata parziale di f rispetto a x_j.

Si noti che questa nozione estende quella vista nel cap. IV **1.13** per i vettori variabili.

Se $P \in I$ la matrice jacobiana di f calcolata in P si indica con $J_P f$. Si ha dunque:

$$J_P f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(P) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(P) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(P) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(P) \end{pmatrix} .$$

Così Jf definisce l'applicazione $I \to \mathbb{R}^{m,n}$ che ad ogni $P \in I$ associa la matrice $J_P f$.

Per le matrici jacobiane si usa anche la notazione

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \quad ; \qquad \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(P) .$$

Esempio 1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da: $f(x, y) = (x^2, \, x + y \, , \, xy)$. Si ha allora:

$$Jf = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix} .$$

Inoltre se $P = (1, 2)$ si ha

$$J_P f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Esempio 2. Se $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile (I aperto di $\mathbb{R}^n$) si ha:

$$Jf = \operatorname{grad} f \quad ; \qquad J_P f = \operatorname{grad}_P f \qquad \text{(matrici a una riga)}.$$

Esempio 3. Se $f : I \to \mathbb{R}^n$ è una funzione derivabile $(I \subset \mathbb{R})$ si ha:

$$Jf = f' \quad ; \qquad J_P f = f'(P) \qquad \text{(matrici a una colonna)}$$

(si veda cap. IV **1.13**).

Esempio 4. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è l'applicazione lineare associata alla matrice A nelle basi canoniche si ha: $Jf = A$.

Esempio 5 (matrice jacobiana del passaggio da coordinate polari a coordinate cartesiane).

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione definita da

$$f(u,v) = (u\cos v\,,\ u\sin v)\ .$$

La matrice jacobiana è

$$Jf = \begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{pmatrix}\ .$$

Esempio 6 (matrice jacobiana del passaggio a coordinate cilindriche).
Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da

$$f(u,v,w) = (u\cos v\,,\ u\sin v\,,\ w)\ .$$

Si ha allora

$$Jf = \begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v & 0 \\ \sin v & u\cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

Esempio 7 (matrice jacobiana del passaggio a coordinate polari nello spazio).
Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione definita da:

$$f(u,v,w) = (u\cos v\sin w\,,\ u\sin v\sin w\,,\ u\cos w)\ .$$

Si ha allora

$$Jf = \begin{pmatrix} \cos v\sin w & -u\sin v\sin w & u\cos v\cos w \\ \sin v\sin w & u\cos v\sin w & u\sin v\cos w \\ \cos w & 0 & -u\sin w \end{pmatrix}\ .$$

3.10. *Derivate parziali e continuità*

È noto dal corso di Analisi Matematica I che ogni funzione derivabile di una variabile è continua. Ciò è falso per funzioni di più di una variabile. Esistono infatti funzioni di due variabili, aventi le derivate parziali prime, ma non continue.

Invece una funzione vettoriale di una variabile che sia derivabile è anche continua (cfr. cap. IV).

C. DERIVATE DELLE FUNZIONI COMPOSTE

Abbiamo visto che la composizione di due funzioni continue è una funzione continua. Studiamo ora l'analogo problema per le derivate. Nel caso di funzioni di una variabile si è visto che

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \ .$$

Un risultato formalmente analogo vale per le derivate parziali delle funzioni di più variabili, pur di usare le matrici jacobiane. Precisamente si ha:

3.11. Teorema (sulla matrice jacobiana di una funzione composta). *Siano date due funzioni* $f : I \to \mathbb{R}^m$, $g : E \to \mathbb{R}^p$ *dove* I *è un aperto di* $\mathbb{R}^n$ *ed* E *è un aperto di* $\mathbb{R}^m$ *contenente* $f(I)$. Supponiamo inoltre che f e g siano di classe C^1 (cioè continue e con derivate parziali continue). Allora la funzione composta $g \circ f : I \to \mathbb{R}^p$ è di classe C^1 e si ha (per $P \in I$):

$$J_P(g \circ f) = (J_{f(P)}\, g)(J_P\, f) \ . \tag{3.4}$$

Cioè: la matrice jacobiana della composizione di due funzioni è uguale al prodotto delle matrici jacobiane delle due funzioni.

Esempio 1. Se f e g sono funzioni di una variabile la (3.4) è la formula che dà la derivata della funzione composta $g \circ f$. Infatti in questo caso le matrici jacobiane sono matrici ad una riga ed una colonna. Si ha cioè:

$$J_x(g \circ f) = (g \circ f)'(x) \quad ; \qquad J_{f(x)}\, g = g'(f(x)) \quad ; \qquad J_x\, f = f'(x)$$

e quindi la (3.4) diventa:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x) \ .$$

Esempio 2. Se f e g sono due applicazioni lineari, la formula (3.4) non è altro che $M(g \circ f) = M(g)\, M(f)$ (cfr. vol. I). Infatti la matrice jacobiana di una applicazione lineare è la matrice ad essa associata mediante le basi canoniche (**3.9**, es. 4).

Esempio 3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione definita da: $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2\, ,\, x_1^2)$ e sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la funzione definita da: $g(y_1, y_2) = (y_1,\, y_2^2,\, y_1 + y_2)$.

La funzione composta $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ è data dalla formula:

$$(g \circ f)(x_1, x_2) = g(x_1 + x_2\,,\, x_1^2) = (x_1 + x_2\,,\, x_1^4\,,\, x_1 + x_2 + x_1^2)\ .$$

Verifichiamo il teorema **3.11** in questo caso particolare. Si ha:

$$Jf = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Jg = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2y_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \qquad J_{f(x_1,x_2)}\, g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2x_1^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[J_{f(x_1,x_2)}\, g][J_{(x_1,x_2)}\, f] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4x_1^3 & 0 \\ 1 + 2x_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J_{(x_1,x_2)}(g \circ f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4x_1^3 & 0 \\ 1 + 2x_1 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

Quindi si ha: $J_{(x_1,x_2)}(g \circ f) = [J_{f(x_1,x_2)}\, g][J_{(x_1,x_2)}\, f]$, in accordo con (3.4).

Esaminiamo ora un caso particolare del teorema **3.11**.

3.12. *Derivata di una funzione di variabile reale definita da una formula del tipo:* $F(t) = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$.

La funzione considerata è la composizione della funzione f con la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definita da $g(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$.

Si ha: $Jf = \operatorname{grad} f$; $Jg = g'$. Quindi applicando il teorema si ha

$F'(t) = (\operatorname{grad}_{g(t)} f)(g'(t))$ (prodotto di una matrice a una riga per una matrice a una colonna).

Esplicitando si trova:

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(g(t))\, x_1'(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(g(t))\, x_n'(t)\ . \tag{3.5}$$

Esempio 1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da: $f(x,y,z) = xy + z^2$ e sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la funzione definita da $g(t) = (\cos t, \sin t, t)$. La funzione composta $g \circ f = F$ è data dalla formula

$$F(t) = f(\cos t,\, \sin t,\, t) = \cos t \sin t + t^2 = \frac{1}{2}\sin 2t + t^2\ .$$

Si ha dunque:

$$F'(t) = \cos 2t + 2t \ .$$

Dalla (3.5) risulta anche:

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(t))(-\sin t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(t))(\cos t) + \frac{\partial f}{\partial z}(g(t)) =$$

$$= -(\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 2t = \cos 2t + 2t \ .$$

Esempio 2 (la derivata direzionale). Se $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione di n variabili di classe C^1 e $\mathbf{u} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ è un versore, si ha:

$$f(P_0 + t\mathbf{u}) = f(p_1 + t\alpha_1, \ ..., \ p_n + t\alpha_n) \qquad \text{dove} \ \ P_0 = (p_1, ..., p_n) \ .$$

Dunque se $F(t) = f(P_0 + t\mathbf{u})$ si ha, usando la (3.5):

$$F'(0) = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0) + ... + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0) \ .$$

Poichè $F'(0) = \dfrac{df}{d\mathbf{u}}(P_0)$, ciò dimostra la formula (3.1) sulla derivata direzionale.

D. DERIVATE SUCCESSIVE

3.13. *Derivate parziali successive*

Sia I un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Allora le derivate parziali di f definiscono delle funzioni di I in $\mathbb{R}$, che a loro volta possono essere derivabili, e così via. Si ottengono così le derivate parziali seconde, terze etc. di f (se ci sono).

Notazioni. La derivata di f_{x_i} rispetto a x_j si denota con

$f_{x_i x_j}$ oppure $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}$ (talvolta $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_i}$, notazione che eviteremo).

Esempio 1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da: $f(x, y) = \sin x^2 y$. Si ha:

$$f_x(x, y) = 2xy \cos x^2 y \quad ; \qquad f_y(x, y) = x^2 \cos x^2 y$$

$$f_{xx}(x, y) = 2y(\cos xy - 2x^2 y \sin x^2 y)$$

$$f_{xy}(x, y) = 2x(\cos x^2 y - x^2 \sin x^2 y)$$

$$f_{yy}(x, y) = -x^4 \cos x^2 y$$

$$f_{yx}(x, y) = 2x \cos x^2 y - 2x^3 y \sin x^2 y \ .$$

Si noti che $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$.

Si può continuare ottenendo le derivate terze. Ad esempio:

$$f_{yyx}(x,y) = -4x^3 \cos x^2 y + 2x^5 y \cos x^2 y \ .$$

Naturalmente le definizioni precedenti si possono dare anche per le funzioni a valori vettoriali.

Esempio 2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la funzione definita da

$$f(x,y) = (x^2,\ xy,\ x+y) \ .$$

Allora si ha

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2x, y, 1) \quad ; &&\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (0, x, 1) \\
&\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = (2,0,0) \quad ; &&\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x,y) = (0,1,0) \\
&\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x,y) = (0,1,0) \quad ; &&\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (0,0,0) \ .
\end{aligned}$$

3.14. ***Definizione.*** Una funzione $f : I \to \mathbb{R}^m$ (I aperto di $\mathbb{R}^n$) è una funzione $\mathcal{C}^k$ se f è continua, e ha le derivate parziali fino all'ordine k, e inoltre queste derivate sono continue. Si dice che f è $\mathcal{C}^\infty$ se f è $\mathcal{C}^k$ per ogni k. Ciò vuol dire che f è continua, ha tutte le derivate, e che queste derivate sono continue.

3.15. Teorema (inversione dell'ordine di derivazione). *Sia f una funzione di classe $\mathcal{C}^2$. Allora si ha*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}$$

(cioè si può scambiare l'ordine di derivazione nelle "derivate miste").

Esempio 1. Vedi **3.13**, esempio 1.

Naturalmente se f è di classe $\mathcal{C}^n$ l'inversione dell'ordine di derivazione si può fare fino alle derivate di ordine n.

Esempio 2. Se $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$ si ha

$$f_{xyy} = f_{yyx} = f_{yxy} \quad \text{etc.}$$

La dimostrazione di **3.15** sarà omessa.

3.16. *La matrice hessiana*

Se $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione con derivate parziali seconde, è utile disporre queste derivate in una matrice quadrata, detta *matrice hessiana* di f, e denotata con $H(f)$. Si ha per definizione

$$H(f) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{x_nx_1} & \cdots & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix} .$$

È chiaro che $H(f)$ è una funzione definita su I e a valori in $\mathbb{R}^{n,n}$

$$H(f) : I \to \mathbb{R}^{n,n} .$$

Il determinante di $H(f)$ si chiama anche *hessiano* di f. Si tratta di una funzione $I \to \mathbb{R}$.

La matrice $H(f)$ è utile nello studio dei massimi e minimi e della concavità e convessità di f: essa ha un ruolo analogo a quello della derivata seconda per le funzioni di una variabile. Torneremo su questo argomento in seguito.

Osservazione. Dal teorema **3.15** segue subito che se f è C^2, $H(f)$ è una matrice simmetrica.

Esempio. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = x^3 - xy + y^2$. Si ha

$$H(f) = \begin{pmatrix} 6x & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} .$$

3.17. *Derivate direzionali successive*

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione C^2 definita nell'aperto I di $\mathbb{R}^n$, e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due versori. La funzione $\dfrac{df}{d\mathbf{u}}$ è C^1 in I, quindi esiste la sua derivata direzionale secondo $\mathbf{v}$ e secondo $\mathbf{u}$. Queste derivate si denotano con

$$\frac{d^2 f}{d\mathbf{v}\, d\mathbf{u}} \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2 f}{d\mathbf{u}^2} \quad .$$

Analoghe notazioni si usano per le derivate successive (se esistono).

Esempio. In due variabili si ha:

$$\frac{df(x,y)}{d\mathbf{u}} = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial y} \quad ,$$

(dove $\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j}$)

$$\begin{aligned}\frac{d^2 f}{d\mathbf{u}^2} = \frac{d}{d\mathbf{u}}\left(\frac{df}{d\mathbf{u}}\right) &= \alpha_1 \left(\alpha_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}\right) + \\ &+ \alpha_2 \left(\alpha_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} + \alpha_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \\ &= (\text{tenendo conto del teorema } \mathbf{3.15}) = \\ &= \alpha_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\alpha_1\alpha_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} + \alpha_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad .\end{aligned}$$

Inoltre:

$$\frac{d^3 f}{d\mathbf{u}^3} = \alpha_1^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3\alpha_1^2\alpha_2 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + 3\alpha_1\alpha_2^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y^2} + \alpha_2^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \quad ,$$

ecc... .

4. Approssimazione delle funzioni di più variabili

È assai utile saper approssimare una funzione con una più semplice e, se possibile, essere in grado di maggiorare l'errore commesso.

Questo problema è stato affrontato nel corso di Analisi Matematica I per le funzioni di una variabile. Qui diamo una introduzione a due metodi di approssimazione locale: si tratta del *differenziale* e della *formula di Taylor*.

Premettiamo alla trattazione di questi argomenti un cenno sugli infinitesimi.

A. INFINITESIMI

La nozione di infinitesimo è basilare in tutti i problemi di approssimazione di tipo locale. Diamo qui la definizione di infinitesimo e la nozione di confronto tra infinitesimi nel caso delle funzioni vettoriali.

4.1. *Definizione di infinitesimo*

Sia $f : I \to \mathbb{R}^m$ $(I \subset \mathbb{R}^n)$ una funzione, e sia P_0 un punto interno ad I. Si dice che f è *infinitesima* per $P \to P_0$ se si ha

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = 0 \ ,$$

Ciò vuol dire (cfr. **2.10**) che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

$$0 < ||P - P_0|| < \delta \ \ \& \ \ P \in I \Rightarrow ||f(P)|| < \varepsilon \ .$$

Esempio. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la funzione definita da:

$$f(P) = ||P - P_0|| \qquad \text{(dove } P_0 \text{ è un punto fisso).}$$

Allora f è infinitesima per $P \to P_0$.

4.2. *Confronto di infinitesimi*

Siano $f, g : I \to \mathbb{R}^m$ due infinitesimi per $P \to P_0$ (P_0 punto interno ad I) e supponiamo che $f(P)$ sia diverso da zero per tutti i punti P di un intorno di P_0, escluso al più P_0.

Si dice che g è *trascurabile* rispetto ad f, per $P \to P_0$, se si ha:

$$\lim_{P \to P_0} \frac{||g(P)||}{||f(P)||} = 0 \ .$$

In tal caso si scrive:

$$g = o(f) \ .$$

Nel seguito ci interesserà confrontare gli infinitesimi con $P - P_0$ e con $||P - P_0||^n$ $(n = 1, 2, ...)$.

Esempio. Si ha sempre $||P - P_0||^{n+1} = o(||P - P_0||^n)$.

B. IL DIFFERENZIALE E LA FORMULA DI TAYLOR

Il differenziale è l'applicazione lineare associata alla matrice jacobiana di una funzione. Esso serve per approssimare una funzione con una funzione polinomiale di primo grado vicino ad un punto fissato.

4.3. *Definizione di differenziale*

Sia $f : I \to \mathbb{R}^m$ (I aperto di $\mathbb{R}^n$) e sia $P_0 \in I$. Il *differenziale di* f *in* P_0 è l'applicazione lineare $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ associata alla matrice $J_{P_0} f$ (se questa esiste).

Questa applicazione lineare si denota con $d_{P_0} f$.

Se $f(x_1, ..., x_n) = (f_1(x_1, ..., x_n), \ldots, f_m(x_1, ..., x_n))$ si ha dunque:

$$(d_P f)(t_1, ..., t_n) = (z_1, ..., z_m)$$

dove:

$$z_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P_0)\, t_1 + ... + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P_0)\, t_n$$

$$z_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(P_0)\, t_1 + ... + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(P_0)\, t_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z_m = \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P_0)\, t_1 + ... + \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P_0)\, t_n \; .$$

Esempio 1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la funzione definita da

$$f(x, y) = (x^2,\, xy,\, x + y)$$

e sia $P_0 = (1, 2)$. Determinare $d_{P_0} f$.

Soluzione. Per definizione $d_{P_0} f$ è l'applicazione lineare $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ associata alla matrice $J_{P_0} f$. Si ha:

$$Jf = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ y & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad J_{P_0} f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \; .$$

Si ha dunque:

$$(d_{P_0} f)(t_1, t_2) = (2t_1,\, 2t_1 + t_2,\, t_1 + t_2) \; .$$

Esempio 2. Si è visto nel corso di Analisi Matematica I che il differenziale in x_0 di una funzione f di una variabile è la funzione

$$d_{x_0} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

definita da: $(d_{x_0} f)(h) = f'(x_0)\, h$.

Questa definizione coincide con quella vista prima. Infatti in questo caso Jf è la matrice 1×1 $(f'(x_0))$.

Esempio 3. Il differenziale dell'applicazione lineare $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ coincide con φ. Infatti $J\varphi$ è la matrice associata a φ rispetto alle basi canoniche (cfr. **3.9**).

Esempio 4. Sia $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la i-esima funzione coordinata (definita da $p_i(x_1, ..., x_n) = x_i$). Il differenziale di p_i coincide con p_i, in quanto p_i è lineare.

Esempio 5. Il differenziale di una funzione composta $f \circ g$ è uguale alla composizione dei rispettivi differenziali. Precisamente:

$$d_{P_0}(f \circ g) = (d_{g(P_0)} f) \circ (d_{P_0} g) \ .$$

Ciò segue subito dal teorema **3.11**.

Notazione. Se $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione di n variabili si scrive

$$d_{P_0} f = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0)\, dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0)\, dx_n \ .$$

Diamo ora il teorema fondamentale sul differenziale: si tratta di un primo teorema di approssimazione per funzioni di più variabili. Si noti che richiediamo che f sia di classe C^1 (continua con le derivate parziali).

4.4 Teorema (fondamentale sul differenziale). *Sia $f : I \to \mathbb{R}^m$ una funzione di classe C^1 definita nell'insieme $I \subset \mathbb{R}^n$. Sia P_0 interno ad I. Si ha allora:*

$$f(P) = f(P_0) + (d_{P_0} f)(P - P_0) + o(||P - P_0||) \tag{4.1}$$

dove P varia in un intorno di P_0 contenuto in I.

La (4.1) si può anche scrivere così:

$$(4.1)' \qquad \lim_{P\to P_0} \frac{\|f(P)-f(P_0)-d_{P_0}(P-P_0)\|}{\|P-P_0\|} = 0 \ .$$

Ciò vuol dire che "vicino a P_0" la funzione f si può approssimare con una funzione polinomiale di primo grado (cioè $f(P_0)+(d_{P_0}f)(P-P_0)$) con un errore che è trascurabile rispetto a $\|P-P_0\|$ per $P\to P_0$.

Definizione. Se vale la (4.1) o la (4.1)' diremo che f *è differenziabile* in P_0.

Osservazione. Nel corso di Analisi I si è visto che, se la funzione di una variabile $y=f(x)$ è derivabile in x_0, allora f è differenziabile, cioè si può scrivere:

$$f(x)-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$$

e viceversa.

È facile vedere che lo stesso vale per vettori variabili (cfr. cap. IV), mentre la situazione in generale è più complicata. Se $f: I\subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è dotata di derivate parziali in $P_0\in I$, allora si può dare formalmente la definizione di differenziale, usando la matrice jacobiana, ma il teorema di approssimazione valido in una variabile richiede, per essere vero, ulteriori ipotesi. Cioè, in più variabili, occorre distinguere nettamente la differenziabilità dall'esistenza delle derivate parziali. In effetti la differenziabilità si ha certamente se f è di classe C^1, mentre può venir meno per funzioni solamente dotate di derivate parziali.

Esempio 1. Sia $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y,z)=\sin(xe^{y+z})$$

e sia $P_0=(\pi,\,1,\,-1)$. Si ha allora:

$$(d_{P_0}f)(t_1,t_2,t_3) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\,t_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\,t_2 + \\ + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)\,t_3 = -t_1-t_2-t_3 \ .$$

Per **4.4** si ha:

$$f(P) = f(P_0)+(d_{P_0}f)(P-P_0)+o(\|P-P_0\|)$$

e quindi sostituendo:

$$f(x,y,z) = f(\pi,\,1,\,-1) + (-(x-\pi)-(y-1)-(z+1)) + \\ + o(\sqrt{(x-\pi)^2+(y-1)^2+(z+1)^2} = \\ = 2\pi-(x+y+z)+o(\sqrt{(x-\pi)^2+(y-1)^2+(z+1)^2} \ .$$

Quindi la funzione f si può approssimare (per $P \to P_0$) con la funzione assai più semplice, data dalla formula $g(x,y,z) = 2\pi - (x+y+z)$. L'errore che si commette considerando $g(P)$ invece di $f(P)$ è trascurabile rispetto alla distanza di P da P_0, quando $P \to P_0$.

Esempio 2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la funzione definita da:

$$f(t) = (\cos t\,,\, \sin t\,,\, t)\ .$$

Allora si ha

$$\begin{aligned} f(t) &= f(0) + (d_0 f)(t) + o(t) \\ &= (1,0,0) + (0,t,t) + o(t) \\ &= (1,t,t) + o(t)\ . \end{aligned}$$

Cioè: la funzione f si può approssimare, in un intorno di O, con la funzione data dalla formula $g(t) = (1,t,t)$. L'errore commesso nell'approssimazione è trascurabile rispetto a t (per $t \to 0$).

Esempio 3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la funzione definita da

$$f(u,v) = (u^2,\ uv,\ u+v)$$

e sia $P_0 = (1,2)$. Si ha allora

$$(d_{P_0} f)(t_1,t_2) = (2t_1,\ 2t_1 + t_2,\ t_1 + t_2)$$

e quindi

$$f(u,v) = f(1,2) + (2(u-1)\,,\, 2(u-1) + v - 2\,,\, u+v) + o(\sqrt{(u-1)^2 + (v-2)^2}\ .$$

Cioè:

$$\begin{aligned} (u^2,\ uv,\ u+v) &= (1,2,3) + (2u-1\,,\, 2u+v\,,\, u+v) + o(\sqrt{(u-1)^2 + (v-1)^2}) = \\ &= (2u\,,\, 2u+v+2\,,\, u+v+3) + o(\sqrt{(u-1)^2 + (v-2)^2})\ . \end{aligned}$$

Cioè: la funzione f si può approssimare, in un intorno di P_0, con la funzione data dalla formula $g(u,v) = (2u\,,\, 2u+v+2\,,\, u+v+3)$.

C. LA FORMULA DI TAYLOR

La formula di Taylor permette di approssimare una funzione con una funzione polinomiale di grado p. Quanto più grande è p tanto migliore è l'approssimazione. Questa formula generalizza il teorema del valor medio (caso $p = 0$) e il teorema fondamentale sul differenziale (caso $p = 1$).

La formula di Taylor si può esprimere in vari modi diversi.

Noi la presentiamo esclusivamente nel caso $p = 2$ (approssimazione del secondo ordine), omettendo la dimostrazione (che si riconduce alle funzioni di una sola variabile).

4.5. Teorema (formula di Taylor con le derivate direzionali). *Sia* $f : I \to \mathbb{R}$ *una funzione* C^3 *definita nell'aperto* I *di* $\mathbb{R}^n$ *e siano* $P_0\, P$ *due punti distinti di* I *tali che il segmento* $P_0\, P$ *sia tutto contenuto in* I. *Sia* $\mathbf{u} = \dfrac{P - P_0}{\|P - P_0\|}$. *Allora esiste un punto* Q *del segmento* $P_0\, P$ *(diverso da* P_0 *e da* P*) tale che:*

$$f(P) = f(P_0) + \frac{df}{d\mathbf{u}}(P_0)\,\|P - P_0\| + \frac{1}{2!}\,\frac{d^2 f}{d\mathbf{u}^2}(P_0)\,\|P - P_0\|^2 + R_2$$

dove:

$$R_2 = o(\|P - P_0\|^2)\ .$$

Questo teorema permette di approssimare una funzione con una funzione polinomiale, e di dare una espressione dell'errore commesso (cioè di R_2) che in vari casi permette di valutare l'errore. Inoltre l'errore R_2 è sempre trascurabile rispetto a $\|P - P_0\|^2$ per $P \to P_0$.

4.6. ***Formula di Taylor in due variabili con le derivate parziali***

Usando l'esempio del n. **3.18**, esprimiamo la formula precedente con le derivate parziali, fermandoci al secondo termine (e tenendo conto del fatto che $\mathbf{u} = \dfrac{P - P_0}{\|P - P_0\|}$):

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(x_0,y_0) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0) + \\ &+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x - x_0)^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0,y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \right. \\ &\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y - y_0)^2\right] + R_2\ , \end{aligned}$$

dove $R_2 = o(\|P - P_0\|^2)$.

Esempio. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = e^{xy}$ e sia $P_0 = (0,1)$. Si ha allora:

$$f(x,y) = 1 + x + x^2 + \frac{1}{2}\, x(y-1) + R_2 \ .$$

Osservazione 1. Mentre il differenziale permette di approssimare il grafico di una funzione di due variabili con un *piano*, la formula di Taylor, arrestata al secondo termine, permette di approssimare il grafico con una *quadrica*.

Osservazione 2. Il termine complessivo di secondo grado nella formula di Taylor altro non è che $(1/2!)$ (forma quadratica associata alla matrice hessiana $H_0 = H(x_0, y_0)$). Siccome inoltre il termine di primo grado è il prodotto scalare fra $\operatorname{grad}(f(x_0,y_0))$ e il vettore $(x - x_0\ ,\ y - y_0)$, la formula si può quindi scrivere nel modo seguente:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + (\operatorname{grad}(f(x_0,y_0)) \cdot (x - x_0\ ,\ y - y_0) + (1/2!)\, q_{H_0}(x - x_0\ ,\ y - y_0)\ .$$

4.7. *Formula di Taylor con derivate parziali in generale*

Vale il seguente

Teorema. *Con le ipotesi di* **4.5** *poniamo* $P = (x_1, ..., x_n)$, $P_0 = (a_1, ..., a_n)$. *Si ha allora:*

$$f(P) = f(P_0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0)(x_1 - a_1) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0)(x_n - a_n) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(P_0)(x_1 - a_1)^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2}(P_0)(x_1 - a_1)(x_2 - a_2) + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(P_0)(x_n - a_n)^2\right] + R_2$$

dove:

$$R_2 = o(||P - P_0||^2)\ .$$

5. Massimi e minimi relativi

In questo paragrafo applichiamo i risultati precedenti alla ricerca dei massimi e minimi relativi.

5.1. ***Definizione*** (di massimo e di minimo relativo). Sia f una funzione di n variabili a valori reali definita nell'insieme $I \subset \mathbb{R}^n$. Si dice che un punto P_0 è *di massimo relativo per* f *in* I se:

a) $P_0 \in I$
b) esiste un intorno U di P_0 tale che $f(P) \leq f(P_0)$ per ogni $P \in I \cap U$.

La definizione di minimo relativo è analoga.
Questa definizione non ha senso per funzioni a valori in $\mathbb{R}^n$, se $n \geq 2$.

5.2. Teorema (annullamento del gradiente nei punti di massimo e minimo relativo interni al dominio di f). *Sia f una funzione derivabile definita nell'insieme $I \subset \mathbb{R}^n$ e sia P_0 un punto* **interno** *ad I. Se P_0 è un punto di massimo o di minimo relativo si ha:*

$$\mathrm{grad}_{P_0} f = (0, ..., 0)$$

cioè:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0) = 0 \ ; \ \ldots \ ; \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0) = 0 \ .$$

Esempio 1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita dalla formula $f(x, y) = x^2+y^2$. È chiaro che $f(x, y) \geq 0$ per ogni (x, y) e che $f(0,0) = 0$. Quindi $(0,0)$ è un punto di minimo assoluto (in particolare relativo) interno al dominio di f. Si ha inoltre:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$$

e quindi, in accordo con **5.2**:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \ .$$

Esempio 2. La funzione f dell'esempio precedente non ha punti di massimo o di minimo relativo diversi da $(0,0)$. Infatti non esiste nessun punto di $\mathbb{R}^2$ in cui le due derivate parziali di f si annullino contemporaneamente.

Esempio 3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita dalla formula $f(x,y) = x^2 - y^2$. Allora si ha

$$\mathrm{grad}_{(0,0)} f = (0,0) \ .$$

Tuttavia $(0,0)$ non è un punto di massimo nè di minimo relativo. Infatti $f(0,0) = 0$ e in ogni intorno di $(0,0)$ la funzione f assume valori positivi e negativi (per $x = 0$ e $y \neq 0$ valori negativi, per $x \neq 0$ e $y = 0$ valori positivi).

Definizione. Un punto P_0 interno al dominio di f e tale che $\mathrm{grad}_{P_0} f = 0$ si chiama *punto di stazionarietà* di f. Un punto di stazionarietà che non sia nè di massimo nè di minimo relativo si chiama anche *punto di sella*.

Dimostrazione di 5.2. Poniamo $P_0 = (a_1, \ldots, a_n)$ e sia f_i la funzione di una variabile definita dalla formula

$$f_i(x_i) = f(a_1, \ldots, a_{i-1} \, , \, x_i \, , \, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

(cioè: consideriamo f come funzione della sola variabile x_i, fissando per le rimanenti variabili le corrispondenti coordinate di P_0). Poichè P_0 è interno ad I, la funzione f_i è definita in un intervallo aperto contenente a_i. Inoltre se f ha un massimo o un minimo relativo in P_0, è chiaro che f_i ha un massimo o un minimo relativo in a_i, quindi $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) = 0$.

Vediamo ora come si fa a riconoscere i punti di massimo e minimo relativo e i punti di sella tra i punti in cui il gradiente si annulla.

5.3. Teorema (uso della matrice hessiana per riconoscere i massimi e i minimi relativi e i punti di sella). *Sia f una funzione di n variabili definita in $I \subset \mathbb{R}^n$. Sia P_0 un punto interno ad I e supponiamo che f sia C^3 in un intorno di P_0, e che $\mathrm{grad}_{P_0} f = 0$. Sia infine $H = H_{P_0} f$ la matrice hessiana di f in P_0. Si ha allora:*

a) *se gli autovalori di H sono tutti (strettamente) positivi, P_0 è un punto di minimo relativo;*

b) *se gli autovalori di H sono tutti (strettamente) negativi, P_0 è un punto di massimo relativo;*

c) *se H ha almeno un autovalore (strettamente) positivo e uno (strettamente) negativo, P_0 è un punto di sella.*

Osservazione 1. Poichè f è C^3 la matrice H è simmetrica e quindi ha tutti gli autovalori reali. Pertanto il loro segno si può trovare applicando il teorema di Cartesio al polinomio caratteristico, senza necessariamente risolvere l'equazione.

Osservazione 2. Se gli autovalori di H sono in parte zero e i rimanenti sono tutti positivi (o tutti negativi) il teorema precedente non dice nulla.

Esempio 1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da: $f(x,y) = x^2 + y^2$. Allora si ha $\mathrm{grad}_{P_0} f = 0$ solo per $P_0 = (0,0)$. Inoltre

$$H_{P_0} f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Gli autovalori di questa matrice sono positivi e quindi P_0 è un punto di minimo relativo. Ciò è in accordo con **5.2**, esempio 1.

Esempio 2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da: $f(x,y) = x^2 - y^2$. Allora si ha: $\mathrm{grad}_{P_0} f = (0,0)$ solo per $P_0 = (0,0)$. Inoltre

$$H_{P_0} f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

Gli autovalori di questa matrice sono positivi e negativi. Quindi P_0 è un punto di sella. Ciò è in accordo con **5.2**, esempio 3.

Esempio 3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da: $f(x,y) = x^2 + y^3$. Allora $\mathrm{grad}_{P_0} f = (0,0)$ solo per $P_0 = (0,0)$. Inoltre gli autovalori della matrice hessiana sono 2 e 0. Quindi il teorema **5.3** non è applicabile. Si vede tuttavia direttamente che f assume valori positivi e negativi in ogni intorno di P_0. Quindi P_0 è un punto di sella.

Esempio 4. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da: $f(x,y) = x^2 + y^4$. È chiaro che $(0,0)$ è un punto di minimo. Tuttavia gli autovalori della matrice hessiana sono 2 e 0, quindi anche questo caso non rientra nel teorema **5.3**. Si confronti anche con l'esempio precedente.

Per le funzioni di due variabili il teorema **5.3** si può semplificare così:

5.4. Corollario (caso delle funzioni di due variabili). *Sia f una funzione di due variabili definita nell'insieme $I \subset \mathbb{R}^2$. Sia P_0 un punto interno ad I tale che $\mathrm{grad}_{P_0} f = 0$, e sia $H = H_{P_0} f$. Allora:*

- *se* $\det H < 0$, P_0 *è un punto di sella;*
- *se* $\det H > 0$ *e* $f_{xx}(P_0) > 0$, P_0 *è un punto di minimo relativo;*
- *se* $\det H < 0$ *e* $f_{xx}(P_0) < 0$, P_0 *è un punto di massimo relativo.*

N.B. Se $\det H = 0$ il corollario precedente non si può applicare.

Dimostrazione. Il polinomio caratteristico di H è:

$$T^2 - (f_{xx}(P_0) + f_{yy}(P_0))\, T + \det H \ .$$

Se $\det H < 0$, H ha un autovalore positivo e uno negativo, quindi c'è un punto di sella.

Se $\det H > 0$ e $f_{xx}(P_0) > 0$ si ha anche $f_{yy}(P_0) > 0$, quindi ci sono due autovalori positivi e P_0 è un punto di minimo relativo.

Analogamente per l'altro caso.

Osservazione 3. Si capisce l'intervento della matrice hessiana in questo problema se si osserva che la formula di Taylor si può scrivere usando la forma quadratica associata alla matrice hessiana e che $f(P) - f(P_0)$, quando si annullino le derivate parziali, differisce dalla metà di tale forma quadratica per un infinitesimo di ordine superiore a 2.

5.5. *Come si trovano i massimi e i minimi relativi e i punti di sella interni al dominio di una funzione f di n variabili*

– Si risolve il sistema in $x_1, ..., x_n$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, ..., x_n) = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, ..., x_n) = 0 \ .$$

– Si considerano, tra le soluzioni trovate, solo quelle che sono punti interni al dominio di f.

– Si calcola la matrice hessiana di f in ognuno dei punti trovati.

– Si studiano i segni degli autovalori delle matrici così ottenute (usando eventualmente il teorema di Cartesio) e si applica il teorema **5.3.**

– Per funzioni di due variabili si può applicare **5.4.**

5.6. *Alcuni esempi di ricerca di massimi e minimi relativi*

Esempio 1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da: $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Trovare i punti di massimo e minimo relativo e i punti di sella di f.

Soluzione. Troviamo dapprima i punti in cui si annullano le derivate parziali, e che sono interni al dominio di f. Si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y \quad ; \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x \ .$$

I punti in cui si annullano entrambe le derivate sono $(0,0)$ e $(1,1)$. Questi punti sono interni ad $\mathbb{R}^2$, quindi sono entrambi accettabili.

La matrice hessiana è

$$Hf = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

e quindi si ha:

$$H_{(0,0)}f = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \qquad H_{(1,1)}f = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \ .$$

Il p.c. della prima matrice è $T^2 - 9$ e quindi gli autovalori sono uno positivo e uno negativo. Pertanto $(0,0)$ è un punto di sella.

Il p.c. della seconda matrice è: $T^2 - 12T + 9$, e quindi gli autovalori sono tutti positivi. Pertanto $(1,1)$ è un punto di minimo relativo.

Non ci sono altri punti di stazionarietà.

Esempio 2. Sia f la funzione di due variabili definita dalla formula:

$$f(x,y) = \log(x^2 + y^2 - 1) \ .$$

Determinare i massimi e i minimi relativi di f interni al più grande insieme in cui f è definita.

Soluzione. Il più grande insieme in cui f è definita è: $I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-1 > 0\}$. Si vede che I è costituito dai punti del piano la cui distanza da $(0,0)$ è > 1.

Si tratta dei punti esterni alla circonferenza di equazione $x^2+y^2-1=0$.

Le derivate parziali di f sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2-1} \quad ; \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2-1}$$

(queste formule sono valide per $x^2 + y^2 - 1 > 0$). Le due derivate si annullano contemporaneamente solo nel punto $(0,0)$. In questo punto la funzione f non è definita. Quindi non ci sono punti di massimo o minimo relativo.

Esempio 3. Trovare i massimi e i minimi relativi della funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da: $f(x,y,z) = \dfrac{1}{3}x^3 + xy + xz + yz$.

Soluzione. f è definita su tutto $\mathbb{R}^3$. Le derivate parziali sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = x^2 + y + z \quad ; \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x + z \ ;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = x + y$$

e consideriamo il sistema:

$$\begin{aligned} &x^2 + y + z = 0 \\ &x + z = 0 \\ &x + y = 0 \ . \end{aligned}$$

Le soluzioni sono: $(0,0,0)$ e $(2,-2,-2)$, entrambe accettabili trattandosi di punti interni al dominio di f.

Calcoliamo le matrici hessiane. Si ha:

$$Hf = \begin{pmatrix} 2x & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ ; \quad H_{(0,0,0)}f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ ; \quad H_{(2,-2,-2)}f = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Il polinomio caratteristico di $H_{(0,0,0)}f$ è $-T^3 + 3T + 2$. Ci sono quindi: un autovalore positivo e due negativi. Il punto $(0,0,0)$ è dunque un punto di sella.

Il p.c. di $H_{(2,-2,-2)}$ è $-T^3 + 4T^2 + 3T - 2$. Quindi anche $(2,-2,-2)$ è un punto di sella.

6. Massimi e minimi vincolati (o condizionati)

Sia $f : I \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione di n variabili $(x_1, ..., x_n)$ dove queste ultime sono legate da $p < n$ condizioni, nel senso seguente:

esistono p funzioni $g_1, ..., g_p : I \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tali che si abbia

$$\begin{aligned} &g_1(x_1, ..., x_n) = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &g_p(x_1, ..., x_n) = 0\ . \end{aligned} \tag{6.1}$$

Ciò significa che le n variabili non sono indipendenti fra loro: usando le p equazioni se ne possono (almeno teoricamente) ricavare p in funzione delle altre $n-p$, che saranno effettivamente indipendenti. In sostanza la funzione f soggetta a p equazioni di vincolo è in realtà una funzione di $n-p$ variabili soltanto.

Esempio 1. Sia data la funzione $f(x,y,z) = xy + z$, dove le variabili sono soggette al vincolo dato dall'equazione $g(x,y,z) = x - y + z = 0$. Ciò equivale a considerare la funzione $f(x,\, x+z,\, z) = x(x+z)+z$, che dipende da $2 = 3-1$ variabili.

Se si vogliono determinare i massimi e i minimi della funzione f sottoposta ai p vincoli, si può procedere alla eliminazione delle p variabili superflue e ridursi a trattare il problema per la nuova funzione di $n-p$ variabili. Ma ciò non è sempre agevole.

Noi vogliamo descrivere qui, senza dimostrazione, un metodo per determinare i massimi e i minimi di una tale funzione f soggetta alle condizioni (o vincoli) (6.1), evitando, almeno in un primo tempo, l'eliminazione di variabili.

Si considerino dunque p parametri $\lambda_1, ..., \lambda_p$ (che chiameremo moltiplicatori di Lagrange) e si costruisca la nuova funzione di n variabili

$$F(x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n) + \lambda_1\, g_1(x_1, ..., x_n) + ... + \lambda_p\, g_p(x_1, ..., x_n)\ .$$

Si può dimostrare che, se P è un punto di massimo o di minimo relativo per la funzione vincolata f, allora necessariamente in P si annullano le derivate parziali di F rispetto alle variabili $x_1, ..., x_n$ (mentre $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sono considerate costanti).

Si ha cioè (per ogni $i = 1, ..., n$):

$$\partial F(P)/\partial x_i = \partial f(P)/\partial x_i + \lambda_1 \partial g_1(P)/\partial x_i + ... + \lambda_p \partial g_p(P)/\partial x_i = 0\ . \tag{6.2}$$

Abbiamo quindi un sistema di $n+p$ equazioni (le (6.1) e le (6.2)) nelle $n+p$ incognite $\lambda_1, ..., \lambda_p$, $x_1, ..., x_n$, che consente (almeno teoricamente) di determinare le coordinate dei punti di stazionarietà, fra i quali si troveranno quelli di massimo e minimo.

Esempio 2. Sia data la funzione $f(x,y,z) = xy + z$, dove le variabili sono soggette al vincolo dato dall'equazione $g(x,y,z) = x - y + z = 0$ (si veda l'esempio 1).

Consideriamo allora la funzione $F(x,y,z) = xy + z + \lambda(x - y + z)$ le cui derivate parziali sono:

$$F_x = y + \lambda \ ,$$
$$F_y = x - \lambda \ ,$$
$$F_z = 1 + \lambda \ .$$

Si hanno allora le 4 equazioni:

$$y + \lambda = 0 \ ,$$
$$x - \lambda = 0$$
$$1 + \lambda = 0$$
$$x - y + z = 0$$

che hanno come soluzione:

$$\lambda = -1 \ , \quad x = -1 \ , \quad y = 1 \ , \quad z = 2 \ .$$

Pertanto l'unico punto di stazionarietà per la funzione $F(x,y,z) = f(x,y,z) - (x - y + z) = xy - x + y$ è $P = (-1,1,2)$.

Per stabilire se P è effettivamente un massimo o un minimo condizionato per $f(x,y,z)$ occorre tuttavia eliminare una delle variabili, tenendo conto dell'equazione di vincolo

$y = x + z$ sostituito in $f(x,y,z)$ dà la funzione
$h(x,z) = f(x,\, x+z,\, z) = x(x+z) + z = x^2 + xz + z$.

Per $x = -1$ e $z = 2$ la funzione vale 1.

Consideriamo ora le derivate parziali seconde in $x = -1$, $z = 2$:

$$h_{xx} = 2 \qquad h_{xz} = 1 \qquad h_{zz} = 0 \ .$$

La matrice hessiana ha due autovalori entrambi strettamente positivi: si ottiene un punto di minimo relativo (teorema **5.3** a)). Quindi P è un minimo relativo vincolato per la funzione f.

Osservazione. In generale con la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange si ottengono i punti di stazionarietà vincolati per f; per decidere se si tratta di massimi o minimi occorrono o ragionamenti diretti o l'uso dei teoremi sui massimi e minimi liberi, dopo aver eliminato p variabili.

7. Esercizi

1. Studiare le curve di livello della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x,y) = x^2 - 2y^2 .$$

2. Che cosa è il grafico della funzione di 1?

3. Sia f la funzione di due variabili definita dalla formula

$$f(x,y) = \log(x^2 - 2xy) .$$

   a) Determinare il più grande insieme $I \subset \mathbb{R}^2$ in cui f è definita.
   b) Calcolare le derivate parziali di f, indicando il più grande insieme in cui sono definite.

4. Sia f come in 3. Calcolare: a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(3,1)$; b) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-1,-1)$; c) $\mathrm{grad}_{(3,1)} f$.

5. Sia f come in 3. Calcolare le derivate seconde di f, indicando il più grande insieme in cui sono definite.

6. Sia f la funzione di due variabili definita dalla formula: $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y}$.
   a) Trovare il più grande insieme I in cui f è definita.
   b) Calcolare le derivate parziali di f, indicando il più grande insieme in cui sono definite.

7. Sia f come in 3, e sia $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{i} - \mathbf{j}}{\sqrt{2}}$. Calcolare $\dfrac{df}{d\mathbf{u}}(3,1)$ in due modi (con la definizione e usando le derivate parziali).

8. Sia f come in 3 e sia $P = (3,1)$. Determinare il versore $\mathbf{u}$ tale che $\dfrac{df}{d\mathbf{u}}(3,1)$ sia massima.

9. Sia f come in 3. Determinare il versore $\mathbf{v}$ tale che $\dfrac{df}{d\mathbf{v}}(3,1)$ sia minima.

10. Sia f come in 3. Determinare i versori $\mathbf{u}$ tali che $\dfrac{df}{d\mathbf{u}} = 0$.

11. Sia f come in **3**, e sia $\mathbf{u} = \dfrac{3\mathbf{i}+4\mathbf{j}}{5}$. Calcolare $\dfrac{d^2f}{d\mathbf{u}^2}(3,1)$.

12. Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ le funzioni definite dalle formule:

$$f(x,y,z) = x^2 - 3y - z \quad ; \qquad g(t) = (t^2 - 1 \, , \, 2t \, , \, \sin t) \; .$$

Calcolare in due modi $\dfrac{d(f \circ g)}{dt}$ (sostituendo e derivando; usando la formula).

13. Siano $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ le funzioni definite da:

$$f(x,y,z) = (xy \, , \, z^2 \, , \, 2 - x) \quad ; \qquad g(u,v,w) = (\sin u \, , \, u + v + w^2) \; .$$

Calcolare: Jf ; Jg ; $J(g \circ f)$.

14. Sia f come in **13** e sia $P_0 = (-1,1,2)$. Calcolare

$$(d_{P_0} f)(x_1, x_2, x_3) \qquad \text{e} \qquad (d_{P_0} f)(1,2,-1) \; .$$

15. Siano f e g come in **13**, e sia $P_0 = (-1,\pi,2)$. Calcolare

$$[d_{P_0}(g \circ f)]\,(x_1, x_2, x_3) \; .$$

16. Trovare i massimi e minimi relativi e i punti di sella della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da: $f(x,y) = xy + \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{y}$.

17. Trovare i massimi e minimi relativi e i punti di sella della funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da: $f(x,y,z) = (x^2 + y^2)^2 + z^2 - xy$.

18. Siano $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due funzioni C^1 tali che $(f \circ g)(P) = P$ per ogni P di un intorno U di P_0. Dimostrare che

$$J_{P_0}(f) = [J_{f(P_0)}\, g]^{-1} \; .$$

19. Sia f una funzione C^1 di due variabili, e sia $y = y(x)$ una funzione C^1 tale che $f(x \, , \, y(x)) = 0$ per ogni x appartenente a un certo intervallo aperto I. Dimostrare che si ha:

$$y'(x) = -\frac{\partial f}{\partial x}\,(x \, , \, y(x)) \bigg/ \frac{\partial f}{\partial y}\,(x \, , \, y(x))$$

per ogni punto $x \in I$ in cui la formula ha senso.

8. Elementi di geometria differenziale delle superficie

Ricordiamo che una superficie S dello spazio a tre dimensioni può rappresentarsi in due modi:

1° modo: S = luogo dei punti $P = (x, y, z)$ tali che $f(x, y, z) = 0$, dove $f(x, y, z)$ è una funzione $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$;

2° modo: S = immagine di una funzione $f : I \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

Per quanto riguarda il primo modo, abbiamo visto molti esempi nel cap. II (piani, sfere, quadriche ecc...). Qualche esempio di superficie data nel secondo modo si è pure visto nel cap. II (coni e cilindri in forma parametrica).

Cominciamo con l'esaminare a fondo il 1° modo.

8.1. *Superficie in forma cartesiana*

Sia $S : f(x, y, z) = 0$ una superficie in forma cartesiana, dove f è una funzione C^∞ di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}$. Se $P_0 \in S$ e inoltre $\mathrm{grad}_{P_0}(f) \neq 0$, si può definire il piano tangente a S in P_0 nel modo seguente.

Si consideri una qualsiasi curva regolare $\mathcal{L}$ contenuta in S e passante per P_0, di equazioni $P = P(t) = (x(t)\,,\, y(t)\,,\, z(t))$. Allora $\mathcal{L}$ è dotata di retta tangente $r_\mathcal{L}$ in P_0. Al variare di $\mathcal{L}$ su s otteniamo infinite rette. Vogliamo provare che tutte le rette $r_\mathcal{L}$ sono complanari e individuano un piano, detto tangente a S in P_0. In primo luogo si ha:

Teorema. *Sia S una superficie di equazione $f(x, y, z) = 0$ e $P_0 \in S$ un punto tale che $\mathrm{grad}_{P_0} f \neq 0$. Sia poi $\mathcal{L} : P = P(t) = (x(t)\,,\, y(t)\,,\, z(t))$ una curva regolare contenuta in S e passante per $P_0 = P(t_0)$. Allora $\mathrm{grad}_{P_0} f$ è ortogonale alla retta $r_\mathcal{L}$ tangente a $\mathcal{L}$ in P_0.*

Dimostrazione. Poichè $\mathcal{L}$ giace su S, si ha: $f(x(t)\,,\, y(t)\,,\, z(t)) = 0$ per ogni t. Deriviamo ora la funzione composta $F(t) = f(x(t)\,,\, y(t)\,,\, z(t))$ che, per quanto detto, è identicamente nulla ed ha pertanto derivata nulla:

$$0 = \left(\frac{d}{dt} F(t)\right)_{t_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{P_0} \left(\frac{dz}{dt}\right)_{t_0} \; ;$$

cioè:

$$0 = (\mathrm{grad}_{P_0} f) \cdot (x'(t)\,,\, y'(t)\,,\, z'(t)) = (\mathrm{grad}_{P_0} f) \cdot (P'(t_0)) \; .$$

Dunque $P'(t_0)$ e $\mathrm{grad}_{P_0} f$ sono ortogonali.

Corollario. *Le tangenti in* P_0 *alle curve regolari contenute in* S *e passanti per* P_0 *giacciono nel piano per* P_0 *e ortogonale a* $\mathrm{grad}_{P_0} f$.

Resta perciò giustificata la seguente:

Definizione di piano tangente. Se S ha equazione $f(x,y,z)=0$, dove f è tale che $\mathrm{grad}_{P_0} f \neq 0$, allora il piano tangente a f in P_0 è il piano per P_0 ortogonale a $\mathrm{grad}_{P_0} f$; pertanto π contiene le rette tangenti alle curve regolari $\mathcal{L}$ su S per P_0 (cfr. quanto detto a proposito delle quadriche nel cap. II).

Equazione del piano tangente:

$$(\mathrm{grad}_{P_0} f)\cdot(P-P_0)=0 \tag{8.1}$$

ovvero:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}(x-x_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}(y-y_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{P_0}(z-z_0)=0\ .$$

Esempio 1. Il piano tangente alla superficie sferica $S:(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2$ in $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ è:

$$2(x_0-\alpha)(x-x_0)+2(y_0-\beta)(y-y_0)+2(z_0-\gamma)(z-z_0)=0\ .$$

Esempio 2. Sia S la superficie di equazione $xy^2-z^2=0$. Si ha: $\mathrm{grad}_{P_0} f=(y_0^2\,,\,2x_0\,y_0\,,\,-2z_0)$, dove $(x_0,y_0,z_0)=P_0$.

Pertanto nei punti di coordinate $(x_0,0,0)$ su S il piano tangente *non esiste* perchè $\mathrm{grad}_{P_0} f=0$. Invece in $P_0=(0,2,0)$ ha equazione $4x=0$.

Esempio 3. Sia $f(x,y,z)=0$ una equazione polinomiale che definisce una superficie passante per l'origine O. Ciò significa che $f(x,y,z)=ax+by+cz+$ termini di grado ≥ 2. Pertanto si ha:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0)=a\ ,\quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0)=b\ ,\quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)(0)=c$$

e quindi il piano tangente a S in O ha equazione: $ax+by+cz=0$, cioè si ottiene annullando i termini di primo grado.

8.2. *Superfici regolari in forma cartesiana* $z = f(x, y)$

Se la superficie S ha equazione $z = f(x, y)$, allora il piano tangente in $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ha equazione:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)}(x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)}(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

in quanto l'equazione si può scrivere $f(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial z} = -1.$

Pertanto si ottiene:

$$z = f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0)(x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0, y_0)(y - y_0)\ .$$

8.3. *Interpretazione geometrica dei massimi e minimi*

Sia f una funzione C^1 di due variabili e sia P_0 un punto interno al dominio in cui $\mathrm{grad}_{P_0} f = 0$. Allora il piano tangente al grafico nel punto corrispondente a P_0 ha equazione

$$z = f(P_0)$$

e quindi è orizzontale.

Inoltre si ha:

P_0 è un punto di minimo relativo se e solo se c'è un intorno di P_0 tale che il grafico della funzione ristretta a questo intorno è tutto al di sopra del piano tangente al grafico in P_0. Analogamente se P_0 è un punto di massimo relativo.

Se invece il grafico è, in qualunque intorno di P_0, parte al di sopra e parte al di sotto del piano tangente, P_0 è un punto di sella.

8.4. *Applicazione alle curve del piano e dello spazio*

Abbiamo visto nei capp. I e II che una curva piana si può rappresentare mediante una equazione $f(x, y) = 0$ e una curva spaziale mediante 2 equazioni: $g(x, y, z) = h(x, y, t) = 0$. Cerchiamo di scrivere equazioni per la retta tangente in questi casi (non compresi nella trattazione del cap. IV).

Caso 1. Sia $\mathcal{L}$ una curva intersezione della superficie $S_1 : g(x, y, z) = 0$ e della superficie $S_2 : h(x, y, z) = 0$. Sia $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto di $\mathcal{L}$; allora la tangente $r_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{L}$ in P_0 se esiste appartiene al piano π_1 tangente a S_1 in P_0 e al piano π_2 tangente a S_2 in P_0. Se $\pi_1 \neq \pi_2$, allora $r_{\mathcal{L}} = \pi_1 \cap \pi_2$, cioè:

$$r_{\mathcal{L}} : \begin{cases} \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)_{P_0} (x - x_0) + \left(\dfrac{\partial g}{\partial y}\right)_{P_0} (y - y_0) + \left(\dfrac{\partial g}{\partial z}\right)_{P_0} (z - z_0) = 0 \\ \left(\dfrac{\partial h}{\partial x}\right)_{P_0} (x - x_0) + \left(\dfrac{\partial h}{\partial y}\right)_{P_0} (y - y_0) + \left(\dfrac{\partial h}{\partial z}\right)_{P_0} (z - z_0) = 0 \ . \end{cases}$$

Esempio. La retta r tangente in $P_0 = (1, \sqrt{2}, 0)$ al cerchio di equazioni: $x - z - 1 = x^2 + y^2 + (z+1)^2 - 4 = 0$ ha equazioni (ricordando che $\pi_1 = S_1$ essendo S_1 un piano):

$$\begin{cases} x = z + 1 \\ 2(x-1) + 2\sqrt{2}(y - \sqrt{2}) + 2z = 0 \end{cases} \qquad \text{cioè:}$$

$$\begin{cases} x = z + 1 \\ x + \sqrt{2}\, y + z = 3 \ . \end{cases}$$

Osservazione. Se π_1 e π_2 sono coincidenti ci vogliono altri metodi, come pure se π_1 o π_2 non esiste.

Caso 2. Sia $\mathcal{L}$ la curva del piano di equazione $f(x,y) = 0$ (nel piano xy). Si può considerare $\mathcal{L}$ come intersezione del piano $S_1 : z = 0$ e del cilindro $S_2 : f(x,y) = 0$ che la proietta parallelamente all'asse z. Pertanto

$$r_{\mathcal{L}} = \begin{cases} z = 0 \\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} (x - x_0) + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} (y - y_0) = 0 \ . \end{cases}$$

Dunque, sul piano xy, $r_{\mathcal{L}}$ è ortogonale al vettore $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} = \operatorname{grad}_{P_0} f$. Pertanto $\mathcal{L}$ ha tangente se e solo se $\operatorname{grad}_{P_0} f \neq 0$.

Osservazione 1. Si vede subito che la normale principale a $\mathcal{L}$ in P_0 ha equazione

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} (x - x_0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} (y - y_0) = 0 \ ,$$

in quanto deve essere ortogonale a $r_{\mathcal{L}}$ e quindi parallela a $\operatorname{grad}_{P_0} f$.

Esempio. Sia $\mathcal{L}: x^2+y^2-1=0$; la tangente a $\mathcal{L}$ in $P_0=(1,0)$ ha equazione: $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(1,0)(x-1)+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(1,0)y=0$, cioè: $x=1$. La normale in P_0 ha equazione: $y=0$ (si noti che passa per il centro $(0,0)$ della circonferenza $\mathcal{L}$).

Osservazione 2. Se $\mathcal{L}: f(x,y)=0$ passa per O, la retta tangente in O ha equazione:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_O x+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 y=0 .$$

Sia $\mathcal{L}$ una curva algebrica (cioè f è un *polinomio*): $f(x,y)=a_1 x+b_1 y+f_2(x,y)+\ldots+f_n(x,y)$ dove a_1 e b_1 non sono entrambi nulli (perchè $(a_1,b_1)=\mathrm{grad}_0(f)$) e $f_2,\ldots,f_n$ sono monomi di grado $2,\ldots,n$. Allora $r_{\mathcal{L}}: a_1 x+b_1 y=0$.

Pertanto la tangente in O si ottiene annullando i termini di grado 1 (in $f(x,y)$).

8.5. *Superfici regolari in forma parametrica*

Nel cap. II abbiamo introdotto il concetto di superficie S in forma parametrica cioè:

$$S: P=P(u,v)=(x(u,v)\,,\,y(u,v)\,,\,z(u,v))\ ,$$

dove il punto (u,v) varierà d'ora in poi in un aperto U di $\mathbb{R}^2$. Quindi, se P è una funzione di due variabili a valori in $\mathbb{R}^3$, $P(u,v)$ varia sopra una superficie S dello spazio.

Definizione. $S: P=P(u,v)$ si dice regolare se

A. P è inietiva;

B. P è di classe C^∞;

C. la matrice jacobiana

$$J_{(u,v)}P=\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$$

ha rango 2 ovunque, cioè *determina sempre una applicazione lineare iniettiva.*

Osservazione importante. Sopra una superficie regolare S i due vettori $P_u = (x_u, y_u, z_u)$ e $P_v = (x_v, y_v, z_v)$ *non sono paralleli* in alcun punto della superficie (e nessuno dei due è mai il vettore nullo), per la condizione C.

Esempio 1. Un piano dello spazio si può esprimere in forma parametrica così:

$$P = s\mathbf{v} + t\mathbf{w} + P_0$$

dove $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono due vettori non paralleli.

È ovvio che $P = P(s,t)$ è continua e C^∞. Inoltre si ha:

$$P_s = \mathbf{v} \quad , \qquad P_t = \mathbf{w} \ ,$$

quindi P_s e P_t non sono paralleli, cioè la condizione C è soddisfatta.

Pertanto un piano è una superficie regolare.

Esempio 2. $S : (x,y,z) = (u, uv, v^2)$ non è regolare perchè non è iniettiva; infatti $P(0,1) = P(0,-1) = (0,0,1)$.

Esempio 3. $S : (x,y,z) = (t\cos u \, , \ t \sin u \, , \ u^3)$ con $-\pi < u < \pi$, $-\infty < t < +\infty$, è iniettiva ma non regolare, perchè la matrice jacobiana in $t = u = 0$ ha rango 1:

$$J_{(0,0)}P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

8.6. *Curve regolari sopra una superficie regolare*

Sia $S : P = P(u,v)$ una superficie regolare e $\mathcal{L} : P = P(u_0, v)$ (ovvero $P = P(u, v_0)$) una curva coordinata.

Allora P è iniettiva e di classe C^∞ e inoltre la condizione C sulla superficie implica che $P'(u_0, v)$ (risp. $P'(u, v_0)$) non è mai nullo, in quanto:

$$P'(u_0, v) = \left(\frac{\partial (P(u,v))}{\partial v} \right)_{u=u_0} \ .$$

Pertanto $\mathcal{L}$ è regolare.

Più in generale, sia $\mathcal{L}$ una curva tracciata sopra S, definita dalle equazioni parametriche:

$$\mathcal{L} : P = P(u(t) \, , \, v(t)) \ ;$$

ciò significa che il punto $Q = (u, v)$ varia in funzione del parametro t e quindi P è funzione composta di t attraverso u e v. Se la curva piana $\mathcal{L}' : Q = Q(t) = (u(t)\,,\, v(t))$ è regolare, allora anche $\mathcal{L}$ è regolare.

Infatti le condizioni sulla iniettività e la classe C^∞ sono chiare; per quel che riguarda il vettore tangente a $\mathcal{L}$, si ha (per la formula di derivazione delle funzioni composte):

$$\frac{dP}{dt} = P_u \frac{du}{dt} + P_v \frac{dv}{dt} \tag{8.2}$$

che non è mai nullo perchè P_u e P_v non sono mai paralleli.

Esempio. Sia $S : (x, y, z) = (u,\, v^3,\, u - v)$ una superficie regolare e $\mathcal{L}'$ la curva piana regolare di equazioni:

$$u = 3t$$
$$v = t^2 \; .$$

Allora la curva $\mathcal{L} : P = P(t) = (3t,\, t^6,\, 3t - t^2)$ è tracciata sopra S e regolare. Infatti si ha:

$$\frac{dP}{dt} = (3,\, 6t^5,\, 3 - 2t) \neq (0, 0, 0) \qquad \forall t \; .$$

8.7. *Il piano tangente a una superficie regolare*

Sia $S : P = P(u, v)$ una superficie regolare e $P_0 = P(u_0, v_0)$ un suo punto. Vogliamo qui introdurre il piano tangente come si è fatto in **8.1** per le superfici in forma cartesiana. Occorre premettere il seguente

Teorema. *Sia $\mathcal{L} : P = P(u(t)\,,\, v(t))$ una curva regolare tracciata sopra S e passante per P_0; allora la retta tangente a $\mathcal{L}$ in P_0 giace nel piano π generato dalle rette tangenti alle curve coordinate di S per P_0.*

Dimostrazione. Discende dalla (8.2), dove si afferma che il vettore $P'(t)$ è combinazione lineare di P_u e P_v, cioè dei vettori paralleli alle rette r_u ed r_v tangenti alle linee coordinate.

Resta dunque giustificata la seguente:

8.8. *Definizione* (di piano tangente). *Le rette tangenti alle due curve coordinate $P = P(u_0, v)$ e $P = P(u, v_0)$ sopra S passanti per P_0 individuano il piano tangente a S in P_0.*

Regola pratica per scrivere un'equazione del piano tangente π *a* S *in* P_0:

$$\pi : (P - P_0) \cdot P_u \wedge P_v = 0 \ ,$$

cioè, in forma cartesiana:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ (x_u)_{P_0} & (y_u)_{P_0} & (z_u)_{P_0} \\ (x_v)_{P_0} & (y_v)_{P_0} & (z_v)_{P_0} \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Esempio 1. Il piano tangente a $S : (x, y, z) = (u - v \, , \, u^2 + v \, , \, u - v^3)$ in $P_0 = P(1, 1) = (0, 2, 0)$ ha equazione:

$$\begin{vmatrix} x & y - 2 & z \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

cioè:

$$7x - 2y - 3z + 4 = 0 \ .$$

Esempio 2. Se γ è una circonferenza contenuta nella superficie sferica S e $P_0 \in \gamma$, la tangente a γ in P_0 è contenuta nel piano tangente a S in P_0.

Osservazione 1. Il differenziale di $P = P(u, v)$ in (u_0, v_0) è l'applicazione lineare:

$$\big(d_{(u_0,v_0)}\, P(u, v)\big)(s, t) =$$
$$= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\,(u_0, v_0)\, s + \frac{\partial x}{\partial v}\,(u_0, v_0)\, t \ , \ \frac{\partial y}{\partial u}\,(u_0, v_0)\, s + \frac{\partial y}{\partial v}\,(u_0, v_0)\, t \ , \ \frac{\partial z}{\partial u}\,(u_0, v_0)\, s + \frac{\partial z}{\partial v}\,(u_0, v_0)\, t \right) \ .$$

Se la matrice jacobiana:

$$J_{(u_0,v_0)}\, f = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}_{(u_0,v_0)}$$

ha rango 2, si può considerare il piano di equazioni parametriche:

$$\pi : \begin{cases} x = x(u_0, v_0) + x_u(u_0, v_0)\, s + x_v(u_0, v_0)\, t \\ y = y(u_0, v_0) + y_u(u_0, v_0)\, s + y_v(u_0, v_0)\, t \\ z = z(u_0, v_0) + z_u(u_0, v_0)\, s + z_v(u_0, v_0)\, t \ . \end{cases}$$

Tale piano π è parallelo ai vettori $P_u = (x_u, y_u, z_u)(u_0, v_0)$ e $P_v = (x_v, y_v, z_v)(u_0, v_0)$ e pertanto è il piano tangente. Resta dunque interpretato il differenziale in termini geometrici di piano tangente.

Osservazione 2. Analoga interpretazione si può dare al differenziale di $z = f(x,y)$ in (x_0, y_0). In effetti $(d_{(x_0,y_0)} f)(u,v) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)} u + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)} v$, mentre $z = z_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)} (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)} (y - y_0)$ è l'equazione del piano tangente.

8.9. *Angolo tra due curve di una superficie*

Siano $\mathcal{L}_1$ $\mathcal{L}_2$ due curve e sia P_0 un punto di entrambe. Diremo che $\mathcal{L}_1$ ed $\mathcal{L}_2$ *formano un angolo* α *in* P_0 se le tangenti ad $\mathcal{L}_1$ ed $\mathcal{L}_2$ in P_0 esistono e formano un angolo α.

In particolare se $\alpha = \pi/2$ diremo che $\mathcal{L}_1$ ed $\mathcal{L}_2$ sono *ortogonali* in P_0.

Inoltre $\mathcal{L}_1$ ed $\mathcal{L}_2$ sono tangenti in P_0 se e solo se $\alpha = 0$.

Questa nozione si applica principalmente alle curve di una fissata superficie S e in particolare alle curve coordinate.

Esempio 1. La normale e la binormale ad una curva $\mathcal{L}$ in P_0 sono ortogonali ad $\mathcal{L}$ in P_0.

Esempio 2. Se $\mathcal{L}_1 : f(x,y) = 0$, $\mathcal{L}_2 : g(x,y) = 0$ sono due curve del piano Oxy e P_0 è un punto comune a $\mathcal{L}_1$ ed $\mathcal{L}_2$, l'angolo formato da $\mathcal{L}_1$ ed $\mathcal{L}_2$ in P_0 coincide con l'angolo dei vettori $\mathrm{grad}_{P_0} f$ e $\mathrm{grad}_{P_0} g$. Infatti questi vettori sono ortogonali alle rispettive tangenti a $\mathcal{L}_1$ ed $\mathcal{L}_2$ in P_0. L'angolo α formato da $\mathcal{L}_1$ ed $\mathcal{L}_2$ in P_0 è quindi dato dalla formula

$$\cos\alpha \frac{(\mathrm{grad}_{P_0} f)\cdot(\mathrm{grad}_{P_0} g)}{||\mathrm{grad}_{P_0} f||\cdot||\mathrm{grad}_{P_0} g||} .$$

Esempio 3. Trovare l'angolo formato dalle curve $\mathcal{L}_1 : x^2 + y + 1 = 0$ e $\mathcal{L}_2 : xy - 1 = 0$ in ciascuno dei punti di intersezione reali.

Soluzione. L'unico punto di intersezione reale è $P_0 = (-1,-1)$. Applicando la (8.3) si trova:

$$\cos\alpha = \frac{(-2,0)\cdot(-1,-1)}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

da cui si deduce $\alpha = \pi/4$.

Esempio 4. Sia $S : (x, y, z) = (u \cos v\,,\ u \sin v\,,\ u)$. Trovare i punti di S in cui le curve coordinate si incontrano ortogonalmente.

Soluzione. Se P_0 è il punto di S corrispondente alla coppia (u_0, v_0), le curve coordinate passanti per P_0 sono

$$\mathcal{L}_1 : (x, y, z) = (u_0 \cos v\,,\ u_0 \sin v\,,\ u_0)$$
$$\mathcal{L}_2 : (x, y, z) = (u \cos v_0\,,\ u \sin v_0\,,\ u)\ .$$

Due vettori tangenti in P_0 alle curve in esame sono

$$\mathbf{v}_1 = (-u_0 \sin v_0\,,\ u_0 \cos v_0\,,\ 0) \qquad \mathbf{v}_2 = (\cos v_0\,,\ \sin v_0\,,\ 1)\ .$$

Questi vettori sono ortogonali se $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ ossia quando vale la relazione:

$$-u_0 \sin v_0 \cos v_0 + u_0 \cos v_0 \sin v_0 = 0$$

e quindi le curve coordinate sono ortogonali in ogni punto di S in cui la cosa ha senso, cioè in tutti i punti corrispondenti a coppia (u, v) con $u \neq 0$.

8.10. *Normale ad una superficie e angolo di incidenza*

La *normale* alla superficie S nel punto P_0 è la retta per P_0 ortogonale al piano tangente ad S in P_0. Tale retta esiste quando esiste il piano tangente. Un vettore $\mathbf{v}$ è *ortogonale* a S in P_0 se è parallelo alla normale (ossia ortogonale al piano tangente a S in P_0).

Esempio 1. Se S è un piano, la normale ad S in P_0 è la retta per P_0 ortogonale ad S.

Esempio 2. Se $S : f(x, y, z) = 0$, la normale ad S in P_0 ha equazione parametrica vettoriale

$$P = P_0 + t(\text{grad}_{P_0} f)\ .$$

In particolare $\text{grad}_{P_0} f$ è un vettore ortogonale a S in P_0.

Se r è una retta passante per P_0, l'angolo formato da r e dalla normale ad s in P_0 si chiama *angolo di incidenza* (tra r ed S in P_0).

Esempio 3. La normale ad S in P_0 ha angolo di incidenza 0. Ogni retta tangente ad S in P_0 ha angolo di incidenza uguale a $\pi/2$.

Esempio 4. Se $S: f(x,y,z)=0$ e $r: P=P_0+t\mathbf{u}$ è una retta passante per il punto P_0 di S, l'angolo di incidenza α è dato dalla formula

$$\cos\alpha = \frac{(\mathrm{grad}_{P_0} f)\cdot \mathbf{u}}{\|\mathrm{grad}_{P_0} f\|\,\|\mathbf{u}\|} \quad .$$

Più in generale l'angolo di incidenza di una curva $\mathcal{L}$ con una superficie S (in un punto P_0 comune a entrambe) è l'angolo di incidenza tra S e la tangente ad $\mathcal{L}$ in P_0.

9. Classificazione dei punti di una superficie

Vediamo che i punti regolari di una superficie possono essere di tre tipi – iperbolici, ellittici, parabolici – a seconda della posizione del piano tangente rispetto alla superficie. Ciò estende quanto visto nel cap. II per le quadriche.

9.1. *Punti iperbolici, ellittici, parabolici di una superficie*

Sia P_0 un punto della superficie S e supponiamo che il piano π tangente ad S in P_0 esista.

Il punto P_0 si dice *iperbolico* se in ogni intorno di P_0 esistono punti di S da entrambi i lati di π.

Il punto P_0 si dice *ellittico* se esiste un intorno U di P_0 tale che $S\cap U$ si trova tutta dalla stessa parte di π e inoltre P_0 è l'unico punto di U comune ad S e a P_0.

Il punto P_0 si dice *parabolico* se non è nè ellittico nè iperbolico. Ciò vuol dire che esiste un intorno U di P_0 tale che $U\cap S$ è tutta dalla stessa parte di π, e inoltre in ogni intorno di P_0 ci sono punti comuni a S e π, diversi da P_0.

Esempio. Sia $S: z=f(x,y)$ il grafico della funzione di due variabili f, e sia $P_0=(x_0\,,\,y_0\,,\,f(x_0,y_0))$ un punto di S tale che $\mathrm{grad}_{(x_0,y_0)} f=(0,0)$. Allora si ha:

- P_0 è iperbolico se (x_0,y_0) è un punto di sella per f
- P_0 è ellittico se (x_0,y_0) è un punto di massimo o minimo isolato per f
- P_0 è parabolico se (x_0,y_0) è un punto di massimo o minimo non isolato.

9.2. *Classificazione dei punti di una superficie* $S: f(x,y,z)=0$

Sia $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ un punto regolare di S e supponiamo che f sia C^3 in un intorno di P_0. Sviluppando f con la formula di Taylor in P_0 si vede che S si può approssimare, vicino a P_0, con la quadrica Γ di equazione:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial z}(P_0)(z-z_0)+$$
$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x}(P_0)(x-x_0)^2+2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(P_0)(x-x_0)(y-y_0)+\ldots\right\}=0\ .$$

Questa quadrica si chiama *quadrica osculatrice* ad S in P_0. Dalla formula di Taylor si deduce che P_0 è iperbolico per S se e solo se è iperbolico per Γ, etc.

Moltiplicando per 2 l'equazione precedente e traslando P_0 nell'origine (il che non cambia la quadrica) si può supporre che la matrice di Γ sia

(9.1) $$A=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}(P_0) & \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}(P_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(P_0) & \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) & \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto per stabilire la natura di P_0 basta studiare la matrice A.

Esempio. Stabilire la natura del punto $P_0=(-1,1,1)$ della superficie $S: x+x^3+y^2+z^3=0$.

Soluzione. La quadrica osculatrice, traslando P_0 nell'origine è associata alla matrice

$$A=\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\det A=132$. Pertanto P_0 è un punto iperbolico.

Osservazione. In qualche caso si può studiare la natura di P_0 nel modo seguente:

- si effettua un cambiamento di coordinate in modo che il piano tangente π sia parallelo al piano $z=0$;
- si ricava z dall'equazione di S, trovando $z=g(x,y)$;
- si applica l'esempio visto in **9.1**.

La difficoltà di questo metodo sta nel poter esplicitare effettivamente la z. Si può dimostrare che ciò è sempre possibile se l'equazione di S è un polinomio in x,y,z.

10. Esercizi

1. Trovare il piano tangente e la retta normale alla superficie $S : (x, y, z) = (e^u, u + v, u)$ nel punto $P(u, v)$.

2. Trovare il piano tangente e la retta normale alla superficie $S : z = e^{xy}$ nei punti regolari di S.

3. Trovare l'angolo α delle curve coordinate della superficie di **1** nel punto $(1, 1, 0)$.

4. Stabilire per quali valori di λ e μ la retta $r : P = P_0 + t(\mu, 0, \lambda)$ è tangente in $P_0 = (0, 0, 1)$ alla superficie $S : z = e^{xy}$.

5. Sia P_0 un punto regolare della superficie S e sia α un piano passante per S. Supponiamo che esistano due curve regolari su S passanti per P_0, tangenti ad α, e formanti un angolo $\neq 0$ e $\neq \pi$. Dimostrare che α è tangente ad S in P_0.

6. Stabilire se l'origine delle coordinate è un punto ellittico, iperbolico o parabolico nelle superfici

$$S_1 : z - yz = 0 \ ; \quad S_2 : z - y^2 - x^4 = 0 \ ; \quad S_3 : x + y + z - x^2 - y^2 - z^3 = 0 \ .$$

7. Studiare le curve coordinate della superficie

$$S : (x, y, z) = (1 + 2u + v^2 \, , \; 3u + 2v^2 \, , \; 1 - u - v) \ .$$

8. Trovare il luogo dei punti in cui il piano tangente alla superficie S dell'esercizio precedente è parallelo all'asse delle z.

9. Trovare i massimi e minimi della funzione $f(x, y, z) = z^2 - x + 2y$, sottoposta al vincolo: $x + y - z = 0$.