Capitolo IX

CALCOLO DIFFERENZIALE PER FUNZIONI DI PIU' VARIABILI

1. DOMINIO ED INSIEMI DI LIVELLO DI FUNZIONI A VALORI REALI.

Richiami.

Una funzione di n variabili a valori reali si indica con $f(x_1, \ldots, x_n)$ o semplicemente $f(P)$, con P appartenente allo spazio euclideo $\mathbf{R}^n$.

Il *dominio* di f, $\operatorname{dom} f$, è l'insieme dei punti $P \in \mathbf{R}^n$ per cui è definito $f(P)$.

Il *grafico* di f è il sottinsieme costituito dai punti $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tali che $x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)$ con $(x_1, \ldots, x_n) \in \operatorname{dom} f$. Se f è una funzione di due variabili reali (x, y), il suo grafico è la *superficie topografica* di equazione: $z = f(x, y)$.

L'*insieme di livello* $c \in \mathbf{R}$ della funzione f è costituito dai punti $P \in \operatorname{dom} f$ tali che $f(P) = c$; l'insieme di livello relativo ad un punto $P_0 \in \operatorname{dom} f$ è l'insieme dei punti $P \in \operatorname{dom} f$ tali che $f(P) = f(P_0)$. Se $n = 2$ ovvero $n = 3$, gli insiemi di livello si dicono rispettivamente *linee* e *superfici di livello*.

Sia P_0, un punto di accumulazione di $\operatorname{dom} f$; si dice che f ha *limite* $l \in \mathbf{R}$ per $P \to P_0$ e si scrive

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = l$$

se, $\forall\ \epsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che $|f(P) - l| < \epsilon$, $\forall\ P \in \operatorname{dom} f$ e $0 < \|P - P_0\| < \delta$

La funzione f si dice *continua in* P_0 se $\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$.

Esercizi.

1.1. *Determinare e rappresentare graficamente il dominio delle seguenti funzioni di due variabili:*

1) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2 - 1}$

2) $f(x, y) = \log(x^2 - 4y^2 - 1)$

3) $f(x, y) = \sqrt{\dfrac{4y - x^2}{\cos x}}$

4) $f(x, y) = \log(\sin(x^2 + y^2))$

5) $f(x, y) = \arcsin(x^2 + y^2 - 4)$

1) $P(x, y) \in \operatorname{dom} f$ se $x^2 + 4y^2 - 1 \geqslant 0$. Si tratta dei punti esterni ed appartenenti all'ellisse: $x^2 + 4y^2 - 1 = 0$ (fig. 1)

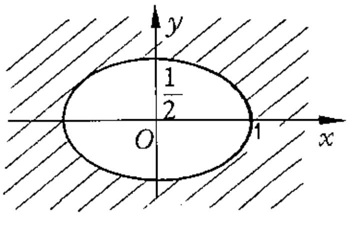

Fig. 1

2) $P(x, y) \in \operatorname{dom} f$ se $x^2 - 4y^2 - 1 > 0$. Sono i punti interni all'iperbole σ di equazione: $x^2 - 4y^2 - 1 = 0$ (fig. 2)

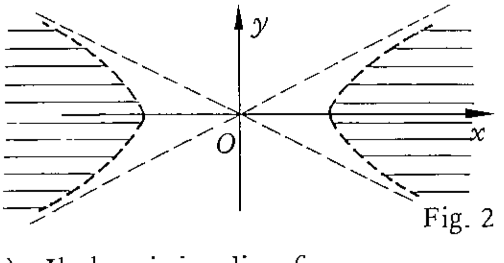

Fig. 2

3) Il dominio di f , rappresentato in Fig. 3, è costituito dai punti per cui

si ha: o : $4y - x^2 \geqslant 0$, $\cos x > 0$ e quindi i punti interni o appartenenti alla parabola : $y = \frac{1}{4} x^2$ con $x \in \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[$, k intero;

ovvero i punti per cui $4y - x^2 < 0$, $\cos x < 0$, che sono i punti esterni alla stessa parabola e con $x \in \left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right[$.

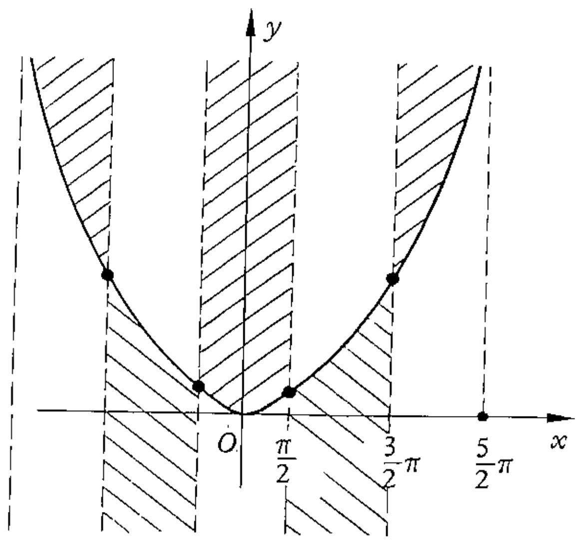

Fig. 3

4) Il dominio di f è costituito dai punti per cui $\sin(x^2 + y^2) > 0$ e quindi $0 < x^2 + y^2 < \pi$, ovvero $2\pi < x^2 + y^2 < 3\pi$, ecc.

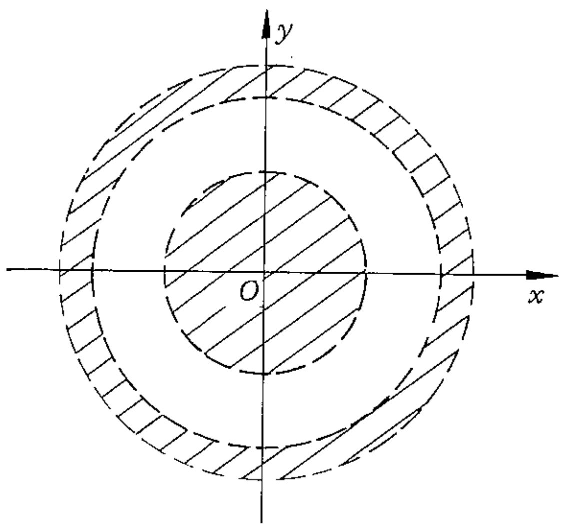

Fig. 4

Si ottengono infinite corone circolari di centro l'origine e private del bordo oltre al cerchio di centro l'origine (esclusa dal dominio) e raggio $\sqrt{\pi}$.

5) La funzione arcsin ρ è definita per $-1 \leqslant \rho \leqslant 1$ e quindi dovrà essere $-1 \leqslant x^2 + y^2 - 4 \leqslant 1$; cioè il dominio di f è costituito dalla corona circolare di centro l'origine e delimitata dalle circonferenze di raggio $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$, circonferenze comprese.

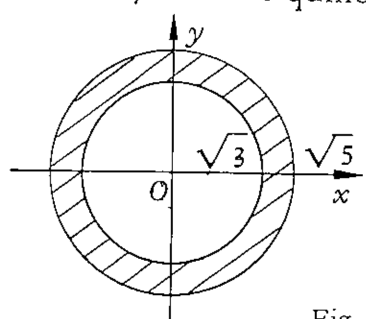

Fig. 5

1.2. *Determinare e descrivere il dominio delle seguenti funzioni di tre variabili:*

1) $f(x, y, z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2-2x-4y}$

2) $f(x, y, z)=\sqrt{x^2+y^2-z^2-1}$

3) $f(x, y, z)=\log \dfrac{z-x^2}{y-1}$

1) I punti $P(x, y, z) \in \operatorname{dom} f$ sono tali che $x^2+y^2+z^2-2x-4y \geqslant 0$; si tratta dei punti esterni o appartenenti alla sfera di equazione $x^2+y^2+z^2-2x-4y=0$ con centro $C(1, 2, 0)$ e raggio $R=\sqrt{5}$.

2) I punti $P(x, y, z) \in \operatorname{dom} f$ sono i punti per cui $x^2+y^2-z^2 \geqslant 1$ e quindi, poichè l'equazione $x^2+y^2-z^2=1$ rappresenta un iperboloide ad una falda di rotazione intorno all'asse z , il dominio di f è costituito dai punti di quella delle due regioni, delimitate da tale superficie, a cui non appartiene l'origine del sistema di riferimento.

3) La regione è costituita dai punti per cui o: $z-x^2>0$ e $y>1$ ovvero $z-x^2<0$ e $y<1$. L'equazione $z-x^2=0$ rappresenta un cilindro parabolico con generatrici parallele all'asse y e quindi il dominio è costituito dai punti del semispazio $y>1$ interni al cilindro e dai punti del semispazio $y<1$ esterni al cilindro.

1.3. *Considerata la funzione*

$$f(x, y)=\sqrt{y^2-x^2}$$

determinarne il dominio, il grafico, la linea di livello c *, la linea di livello relativa al punto* P_o $(4,5)$.

Il dominio di f è costituito dai punti (x, y) per cui $y^2-x^2 \geqslant 0$;

poichè $y^2 - x^2 = 0$ rappresenta la coppia di rette $x-y=0$, $x+y=0$; il dominio di f è costituito dall'angolo completo individuato dalle due rette, lati compresi, che contiene l'asse y .

La superficie topografica individuata da f ha equazione: $z=\sqrt{y^2-x^2}$ o anche $z^2=y^2-x^2$ con $z \geqslant 0$.

Poichè l'equazione $x^2-y^2+z^2=0$ rappresenta un cono di rotazione di asse l'asse y e vertice l'origine, il grafico richiesto è la parte di tale cono con $z \geqslant 0$.

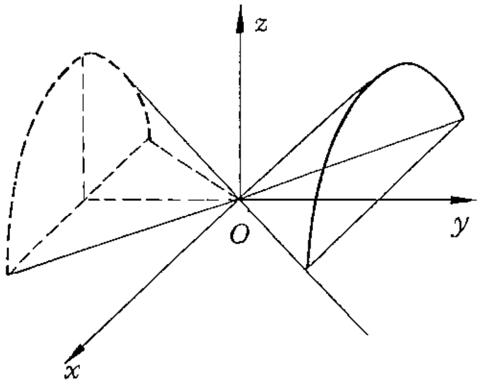

Fig. 6

Per quanto riguarda le linee di livello si ha che: se $c<0$, l'insieme di livello è vuoto, se $c=0$ sono le rette $x-y=0$, $x+y=0$, se $c>0$ è l'iperbole del piano $[x\ y]$ di equazione $y^2-x^2=c^2$, con asintoti le rette precedenti e vertici in $V(0,c)$, $V'(0,-c)$. A tale tipo di iperboli appartiene la linea di livello relativa al punto P_0 $(4,5)$ che ha equazione $y^2-x^2=9$.

1.4. *Considerata la funzione*

$$f(x,y)=\arcsin(x^2+y^2)$$

verificare che la corrispondente superficie grafico è una superficie di rotazione intorno all'asse z *; determinare le linee di livello* $0, \frac{\pi}{4}$ *di* f *e la linea di livello relativa al punto* $P_0\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

La superficie di equazione $z=\arcsin(x^2+y^2)$ si ottiene facendo ruotare intorno all'asse z la curva: $y=0$, $z=\arcsin x^2$ (con $-1 \leqslant x \leqslant 1$) e il cui grafico è rappresentato approssimativamente in Fig. 7.

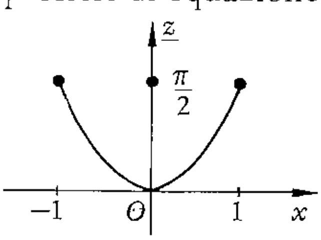

Fig. 7

La linea di livello 0 di f si riduce all'origine, la linea di livello $\frac{\pi}{4}$ è l'insieme dei punti per cui $\arcsin(x^2+y^2)=\frac{\pi}{4}$, cioè $x^2+y^2=\frac{1}{\sqrt{2}}$, circonferenza di centro l'origine e raggio $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$, mentre la linea di livello relativa al punto $P_0\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ è la circonferenza $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ di centro l'origine e raggio $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

1.5. *Considerata la funzione*

$$f(x,y,z)=\log(x^2-2y^2-2z^2-1)$$

determinarne il dominio, la superficie di livello 1, *la superficie di livello relativa al punto* P_0 $(3,1,0)$.

Deve essere $x^2-2y^2-2z^2-1>0$; poichè l'equazione $x^2-2y^2-2z^2-1=0$ rappresenta un iperboloide a due falde di rotazione intorno all'asse x, i punti del dominio sono i punti interni all'iperboloide.

La superficie di livello 1 di f è data da

$$\log(x^2-2y^2-2z^2-1)=1 \quad , \quad \text{cioè} \quad x^2-2y^2-2z^2=1+e$$

che è un iperboloide del tipo precedente (e tutto interno a $x^2-2y^2-2z^2=1$), mentre la superficie di livello relativo al punto P_0, poichè $f(P_0)=\log 6$, ha equazione: $x^2-2y^2-2z^2=7$.

1.6. *Considerata la funzione*

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x-y}{x} & , \quad \text{per} \quad x\neq 0 \\ 0 & , \quad \text{per} \quad x=0 \end{cases}$$

dimostrare che essa non ha limite per $P \to P_0\ (0, 0)$.

Basta osservare che la restrizione di f ad una retta $r : y = mx$ è data da

$$f_r(x) = \begin{cases} \dfrac{x - mx}{x} = 1 - m \ , & \text{per} \quad x \neq 0 \\ 0 \ , & \text{per} \quad x = 0 \end{cases}$$

e $\lim\limits_{x \to 0} f_r(x) = 1 - m$, variabile al variare di r .

1.7. *Considerata la funzione*

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - 4y^2}$$

dimostrare che essa è continua nel punto $P_0\ (0, 0)$.

Utilizzando un sistema di coordinate polari (ρ, φ) e posto $x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$, si ha:

$$f = \sqrt{1 - \rho^2 \cos^2 \varphi - 4\rho^2 \sin^2 \varphi} \ \to \ 1 = f(P_0) \ \text{per} \ \rho \to 0 \ .$$

2. DERIVATE PARZIALI E DIFFERENZIALE DI UNA FUNZIONE A VALORI REALI.

Richiami.

Considerata una funzione $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, sia P_0 un punto interno al dominio di f ed $\mathbf{u}$ un vettore di $\mathbf{R}^n$; si dice che f è *derivabile* nel punto P_0 secondo il vettore u se esiste

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(P_0 + t\mathbf{u}) - f(P_0)}{t} = \left(\frac{df}{d\mathbf{u}}\right)_{P_0} . \tag{2.1}$$

Posto $F(t) = f(P_0 + t\mathbf{u})$, F è una funzione a valori reali della variabile reale t , definita in un intorno di $t = 0$, e si ha

$$\left(\frac{df}{d\mathbf{u}}\right)_{P_0} = F'(0) . \tag{2.2}$$

Se $\mathbf{u}$ è un versore, $\left(\frac{df}{d\mathbf{u}}\right)_{P_0}$ si dice *derivata direzionale.*

Le derivate di f nel punto P_0 rispetto ai vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ della base canonica di $\mathbf{R}^n$ si dicono *derivate parziali* in P_0 di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e si pone

$$\left(\frac{df}{d\mathbf{e}_i}\right)_{P_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{P_0} = f_{x_i}(P_0) , \quad (i = 1, 2, \dots, n) . \tag{2.3}$$

La derivata parziale rispetto ad x_i in pratica si calcola derivando con le solite regole la f rispetto ad x_i , trattando come costanti le altre variabili che figurano nell'espressione di f ; f si dice *derivabile* in P_0 se esistono le n derivate parziali di f in tale punto.

Il vettore di $\mathbf{R}^n$ avente come componenti le derivate parziali di f in P_0 si dice il *gradiente* di f in P_0 e si indica $\mathrm{grad}_{P_0} f$; al variare di P_0 nel dominio di f , il gradiente descrive un campo vettoriale.

La funzione f si dice *differenziabile* nel punto P_0 interno a $\mathrm{dom}\, f$ se esiste un'applicazione lineare $d_{P_0} f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ tale che, per ogni punto P appartenente a $\mathrm{dom}\, f$ e ad un conveniente intorno di P_0 , risulti:

$$f(P) = f(P_0) + d_{P_0} f(P - P_0) + o(\|P - P_0\|) . \tag{2.4}$$

Se f è differenziabile in P_0 , è derivabile in tale punto secondo un qualunque vettore $\mathbf{u}$ e si ha la formula, di uso comune per la derivata di f secondo $\mathbf{u}$,

$$(2.5)\qquad d_{P_0} f(\mathbf{u}) = \left(\frac{df}{d\mathbf{u}}\right)_{P_0} = \mathrm{grad}_{P_0} f \cdot \mathbf{u}$$

Se $\mathrm{grad}_{P_0} f \neq \mathbf{0}$, il versore per cui è massima la derivata direzionale in P_0 è $\mathbf{v} = \mathrm{vers}\ (\mathrm{grad}_{P_0} f) = \dfrac{\mathrm{grad}_{P_0} f}{\| \mathrm{grad}_{P_0} f \|}$; per tale versore si ha: $\left(\dfrac{df}{d\mathbf{v}}\right)_{P_0} = \| \mathrm{grad}_{P_0} f \|$.

Inoltre, se $\mathrm{grad}_{P_0} f \neq \mathbf{0}$, tale vettore è ortogonale all'insieme di livello relativo al punto P_0. Da ciò segue che:

Considerata una curva L del piano $[xy]$ di equazione $f(x, y) = 0$, se $P_0(x_0, y_0) \in L$, la retta tangente in P_0 ad L ha equazione:

$$(2.6)\qquad f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) = 0 \ .$$

Considerata una superficie S dello spazio di equazione $F(x, y, z) = 0$, se $Q_0(x_0, y_0, z_0) \in S$, il piano tangente ad S in Q_0 ha equazione

$$(2.7)\qquad F_x(Q_0)(x - x_0) + F_y(Q_0)(y - y_0) + F_z(Q_0)(z - z_0) = 0 \ .$$

In particolare, considerata una superficie topografica S, grafico della funzione $f(x, y)$, il piano tangente ad S nel punto $Q_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, immagine del punto $P_0(x_0, y_0) \in \mathrm{dom}\, f$, ha equazione:

$$(2.8)\qquad z = f(x_0, y_0) + f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) \ .$$

Esercizi.

2.1. *Calcolare le derivate parziali prime delle seguenti funzioni in un punto qualsiasi:*

1) $f(x, y) = xy(x^2 - y)$

2) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y}{\sin x}$

3) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$

4) $f(x, y) = \log \sqrt{xy}$

5) $f(x, y, z) = \dfrac{x - z}{y^2}$

6) $f(x, y, z) = \dfrac{y^2}{z} \quad e^x$

1) $f_x = y\,(x^2 - y) + 2x^2\, y \;, \quad f_y = x\,(x^2 - y) - xy \quad ;$

2) $f_x = \dfrac{2x \sin x - (x^2 - y) \cos x}{\sin^2 x} \;, \quad f_y = - \dfrac{1}{\sin x} \quad ;$

3) $f_x = \dfrac{1}{1 + \dfrac{y^2}{x^2}} \; - \dfrac{y}{x^2} = - \dfrac{y}{x^2 + {}^2}, \quad f_y = \dfrac{1}{1 + \dfrac{y^2}{x^2}} \; \dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} \quad ;$

4) $f_x = \dfrac{1}{\sqrt{xy}} \; \dfrac{1}{2\sqrt{xy}}\, y = \dfrac{1}{2x} \;, \quad f_y = \dfrac{1}{2y} \quad ;$

5) $f_x = \dfrac{1}{y^2} \;, \quad f_y = \dfrac{-2\,(x - z)}{y^3} \;, \quad f_z = - \dfrac{1}{y^2} \quad ;$

6) $f_x = \dfrac{y^2}{z} \; e^x \;, \quad f_y = \dfrac{2y}{z} \; e^x \;, \quad f_z = - \dfrac{y^2}{z^2} \; e^x \quad .$

2.2. *Calcolare il gradiente delle seguenti funzioni nel punto a fianco indicato:*

1) $f(x, y) = x^2 \sin(xy) \;, \quad P_0\,(1, 0) \;;$

2) $f(x, y) = x \log\sqrt{2x^2 - y^2}$, $P_0\ (1, -1)$;

3) $f(x, y, z) = \dfrac{y^2 z}{x}$, $P_0\ (1, -1, 2)$.

1) Si ha $f_x = 2x \sin(xy) + x^2 y \cos(xy)$, $f_y = x^3 \cos(xy)$ e quindi $f_x(P_0) = 0$, $f_y(P_0) = 1$, da cui $\mathrm{grad}_{P_0} f = \mathbf{j} = (0, 1)$.

2) Si ottiene $\mathrm{grad}_{P_0} f = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} = (2, 1)$.

3) Si ha $\mathrm{grad}_{P_0} f = -2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k} = (-2, -4, 1)$.

2.3. *Dimostrare che la funzione*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + 4y^2} , & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 , & \text{per} \quad x = y = 0 \end{cases}$$

non è continua in $P_0\ (0, 0)$, *ma è derivabile in tale punto.*

La non continuità di f in P_0 segue immediatamente considerando la restrizione f_r di f ad una retta $r : y = mx$ passante per P_0 ; si ottiene: $f_r(x) = \dfrac{m}{1+4m^2}$ per $x \neq 0$, $f_r(0) = 0$ e quindi $\lim\limits_{x \to 0} f_r(x) = \dfrac{m}{1+4m^2}$ che dipende da m e non coincide in generale con il valore della f in P_0 .

Per dimostrare che f è derivabile in P_0 rispetto ad x , bisogna far vedere che esiste:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + t\mathbf{i}) - f(P_0)}{t} .$$

Il punto $P_0 + t\mathbf{i}$ ha coordinate $(t, 0)$ ed $f(t, 0) = 0$, da cui $\dfrac{\partial f}{\partial x}(P_0) = 0$; analogamente si prova che $\dfrac{\partial f}{\partial y}(P_0) = 0$.

2.4. *Data la funzione* $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, *verificare che è continua in* $P_0\ (0, 0)$ *e non derivabile in tale punto.*

La continuità di f in P_0 si prova immediatamente usando ad esempio un sistema di coordinate polari. Si ha inoltre $f(P_0 + t\mathbf{i}) = f(t, 0) = \sqrt{t^2} = |t|$ e quindi $\dfrac{f(P_0 + t\mathbf{i}) - f(P_0)}{t} = \dfrac{|t|}{t}$, che non ha limite per $t \to 0$.

Non esiste pertanto la derivata parziale rispetto ad x in P_0 ed analogamente si prova che non esiste la derivata parziale rispetto ad y in P_0 .

Si studi la superficie grafico della funzione considerata.

2.5. *Determinare la derivata della funzione* f *secondo il vettore* $\mathbf{u}$ *nel punto* P_0 *nei seguenti casi:*

1) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y}{x + y}$, $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $P_0\ (1, 2)$

2) $f(x, y) = \sin\sqrt{x^2 - y}$, $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $P_0\ \left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$

3) $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 - y}{yz}$, $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $P_0\ (2, -1, 1)$.

Per il calcolo di $\left(\dfrac{df}{d\mathbf{u}}\right)_{P_0}$ si può utilizzare sia la formula (2.2) che la formula (2.3) , essendo differenziabili in P_0 le funzioni in esame. Illustriamo entrambi i metodi per il caso 1) , mentre negli altri casi verrà utilizzata la (2.3) .

1) Il punto $P_0 + t\mathbf{u}$ è il punto $P(1 + t, 2 - 3t)$; risulta quindi:

$$F(t) = f(P_0 + t\mathbf{u}) = \frac{(1 + t)^2 - (2 - 3t)}{1 + t + 2 - 3t} = \frac{t^2 + 5t - 1}{3 - 2t}$$

e pertanto

$$F'(t) = \frac{(2t+5)(3-2t)+2(t^2+5t-1)}{(3-2t)^2} \quad , \quad F'(0) = \left(\frac{df}{d\mathbf{u}}\right)_{P_0} = \frac{13}{9} \quad .$$

O anche:

$$f_x = \frac{x^2+2xy+y}{(x+y)^2} \quad , \quad f_y = -\frac{x^2+x}{(x+y)^2}$$

e quindi $\mathrm{grad}_{P_0} f = f_x(P_0)\,\mathbf{i} + f_y(P_0)\,\mathbf{j} = \frac{7}{9}\,\mathbf{i} - \frac{2}{9}\,\mathbf{j}$, da cui $\left(\frac{df}{d\mathbf{u}}\right)_{P_0} = \mathrm{grad}_{P_0} f \cdot \mathbf{u} = \frac{7}{9} + \frac{6}{9} = \frac{13}{9}$.

2) Risulta:

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2-y}} \cos\sqrt{x^2-y} \quad , \quad f_y = -\frac{1}{2\sqrt{x^2-y}} \cos\sqrt{x^2-y}$$

e quindi, $f_x(P_0) = 0$, $f_y(P_0) = 0$, $\mathrm{grad}_{P_0} f = \mathbf{0}$, $\left(\frac{df}{d\mathbf{u}}\right)_{P_0} = 0$.

3) Si ha $f_x = \frac{2x}{yz}$, $f_y = -\frac{x^2}{y^2 z}$, $f_z = \frac{y-x^2}{yz^2}$ e quindi $\mathrm{grad}_{P_0} f = -4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\left(\frac{df}{d\mathbf{u}}\right)_{P_0} = \mathrm{grad}_{P_0} f \cdot \mathbf{u} = -18$.

2.6. *Determinare il differenziale nel punto* P_0 *delle funzioni dell'Es. prec.*

Il differenziale in un punto P_0 di una funzione $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ è l'applicazione lineare di $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}$ che ad ogni vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ associa il numero $\mathrm{grad}_{P_0} f \cdot \mathbf{x}$ e quindi, rispetto alle basi canoniche di

$\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}$, $d_{P_0} f$ è rappresentato dalla matrice riga avente come elementi le componenti di $\mathrm{grad}_{P_0} f$. Si ha:

1) $d_{P_0} f(x_1, x_2) = \frac{7}{9} x_1 - \frac{2}{9} x_2$

2) $d_{P_0} f(x_1, x_2) = 0$

3) $d_{P_0} f(x_1, x_2, x_3) = -4x_1 - 4x_2 + 5x_3$.

2.7. *Considerata la funzione*

$$f(x, y, z) = e^{-x} \sqrt{x^2 + 2y^2 - z^2 - 3}$$

ed il punto P_0 $(0, 2, -1)$ *interno al dominio di* f , *determinare:*

1) ker $d_{P_0} f$;
2) *il piano tangente alla superficie di livello relativa al punto* P_0 ;
3) *il valore massimo della derivata direzionale di* f *in* P_0 ;
4) *i versori* $\mathbf{u}$ *paralleli al piano* $[xz]$ *e tali che* $\left(\frac{df}{d\mathbf{u}}\right)_{P_0} = 2$.

Per rispondere ai vari quesiti occorre determinare il gradiente di f in P_0 . Si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -e^{-x} \sqrt{x^2 + 2y^2 - z^2 - 3} + e^{-x} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2y^2 - z^2 - 3}} ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x} \frac{2y}{\sqrt{x^2 + 2y^2 - z^2 - 3}} , \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -e^{-x} \frac{z}{\sqrt{x^2 + 2y^2 - z^2 - 3}}$$

e quindi $\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = -2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial z}(P_0) = \frac{1}{2}$, da cui

$$\operatorname{grad}_{P_0} f = \left(-2, 2, \frac{1}{2}\right) .$$

1) Il nucleo di $d_{P_0} f$ è costituito dai vettori $\mathbf{u} = (x, y, z)$ ortogonali a $\operatorname{grad}_{P_0} f$, cioè tali che $-2x + 2y + \frac{1}{2} z = 0$, che è un sottospazio di dimensione 2 di $\mathbf{R}^3$.

2) Il piano tangente alla superficie di livello di f relativa a P_0 è il piano passante per P_0 e ortogonale a $\operatorname{grad}_{P_0} f$ ed ha equazione $-2x + 2(y-2) + \frac{1}{2}(z+1) = 0$, cioè $4x - 4y - z + 7 = 0$.

3) Il valore massimo della derivata direzionale in P_0 è $\| \operatorname{grad}_{P_0} f \| = \frac{1}{2}\sqrt{33}$ e si ottiene in corrispondenza al versore $\mathbf{v} = \operatorname{vers}(\operatorname{grad}_{P_0} f) = \frac{1}{\sqrt{33}}(-4, 4, 1)$.

4) Si devono determinare i versori $\mathbf{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ paralleli al piano $[xz]$ e tali che $\left(\frac{df}{d\mathbf{u}}\right)_{P_0} = \operatorname{grad}_{P_0} f \cdot \mathbf{u} = 2$.

Il parallelismo con il piano $[xz]$ comporta $\beta = 0$; inoltre è $\alpha^2 + \gamma^2 = 1$ essendo $\mathbf{u}$ un versore; infine $-2\alpha + \frac{1}{2}\gamma = 2$ per la condizione sulla derivata direzionale. Si deve pertanto risolvere il sistema: $\alpha^2 + \gamma^2 = 1$, $-2\alpha + \frac{1}{2}\gamma = 2$.

Ricavando γ dalla 2ª equazione: $\gamma = 4 + 4\alpha$ e sostituendo nella 1ª si ha: $17\alpha^2 + 32\alpha + 15 = 0$, da cui $\alpha = -1$, $\alpha = -\frac{15}{17}$ in corrispondenza a cui si trova $\gamma = 0$, $\gamma = \frac{8}{17}$ e quindi i versori: $(-1, 0, 0)$, $\left(-\frac{15}{17}, 0, \frac{8}{17}\right)$.

2.9. *Data la funzione*

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+4y^2-1}}{x}$$

1) *scrivere l'equazione della retta tangente alla linea di livello passante per il punto* $P_0\,(1,-1)$;
2) *trovare i vettori* $\mathbf{u}$ *di modulo* 2 *tali che* $\left(\frac{df}{d\mathbf{u}}\right)_{P_0} = 3$.

Occorre determinare $\text{grad}_{P_0} f$. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+4y^2-1}} - \sqrt{x^2+4y^2-1}}{x^2} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4y}{x\sqrt{x^2+4y^2-1}}$$

e quindi $\text{grad}_{P_0} f = -\frac{3}{2}\,\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$.

1) La retta tangente alla linea di livello passante per P_0 è la retta per P_0 perpendicolare a $\text{grad}_{P_0} f$ ed ha quindi equazione $\frac{3}{2}(x-1) + 2(y+1) = 0$, cioè $3x + 4y + 1 = 0$.

a) Indicando con (α, β) le componenti di $\mathbf{u}$ deve essere

$$\alpha^2 + \beta^2 = 4 \quad , \quad -\frac{3}{2}\,\alpha - 2\beta = 3$$

Risolvendo tale sistema si trovano i vettori $(-2, 0)$, $\left(\frac{14}{25}, -\frac{48}{25}\right)$.

2.10. *Verificare che il punto* $P_0\,(0, 1)$ *appartiene alla curva* L *del piano* $[xy]$ *di equazione:* $x^2y - \sin x - \log y - y^2 + 1 = 0$ *e determina-*

re la retta tangente ad L *in* P_0 .

Si applica la (2.6) e si ha: $f_x = 2xy - \cos x$, $f_y = x^2 - \dfrac{1}{y} - 2y$ e quindi $f_x(P_0) = -1$, $f_y(P_0) = -3$; la retta richiesta ha equazione $x + 3y - 3 = 0$.

2.11. *Verificare che il punto* $Q_0\ (2, 1, -1)$ *appartiene alla superficie* S *di equazione:* $x^2 - \log(yz + 2) - xz + y - 7 = 0$ *e determinare l'equazione del piano tangente ad* S *in* Q_0 .

Si applica la (2.7) e si ha $F_x = 2x - z$, $F_y = \dfrac{-z}{yz+2} + 1$, $F_z = -\dfrac{y}{yz+2} - x$ e quindi $F_x(Q_0) = 5$, $F_y(Q_0) = 2$, $F_z(Q_0) = -3$.

Il piano tangente ha equazione: $5x + 2y - 3z - 15 = 0$.

2.12. *Determinare il piano tangente alla superficie grafico della funzione* $f(x, y) = \sqrt{y^2 - \log x}$ *nel punto* $Q_0\ (1, -2, 2)$.

Si applica la (2.8), tenendo conto che $f_x = \dfrac{1}{2\sqrt{y^2 - \log x}} \left(-\dfrac{1}{x}\right)$, $f_y = \dfrac{y}{\sqrt{y^2 - \log x}}$, e che nel punto $P_0\ (1, -2)$ risulta $f_x(P_0) = -\dfrac{1}{4}$, $f_y(P_0) = -1$. Si trova il piano di equazione

$$z = 2 - \frac{1}{4}(x - 1) - 1(y + 2) \quad , \quad \text{cioè} \quad x + 4y + 4z - 1 = 0 \quad .$$

3. FORMULA DI TAYLOR. PUNTI DI STAZIONARIETA'.

Richiami.

La *formula di Taylor* permette di approssimare una funzione $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ di classe C^r in un intorno di un punto P_0, interno a $\operatorname{dom} f$, mediante un polinomio g di grado $\leqslant r$ detto *polinomio di Taylor di ordine* r e, per ogni punto P di un opportuno intorno di P_0, risulta:

$$f(P) = g(P) + o(\| P - P_0 \|^r) .$$

La formula di Taylor del 1° ordine è quella espressa dal differenziale, ed il polinomio di Taylor del 1° ordine è

$$g(P) = f(P_0) + d_{P_0} f(P - P_0) , \tag{3.1}$$

cioè g è il polinomio di grado $\leqslant 1$ che approssima f a meno di un infinitesimo di ordine superiore a $\| P - P_0 \|$ per $P \to P_0$.

La formula di Taylor del 2° ordine relativa ad una funzione $f(x, y)$ e ad un punto $P_0(x_0, y_0)$ è data da

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) +$$
$$+ \frac{1}{2!} \{f_{xx}(P_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(P_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(P_0)(y - y_0)^2\} + o(\| P - P_0 \|^2)$$

ed il corrispondente polinomio di Taylor è

$$g(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + \tag{3.2}$$
$$+ \frac{1}{2!} \{f_{xx}(P_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(P_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(P_0)(y - y_0)^2\} .$$

Formule analoghe per funzioni di più di due variabili, ovvero per polinomi di Taylor di ordine > 2.

I *punti di stazionarietà* di una funzione f sono i punti in cui si annulla $\operatorname{grad} f$ e possono essere punti di *massimo* o *minimo relativo* oppure punti di *sella*. Se P_0 è un punto di stazionarietà di f, un criterio per riconoscere il tipo è il seguente.

Considerata la matrice hessiana $H_{P_0} f$, che è la matrice simmetrica

$$(3.3) \qquad H_{P_0} f = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(P_0) & f_{x_1 x_2}(P_0) & \dots & f_{x_1 x_n}(P_0) \\ f_{x_2 x_1}(P_0) & f_{x_2 x_2}(P_0) & \dots & f_{x_2 x_n}(P_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{x_n x_1}(P_0) & f_{x_n x_2}(P_0) & \dots & f_{x_n x_n}(P_0) \end{pmatrix}$$

se tutti gli autovalori di $H_{P_0} f$ sono strettamente negativi, ovvero strettamente positivi, P_0 è un punto di massimo, ovvero minimo, relativo; se $H_{P_0} f$ ha almeno un autovalore positivo e un autovalore negativo, P_0 è un punto di sella.

Per determinare i segni degli autovalori della matrice hessiana, che sono tutti reali essendo la matrice simmetrica, è utile la *regola di Cartesio*:

Scritta l'equazione caratteristica di $H_{P_0} f$: $\det(H_{P_0} f - \lambda I) = 0$, secondo le potenze decrescenti di λ , il numero degli autovalori positivi di H_{P_0} f è uguale al numero delle variazioni di segno dei coefficienti della sua equazione caratteristica (i coefficienti nulli non si prendono in considerazione).

Esercizi.

3.1. *Scrivere i polinomi di Taylor del* 1° *e* 2° *ordine che approssimano la funzione* $f(x, y) = \dfrac{xy}{y+1}$ *in un intorno di* $P_0(-2, 1)$.

Si ha

$$f_x = \frac{y}{y+1}, \; f_y = \frac{x}{(y+1)^2}, \; f_{xx} = 0, \; f_{xy} = f_{yx} = \frac{1}{(y+1)^2}, \; f_{yy} = -\frac{2x}{(y+1)^3}$$

e quindi

$$f(P_0) = -1, \; f_x(P_0) = \frac{1}{2}, \; f_y(P_0) = -\frac{1}{2}, \; f_{xx}(P_0) = 0, \; f_{xy}(P_0) = \frac{1}{4}, \; f_{yy}(P_0) = \frac{1}{2}.$$

Indicati con $g_1(x, y)$, $g_2(x, y)$ i polinomi di Taylor del 1° e 2° ordine richiesti, risulta:

$$g_1(x, y) = -1 + \frac{1}{2}(x+2) - \frac{1}{2}(y-1) ,$$

$$g_2(x, y) = -1 + \frac{1}{2}(x+2) - \frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{4}(x+2)(y-1) + \frac{1}{4}(y-1)^2 .$$

3. 2. *Determinare i polinomi di Taylor del 1° e 2° ordine che approssimano in un intorno di* $P_0(-1, 0, 1)$ *la funzione*

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 y - \cos y + z^2}{z}$$

Risulta: $f_x = \dfrac{2xy}{z}$, $f_y = \dfrac{x^2 + \sin y}{z}$, $f_z = \dfrac{z^2 - x^2 y + \cos y}{z^2}$,

$f_{xx} = \dfrac{2y}{z}$, $f_{xy} = \dfrac{2x}{z}$, $f_{xz} = -\dfrac{2xy}{z^2}$, $f_{yy} = \dfrac{\cos y}{z}$, $f_{yz} = -\dfrac{x^2 + \sin y}{z^2}$

$f_{zz} = \dfrac{2(x^2 y - \cos y)}{z^3}$.

Nel punto P_0 si ha:

$$f(P_0) = 0 , \ f_x(P_0) = 0 , \ f_y(P_0) = 1 , \ f_z(P_0) = 2 ,$$

$$f_{xx}(P_0) = 0 , \ f_{xy}(P_0) = -2 , \ f_{xz}(P_0) = 0 , \ f_{yy}(P_0) = 1 , \ f_{yz}(P_0) = -1 , \ f_{zz}(P_0) = -2$$

e quindi:

$$g_1(x, y, z) = y + 2(z-1) ,$$

$$g_2(x, y, z) = y + 2(z-1) + \frac{1}{2}\{-4(x+1)y + y^2 - 2y(z-1) - 2(z-1)^2\}.$$

3.3. *Determinare, precisandone il tipo, i punti di stazionarietà delle seguenti funzioni di due variabili:*

1) $f(x, y) = 3x^2 - 4xy + y^2 - 2x + x^4$,

2) $f(x, y) = \log(y^2 - x^3 + 3x)$,

3) $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2 + 1}{y}$,

4) $f(x, y) = \sqrt{(2 + \cos x)^2 - y^2}$.

1) Si ha

$$f_x = 6x - 4y - 2 + 4x^3 \quad , \quad f_y = -4x + 2y$$

e quindi i punti di stazionarietà di f sono le soluzioni del sistema:

$$6x - 4y - 2 + 4x^3 = 0 \quad , \quad -4x + 2y = 0 \; .$$

Ricavando $y = 2x$ dalla 2ª equazione e sostituendo nella prima si ottiene : $4x^3 - 2x - 2 = 0$ che ha la sola soluzione reale $x = 1$. Pertanto l'unico punto di stazionarietà di f è $A\ (1, 2)$.

Risulta inoltre: $f_{xx} = 6 + 12x^2$, $f_{xy} = -4$, $f_{yy} = 2$ e quindi

$$H_A f = \begin{pmatrix} 18 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

ed i suoi autovalori sono le soluzioni dell'equazione

$$\begin{vmatrix} 18 - \lambda & -4 \\ -4 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 20\lambda + 20 = 0$$

entrambe positive per la regola di *Cartesio*. Pertanto il punto $A\ (1, 2)$ è un punto di minimo di f .

2) Si ha $f_x = \dfrac{-3x^2+3}{y^2-x^3+3x}$, $f_y = \dfrac{2y}{y^2-x^3+3x}$ e quindi, ponendo $f_x = 0$, $f_y = 0$, si ottengono i punti $A\ (1, 0)$, $B\ (-1, 0)$.
Poichè B non appartiene al dominio di f , l'unico punto di stazionarietà è A .

Si ha $f_{xx}\ (A) = -3$, $f_{xy}\ (A) = 0$, $f_{yy}\ (A) = 1$ e quindi

$$H_A f = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i cui autovalori sono $-3, 1$ essendo $H_A\ f$ diagonale; ne segue che A è un punto di sella per f .

3) Risulta

$$f_x = \frac{2x}{y} \quad , \quad f_y = \frac{y^2-x^2-1}{y^2}$$

e quindi, annullando grad f , si ottengono i punti $A\ (0, 1)$, $B\ (0, -1)$, entrambi appartenenti al dominio di f .
Si ha $f_{xx} = \dfrac{2}{y}$, $f_{xy} = -\dfrac{2x}{y^2}$, $f_{yy} = \dfrac{2\ (x^2+1)}{y^3}$ e quindi

$$H_A\ f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad A \text{ punto di minimo relativo}$$

$$H_B\ f = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad B \text{ punto di massimo relativo.}$$

Si osservi che $f(A) = 2$, $f(B) = -2$, cioè il valore che f prende nel punto di minimo relativo è maggiore del valore che f ha nel punto di massimo relativo.
Si studino le linee di livello della funzione f .

4) Si ha

$$f_x = \frac{-(2 + \cos x) \sin x}{\sqrt{(2 + \cos x)^2 - y^2}} \quad , \quad f_y = \frac{-y}{\sqrt{(2 + \cos x)^2 - y^2}}$$

Deve perciò essere $y = 0$, $(2 + \cos x) \sin x = 0$; poichè $2 + \cos x \neq 0$ per ogni x , deve essere $\sin x = 0$, cioè $x = k\pi$ (k intero arbitrario) .
Si hanno infiniti punti di stazionarietà $P_k\ (k\pi, 0)$.

Conviene distinguere il caso di k pari da quello di k dispari.
Se k è pari, si ha:

$$f_{xx}\ (P_k) = -1 \quad , \quad f_{xy}\ (P_k) = 0 \quad , \quad f_{yy}\ (P_k) = -\frac{1}{3}$$

e P_k è un punto di massimo relativo.
Se k è dispari, si ottiene:

$$f_{xx}\ (P_k) = 1 \quad , \quad f_{xy}\ (P_k) = 0 \quad , \quad f_{yy}\ (P_k) = -1$$

e P_k è un punto di sella.

3.4. *Determinare, precisandone il tipo, i punti di stazionarietà delle seguenti funzioni di tre variabili:*

1) $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 + y^2}{y + 1} + z^2$

2) $f(x, y, z) = \dfrac{x^2\, y - \cos y + z^2}{z}$.

1) Si ha:

$$f_x = \frac{2x}{y+1} \quad , \quad f_y = \frac{y^2 - x^2 + 2y}{(y+1)^2} \quad , \quad f_z = 2z \quad ,$$

che, annullate, forniscono i punti di stazionarietà $A\ (0,\ 0,\ 0)$, $B\ (0, -2, 0)$.

Si ha inoltre: $f_{xx} = \dfrac{2}{y+1}$, $f_{xy} = -\dfrac{2x}{(y+1)^2}$, $f_{xz} = 0$, $f_{yy} = \dfrac{2+2x^2}{(y+1)^3}$,

$f_{yz} = 0$, $f_{zz} = 2$.

Risulta

$$H_A f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H_B f = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

che, essendo diagonali, evidenziano i loro autovalori; il punto A è di minimo, mentre B è un punto di sella.

2) Si ha:

$$f_x = \frac{2xy}{z} \quad , \quad f_y = \frac{x^2 + \sin y}{z} \quad , \quad f_z = \frac{z^2 - x^2\, y + \cos y}{z^2}$$

I punti di stazionarietà si ottengono risolvendo il sistema

(*) $$xy = 0 \quad , \quad x^2 + \sin y = 0 \quad , \quad z^2 - x^2 y + \cos y = 0 \quad .$$

Posto per la prima equazione $x = 0$, dalla seconda si ottiene $y = k\pi$ (k intero) e dalla terza $z^2 + (-1)^k = 0$. Ne segue pertanto che k deve essere dispari, cioè $k = 2n + 1$ e si ottengono i punti di stazionarietà $P_n\ (0, (2n+1)\pi\ ,\ 1)$, $P'_n\ (0, (2n+1)\pi, -1)$.
Se si pone $y = 0$ per la prima delle (*), dalla seconda si ottiene $x = 0$ e dalla terza $z^2 + 1 = 0$, che è impossibile.

Si ha $f_{xx} = \dfrac{2y}{z}$, $f_{xy} = \dfrac{2x}{z}$, $f_{xz} = -\dfrac{2xy}{z^2}$, $f_{yy} = \dfrac{\cos y}{z}$,

$$f_{yz} = -\frac{x^2 + \sin y}{z^2} \quad , \quad f_{zz} = \frac{2\,(x^2 y - \cos y)}{z^3} \qquad \text{da cui:}$$

$$H_{P_n} f = \begin{pmatrix} 2\,(2n+1)\,\pi & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} H_{P'_n} f = \begin{pmatrix} -2\,(2n+1)\,\pi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

da cui segue che P_n , P'_n sono tutti punti di sella.

3.5. *Determinare il vettore* $\mathbf{x}$ *complanare con i vettori* $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{k}$ *ed avente minima distanza dal vettore* $\mathbf{w} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.

Il vettore $\mathbf{x}$ è la proiezione ortogonale di $\mathbf{w}$ sul piano individuato dai vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e può essere determinato trovando i valori di λ , μ per cui la funzione

$$f(\lambda , \mu) = \| \mathbf{w} - (\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}) \|^2$$

assume il valore minimo.

Risulta $\mathbf{w} - \lambda\mathbf{u} - \mu\mathbf{v} = (-1 - \lambda - 2\mu,\ 1 + \lambda,\ 5 - 2\lambda - \mu)$ e quindi

$$f(\lambda , \mu) = 6\lambda^2 + 8\lambda\mu + 5\mu^2 - 16\lambda - 6\mu + 27$$

da cui

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 12\lambda + 8\mu - 16 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial \mu} = 8\lambda + 10\mu - 6 \quad .$$

Pertanto il gradiente di f è nullo per $\lambda = 2$, $\mu = -1$.

E' facile vedere che $(2, -1)$ è un punto di minimo relativo di f e quindi si ha $\mathbf{x} = 2\mathbf{u} - \mathbf{v} = -2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

3.6. *Verificare che il punto P dello spazio per cui è minima la somma dei quadrati delle distanze da n punti $P_i\,(x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, \dots, n)$ assegnati è il baricentro degli n punti.*

Posto $P\,(x, y, z)$ e considerata la funzione

$$f\,(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n} \| P - P_i \|^2 = \sum_{i=1}^{n} \{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2\}$$

si ha:

$$f_x = 2 \sum_{i=1}^{n} (x - x_i) \quad , \quad f_y = 2 \sum_{i=1}^{n} (y - y_i) \quad , \quad f_z = 2 \sum_{i=1}^{n} (z - z_i)$$

e quindi, annullando il gradiente di f, risulta:

$$nx - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \quad , \quad \text{cioè} \quad x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \; ;$$

analoghe per le altre coordinate; si ottengono le formule che individuano il baricentro degli n punti P_i.

4. IL METODO DEI MINIMI QUADRATI.

Supponiamo assegnati nel piano $[xy]$ n punti $P_i\,(x_i, y_i)$ $(i = 1, \dots, n)$ e consideriamo una retta r del piano che supponiamo rappresentata dall'equazione:

$$r : y = ax + b \quad .$$

Si chiama *scarto relativo al punto* P_i la differenza

$$d_i = y_i - (ax_i + b)$$

relativa alle ordinate del punto P_i e del punto di r avente la stessa ascissa x_i . La somma dei quadrati degli scarti, fissati i punti P_i , dipende dai parametri a , b che individuano r ; si ha cioè:

$$(4.1) \qquad f(a, b) = \sum_{i=1}^{n} d^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 \; .$$

I valori di $a, b,$ che minimizzano la funzione f, individuano una retta r che si dice la *retta approssimante nel senso dei minimi quadrati* relativa agli n punti P_i .

I valori di a , b si ottengono annullando il gradiente di f , cioè

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)\, x_i = 0 \; ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) = 0$$

e quindi il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} a \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \\ a \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i + n\, b = \sum_{i=1}^{n} y_i \; . \end{cases}$$

Che poi si ottenga effettivamente un minimo segue sia da considerazioni geometriche sia da una verifica di calcolo mediante la matrice hessiana di f nel punto (a , b) determinato.

Il procedimento indicato è un esempio di un metodo più generale spesso applicato in campo sperimentale.

Se si ottengono n valori $y_1, \ldots, y_n$ per una quantità y in corrispondenza ad n valori $x_1, \ldots, x_n$ di un'altra quantità x , collegate fra loro in qualche modo, è naturale chiedersi se esista una dipendenza funzionale: $y = f(x)$ fra le quantità, od anche se esiste una curva abbastanza semplice che sia sufficientemente vicina ai punti $P_i\,(x_i, y_i)$ e che permetta di prevedere, con un certo grado di approssimazione, il valore della y anche per un valore di x distinto dagli x_i .

Naturalmente vi sono più curve che possono servire allo scopo ed è l'informazione sperimentale che suggerisce la curva più adatta, anche se il criterio di semplicità che deve avere l'equazione della curva non va trascurato (si potrebbero ad esempio utilizzare i polinomi interpolatori di Lagrange (cfr. Cap. I. n. 4.2), il cui grafico passa esattamente per gli n punti assegnati, ma ciò potrebbe essere complicato per n grande) .

Oltre alle rette si utilizzano come curve approssimanti le *parabole:*

$$y = ax^2 + bx + c \quad ,$$

le parabole cubiche:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

ove i coefficienti vengono sempre scelti in modo da minimizzare la somma dei quadrati degli scarti.

Se poi si scopre (o si prevede) una relazione tra una quantità z e due altre quantità indipendenti x , y , si possono cercare superfici approssimanti di equazione $z = f(x, y)$ con f semplice; ad esempio una superficie comunemente usata è il piano $z = ax + by + c$, con a, b, c scelti in modo da minimizzare la somma dei quadrati degli scarti relativi ai punti $P_i \, (x_i, y_i, z_i)$ determinati sperimentalmente.

Esercizi.

4.1. *Determinare la retta approssimante nel senso dei minimi quadrati relativa ai seguenti punti:*

$$P_1 \; (0, 0) \; , \; P_2 \; (1, 2) \; , \; P_3 \; (3, 4) \; , \; P_4 \; (4, 6) \; .$$

Applicando le (4.2) ai punti considerati, si ottiene il sistema:

$$26a + 8b = 38 \quad , \quad 8a + 4b = 12$$

da cui si ricava $a = \dfrac{7}{5}$, $b = \dfrac{1}{5}$ e quindi la retta richiesta è:

$$y = \frac{7}{5}\, x + \frac{1}{5} \quad .$$

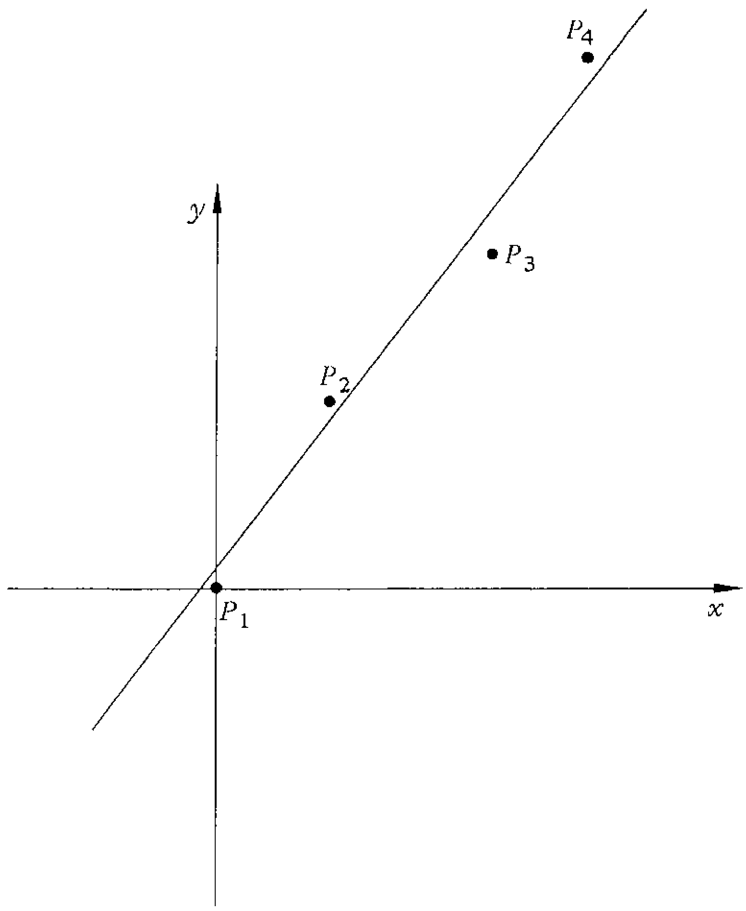

Fig. 8

Nella Fig. 8 si sono indicati i punti (*diagramma di dispersione*) e la retta approssimante.

4.2. *Determinare le formule che individuano la parabola approssimante* $y = ax^2 + bx + c$ *nel senso dei minimi quadrati relativa ad* n *punti* $P_i\ (x_i, y_i)$ *ed applicare tali formule nel caso*

$$P_1\ (1, 4)\ ,\ P_2\ (2, 6)\ ,\ P_3\ (3, 7)\ ,\ P_4\ (5, 7)\ ,\ P_5\ (9, 4)\ .$$

Si devono determinare i numeri a, b, c in modo che la funzione

$$f(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$$

ottenga il valore minimo. Annullando $\frac{\partial f}{\partial a}$, $\frac{\partial f}{\partial b}$, $\frac{\partial f}{\partial c}$ si perviene al sistema:

$$\begin{aligned} a \Sigma x_i^4 + b \Sigma x_i^3 + c \Sigma x_i^2 &= \Sigma y_i x_i^2 \ , \\ a \Sigma x_i^3 + b \Sigma x_i^2 + c \Sigma x_i &= \Sigma y_i x_i \ , \\ a \Sigma x_i^2 + b \Sigma x_i + n c &= \Sigma y_i \ , \end{aligned}$$

che, nel caso in esame, è

$$\begin{aligned} 7284\, a + 890\, b + 120\, c &= 590 \ , \\ 890\, a + 120\, b + 20\, c &= 108 \ , \\ 120\, a + 20\, b + 5\, c &= 28 \ . \end{aligned}$$

Utilizzando in parte il metodo di sostituzione ed in parte un calcolatore tascabile si ha che una soluzione approssimata del sistema è

$$a \sim -0{,}2034\ ,\ b \sim 1{,}9856\ ,\ c \sim 2{,}5409$$

Nella figura è disegnata la parabola, che ha vertice V di coordinate ap-

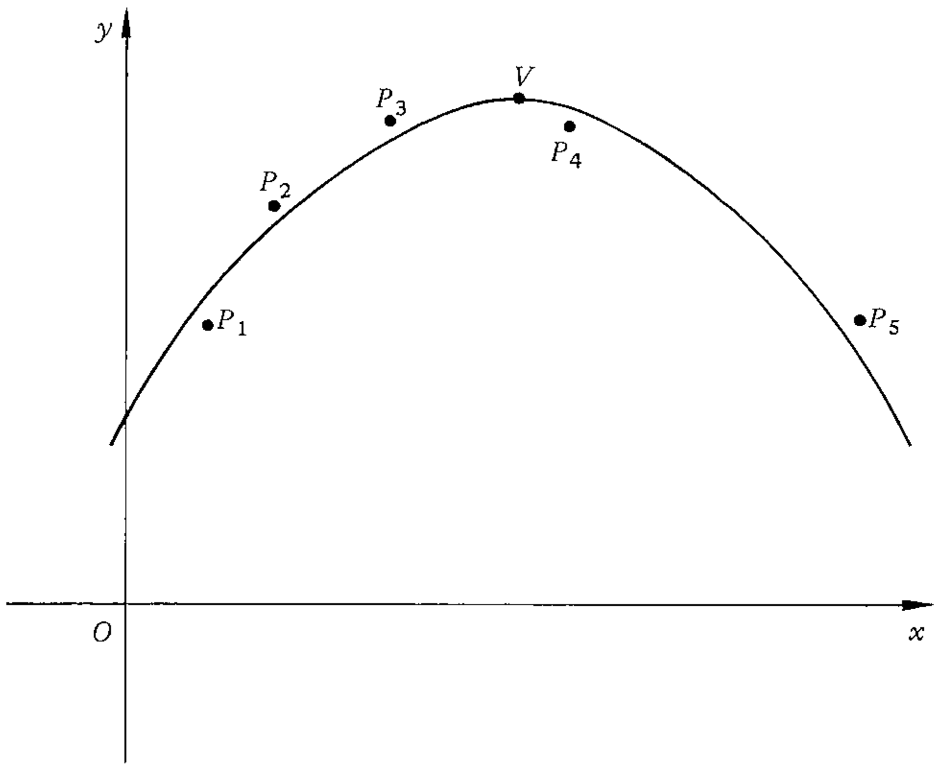

Fig. 9

prossimate (4,881 ; 7,3867) , ed il diagramma di dispersione dei punti assegnati

5. FUNZIONI DI PIU'VARIABILI A VALORI VETTORIALI

Richiami.

Una funzione di più variabili a valori vettoriali è una funzione $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ che associa ad ogni punto $P\ (x_1, \ldots, x_n)$ appartenente ad una regione $U = \operatorname{dom} f$ di $\mathbf{R}^n$

un punto $Q(y_1, ..., y_m)$; la funzione f è rappresentata da

$$(5.1) \qquad \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, ..., x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m = f_m(x_1, ..., x_n) \end{cases}$$

ove le funzioni f_i , dette le *componenti* di f , sono funzioni a valori reali.

Il dominio di f è l'intersezione dei domini delle funzioni $f_i \ (i = 1, ..., m)$.

Se ogni funzione f_i è differenziabile in un punto P_0 interno al dominio di f , la funzione f si dice differenziabile in P_0 . La matrice *jacobiana* di f in P_0 è la matrice di tipo (m, n)

$$(5.2) \qquad J_{P_0} f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(P_0) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(P_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(P_0) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(P_0) \end{pmatrix}$$

ed il differenziale di f in P_0 , $d_{P_0} f$, è l'applicazione lineare di $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^m$ individuata, rispetto alle basi canoniche, da $J_{P_0} f$.

Risulta:

$$(5.3) \qquad f(P) = f(P_0) + d_{P_0} f(P - P_0) + o(\| P - P_0 \|) \ .$$

La funzione $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ definita da

$$(5.4) \qquad g(P) = f(P_0) + d_{P_0} f(P - P_0) \ ,$$

le cui componenti sono polinomi di grado $\leqslant 1$ nelle coordinate di P , approssima f in un intorno di P_0 a meno di infinitesimi di ordine superiore al 1° .

Nel caso particolare in cui $n = 1$, $m = 3$, f rappresenta una curva parametrizzata L di $\mathbf{R}^3$, si ha cioè $f(t) = Q(t)$, e la (5.4) fornisce le equazioni parametriche della retta tangente ad L nel punto $Q_0 = Q(t_0)$.

Nel caso particolare in cui $n = 2$, $m = 3$ la funzione f definisce una superficie S in forma parametrica; posto $P(u, v)$, $Q = (x, y, z) = f(P)$, la f è rappresentata da:

$$x = x(u, v) \ , \ y = y(u, v) \ , \ z = z(u, v)$$

e la (5.4) fornisce le equazioni parametriche del piano tangente ad S nel punto $Q_0 = f(P_0)$.

Esercizi.

5.1. *Si consideri la funzione* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ *definita da*

$$f(t) = \left(t, \log t, \frac{1}{t^2 - 4}\right)$$

1) *determinare il dominio di* f ;
2) *trovare la matrice jacobiana di* f *per un valore di* t *qualsiasi e per* $t = 1$;
3) *determinare il differenziale di* f *per* $t = 1$;
4) *scrivere le equazioni parametriche della retta tangente alla curva* L *individuata da* f *nel punto corrispondente a* $t = 1$.

1) Si vede facilmente che il dominio di f è costituito da $t > 0$, $t \neq 2$.

2) Si ha

$$J_t f = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1}{t} \\ -\dfrac{2t}{(t^2-4)^2} \end{pmatrix} \quad , \quad J_1 f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\dfrac{2}{9} \end{pmatrix}$$

3) Il differenziale di f per $t = 1$ è l'applicazione lineare di $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}^3$ data da

$$d_1 f(t) = \left(t, t, -\frac{2}{9} t\right)$$

4) Applicando la (5.4) e tenendo presente che $f(1) = \left(1, 0, -\frac{1}{3}\right)$ si ha:

$$g(t) = \left(1, 0, -\frac{1}{3}\right) + \left(t-1, t-1, -\frac{2}{9}(t-1)\right)$$

o anche, ponendo $t - 1 = u$, si hanno le equazioni parametriche della retta tangente

$$x = 1 + u \ , \ y = u \ , \ z = -\frac{1}{3} - \frac{2}{9} u$$

che coincidono con le formule analoghe viste al Cap. V (retta per il punto e parallela al vettore derivato primo) .

5.2. *Si consideri la funzione* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *definita da*

$$f(u, v) = \left(u^2 + v \ , \ \frac{u}{v} \ , \ \sqrt{6 - u^2 - v^2}\right)$$

1) *determinarne il dominio;*
2) *scriverne la matrice jacobiana in un punto* $P(u, v)$ *qualsiasi e nel punto* $P_0(-1, 1)$;
3) *determinare il differenziale di* f *nel punto* P_0 ;
4) *determinare le equazioni parametriche e l'equazione cartesiana del piano tangente nel punto* $Q_0 = f(P_0)$ *alla superficie* S *rappresentata dalla funzione* f .

1) Deve essere $v \neq 0$ e $6 - u^2 - v^2 \geqslant 0$; il dominio di f è costituito dai punti del piano (u, v) interni ed appartenenti alla circonferenza $u^2 + v^2 = 6$, con $v \neq 0$.

2) Si ha

$$J_P f = \begin{pmatrix} 2u & 1 \\ \dfrac{1}{v} & -\dfrac{u}{v^2} \\ \dfrac{-u}{\sqrt{6-u^2-v^2}} & \dfrac{-v}{\sqrt{6-u^2-v^2}} \end{pmatrix}, \quad J_{P_0} f = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3) Il differenziale di f in P_0 è l'applicazione lineare $d_{P_0} f$ di $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^3$ individuata da $J_{P_0} f$; risulta

$$d_{P_0} f(x_1, x_2) = \left(-2x_1 + x_2 \ , \ x_1 + x_2 \ , \ \frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_2\right) .$$

4) La funzione g da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^3$ individuata dalla (5.4), posto $P = (u, v)$, $g(P) = (x, y, z)$, si scrive:

$$(x, y, z) = (2, -1, 2) + \Big(-2(u+1) + (v-1) \ , \ (u+1) + (v-1) \ , \ \frac{1}{2}(u+1) - \frac{1}{2}(v-1)\Big)$$

cioè

$$\begin{cases} x = 2 - 2(u+1) + v - 1 \\ y = -1 + u + 1 + v - 1 \\ z = 2 + \dfrac{1}{2}(u+1) - \dfrac{1}{2}(\iota-1) \end{cases} \qquad \text{o anche} \qquad \begin{cases} x = 2 - 2\alpha + \beta \\ y = -1 + \alpha + \beta \\ z = 2 + \dfrac{1}{2}\alpha - \dfrac{1}{2}\beta \end{cases}$$

ove si è posto $\alpha = u + 1$, $\beta = v - 1$. Le formule precedenti rappresentano le equazioni parametriche del piano tangente ad S nel punto $Q_0\ (2, -1, 2) = f(-1, 1)$. Per eliminazione dei parametri α , β , si ottiene l'equazione cartesiana del piano tangente:

$$2x + y + 6z - 15 = 0 .$$

Alla stessa equazione si perviene (cfr. Cap. V, Es. **1.11, 1.12**) mediante il determinante

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-2 \\ -2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0$$

in cui la 2ª e 3ª riga, che coincidono rispettivamente con le colonne di $J_{P_0} f$, sono le componenti dei vettori che si ottengono calcolando le derivate parziali delle componenti di f rispetto ad u, v nel punto $P_0\,(-1,\ 1)$, cioè sono le componenti dei vettori tangenti in Q_0 alle linee coordinate $v=1$, $u=-1$ della superficie S passanti per Q_0.

5.3. *Considerate le funzioni* $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $g: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ *definite rispettivamente da:*

$$f:\ x = 1 - v\ ,\ y = u^2\, v\ ,\ z = \frac{u}{v}\ ,$$

$$g\,(x,\ y,\ z) = x^2 - \log y + \frac{x}{z}$$

1) *calcolare la funzione composta* $g \circ f$;

2) *verificare che, posto* $P(u,v)$, $Q = f\,(P)$, *si ha:*

$$J_P\ (g \circ f) = (J_Q\ g)\ (J_P\ f)\ .$$

1) L'espressione di $g \circ f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ si ottiene sostituendo al posto di x, y, z, che figurano nell'espressione di g, i valori che rappresentano f e si ha

$$(g \circ f)\ (u,\ v) = (1-v)^2 - \log\,(u^2\ v) + \frac{v\,(1-v)}{u}$$

2) Risulta

$$J_P\,(g\circ f)= \left(-\frac{2}{u}-\frac{v\,(1-v)}{u^2}\quad,\quad -2+2v-\frac{1}{v}+\frac{1-2v}{u}\right)\quad;$$

$$J_Q\,g=\left(2x+\frac{1}{z}\;,\;-\frac{1}{y}\;,\;-\frac{x}{z^2}\right)$$

con $x=1-v$, $y=u^2\,v$, $z=\dfrac{u}{v}$ e quindi

$$J_Q\,g=\left(2\,(1-v)+\frac{v}{u}\quad,\quad -\frac{1}{u^2\,v}\quad,\quad \frac{v^2\,(v-1)}{u^2}\right)\quad.$$

Inoltre è

$$J_P f=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2uv & u^2 \\ \dfrac{1}{v} & -\dfrac{u}{v^2}\end{pmatrix}$$

e la verifica è immediata.

5.4. *Considerata la funzione* $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ *che al punto* (ρ,φ,z) *associa il punto* (x,y,z) *secondo le relazioni*

$$x=\rho\cos\varphi\quad,\quad y=\rho\sin\varphi\quad,\quad z=z\quad,$$

determinarne la matrice jacobiana ed i punti in cui tale matrice non è invertibile.

Le formule scritte sono quelle che individuano il passaggio da un sistema di coordinate cilindriche al sistema di coordinate cartesiane ortogonali associato. Si ha

$$Jf=\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I punti in cui la matrice jacobiana non è invertibile sono i punti in cui si annulla il suo determinante; poichè $\det(Jf)=\rho$, si hanno i punti $\rho=0$, che sono i punti dell'asse z delle coordinate cilindriche. Come è noto, tali punti sono eccezionali nella rappresentazione, in quanto per essi φ è indeterminato.

5.5. *Considerata la funzione* $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ *che al punto* (ρ,σ,φ) *associa il punto* (x,y,z) *secondo le relazioni:*

$$x=\rho\sin\sigma\cos\varphi \ , \quad y=\rho\sin\sigma\sin\varphi \ , \quad z=\rho\cos\sigma \ ,$$

determinarne la matrice jacobiana ed i punti in cui tale matrice non è invertibile.

Le formule sono quelle che determinano il passaggio da un sistema di coordinate sferiche (o polari dello spazio) al sistema di coordinate cartesiane ortogonali associato. Si ha

$$Jf=\begin{pmatrix} \sin\sigma\cos\varphi & \rho\cos\sigma\cos\varphi & -\rho\sin\sigma\sin\varphi \\ \sin\sigma\sin\varphi & \rho\cos\sigma\sin\varphi & \rho\sin\sigma\cos\varphi \\ \cos\sigma & -\rho\sin\sigma & 0 \end{pmatrix}$$

Risulta inoltre $\det(Jf)=\rho^2\sin\sigma$ e quindi Jf non è invertibile nei punti per cui $\sin\sigma=0$, che sono i punti dell'asse polare, ovvero se $\rho=0$, che è il polo; tale punto è compreso fra i punti dell'asse polare.

6. ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE .

6.1. *Considerata la funzione*

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 - y}{x + y}}$$

1) *disegnarne il dominio;*
2) *trovare il differenziale di* f *nel punto* $P_0\ (1, 0)$.

6.2. *Considerata la funzione*

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{x - 1}{xy + 5x - 5y - 9}}$$

1) *disegnarne il dominio;*
2) *trovare il versore* $\mathbf{v}$ *tale che* $\left(\frac{df}{d\mathbf{v}}\right)_{P_0}$ *sia massima, con* $P_0\ (2, 0)$.

6.3. *Considerata la funzione*

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{y - tg\, x}}{\log y}$$

1) *dare una rappresentazione qualitativa del dominio di* f ;
2) *trovare il gradiente di* f *nel punto* $P_0\ \left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$.

6.4. *Considerata la funzione*

$$f(x, y) = \log\left(y - \frac{x + 1}{x - 2}\right)$$

1) *disegnarne il dominio;*

2) *trovare i versori* $\mathbf{v}$ *tali che* $\left(\dfrac{df}{d\mathbf{v}}\right)_{P_0} = -1$ *ove* $P_0\ (1, 1)$.

6.5. *Studiare le linee di livello della funzione*

$$f(x, y) = \frac{x^2 + 4y^2}{1 - x}$$

e trovare i punti di stazionarietà di f , *precisandone il tipo.*

6.6. *Considerata la funzione*

$$f(x, y) = \frac{2(x-y)^2 + y(1-x) + 3}{x - y}$$

1) *determinarne la linea di livello* 4 *e disegnarla;*
2) *trovare l'equazione del piano tangente alla superficie grafico di* f *nel punto* $A\ (0, -1, 4)$;
3) *trovare il valore massimo della derivata direzionale nel punto* $P_0\ (0, -1)$.

6.7. *Considerata la funzione*

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 + xy + y^2 - 3}{2y - x}}$$

1) *disegnarne il dominio;*
2) *scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie grafico di* f *nel punto* $A\ (0, -1, 1)$.

6.8. *Considerata la funzione* $f(x, y, z) = \log(x^2 - 4y^2 + z^2 + 3)$

1) *determinare e studiare la superficie di livello* 0 *e scrivere l'equazione del piano tangente ad essa nel punto* $Q_0\ (1, 1, -1)$;

2) *trovare i punti di stazionarietà di* f .

6.9. *Considerata la funzione* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *definita da*

$$x = uv \quad , \quad y = u^2 + v^2 \quad , \quad z = v \log (u^2 + 1) \quad ,$$

determinarne il differenziale nei punti P_0 $(0, 0)$, P_1 $(0, 1)$.

6.10. *Considerata la funzione* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *definita da*

$$x = u \cos v \quad , \quad y = u \sin v \quad , \quad z = 2v$$

1) *determinare i punti in cui il differenziale di* f *non è iniettivo;*
2) *trovare il piano tangente alla superficie che rappresenta* f *nel punto* A $(1, 0, 0)$.