Capitolo IX

FUNZIONI DI PIU'VARIABILI A VALORI REALI.

Premessa.

Nella matematica e nelle sue diverse applicazioni intervengono spesso funzioni di più variabili reali, cioè leggi che associano ai punti di una certa regione di $\mathbf{R}^n$ o numeri reali o vettori e che si dicono rispettivamente *campi scalari (o funzioni a valori reali)* e *campi vettoriali* (o *funzioni a valori vettoriali).*

E' del 1° tipo ad esempio la legge che associa ad ogni punto di coordinate (x, y, z) e ad ogni istante t la temperatura $T(x, y, z, t)$, che è pertanto una funzione a valori reali di quattro variabili reali.

La legge che associa al punto (x,y, z) di un fluido in movimento e all'istante t il vettore velocità $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ è invece una funzione a valori vettoriali.

Questo capitolo è dedicato alle funzioni di più variabili a valori reali, mentre alcuni aspetti delle funzioni a valori vettoriali verranno esaminati nel capitolo successivo.

L'argomento centrale del nostro studio sarà il problema della derivazione per tali funzioni, mentre i problemi connessi con l'integrazione verranno sviluppati nel corso di Analisi Matematica II.

Verranno inoltre messi in evidenza i significati geometrici di alcune delle questioni trattate.

1. DOMINIO ED INSIEMI DI LIVELLO DI UNA FUNZIONE A VALORI REALI.

1.1. Dominio ed immagine.

DEF. 1. *Una funzione* f *di* n *variabili reali* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *a valori reali è* *una legge che associa ad ogni punto* $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ *di un certo sottinsieme* U *di* $\mathbf{R}^n$ *un numero reale, che si indica con* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *o, più semplicemente, con* $f(P)$.

In simboli:

$$f : U \subseteq \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R} \ .$$

Il sottinsieme U si dice il *dominio* di f e si indica con $\operatorname{dom} f$; esso può essere definito esplicitamente, oppure può essere individuato come l'insieme dei punti P per cui ha significato l'espressione con cui viene assegnata f .

Nel caso in cui f dipenda da due o tre variabili, esse si indicheranno di solito con (x, y) ovvero (x, y, z) .

Così, considerata la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - y^2} & \text{per } x \geqslant 0 \ , \\ x - 2y & \text{per } x < 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

il suo dominio è costituito:

a) da tutti i punti del semipiano del piano $[xy]$ con $x < 0$, in quanto l'espressione $x - 2y$ ha sempre significato;

b) dai punti del semipiano $x \geqslant 0$ di $[xy]$ con $x^2 - y^2 \geqslant 0$ e quindi $\operatorname{dom} f$ è la regione tratteggiata in Fig. 1, in cui l'asse y è escluso (ad eccezione del punto O (0, 0)) mentre sono comprese le semirette $x = y$, $x = -y$ $(x \geqslant 0)$.

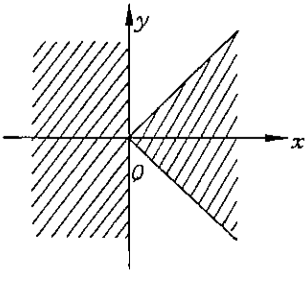

Fig. 1

La funzione

$$f(x, y, z) = \log(x^2 + 4y^2 + z^2 - 1)$$

ha dominio di definizione dato dai punti di $\mathbf{R}^3$ esterni all'ellissoide di equazione: $x^2 + 4y^2 + z^2 - 1 = 0$.

DEF. 2. *L'immagine di* f *,* $\mathrm{im}\, f$ *, è il sottinsieme di* $\mathbf{R}$ *costituito dai numeri reali* $f(P)$ *, al variare di* P *in* $\mathrm{dom}\, f$ *.*

1.2. Insiemi di livello.

DEF. 3. *Il sottinsieme* L *di* $\mathrm{dom}\, f$ *in cui la funzione* $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *prende un valore assegnato* c *si dice insieme di livello* c *di* f *.*

Ovviamente, se $c \notin \mathrm{im}\, f$, l'insieme di livello c è vuoto.

DEF. 4. *Sia* $P_0 \in \mathrm{dom}\, f$ *; il sottinsieme* L *di* $\mathrm{dom}\, f$ *costituito dai punti* P *tali che*

$$f(P) = f(P_0)$$

si dice l'insieme di livello di f *relativo al punto* P_0 *.*

Nel caso in cui f dipenda da due o tre variabili gli insiemi di livello si dicono rispettivamente *linee* e *superfici di livello,* in quanto che, se $c \in \mathrm{im}\, f$, i punti per cui

$$f(x, y) = c$$

ovvero

$$f(x, y, z) = c$$

rappresentano, in generale, linee del piano $[xy]$ ovvero superfici dello spazio ordinario.

Così, con riferimento all'esempio (1.1), la linea di livello -1 è costituita dai punti del semipiano $x < 0$ per cui $x - 2y = -1$ (semiretta); la linea di livello relativa al punto $P_0\ (-1, -1)$ è la linea di livello 1 di f , in quanto $f(-1, -1) = 1$ ed è costituita dai punti per cui:

$$x - 2y = 1 \ , \ x < 0 \ \text{(semiretta)}$$

$$\sqrt{x^2 - y^2} = 1 \ , \ x \geqslant 0 \ \text{(ramo di iperbole)}$$

In fig. 2 si sono indicate le linee di livello -1, 1 di f, segnando a fianco di ognuna di esse il relativo livello.

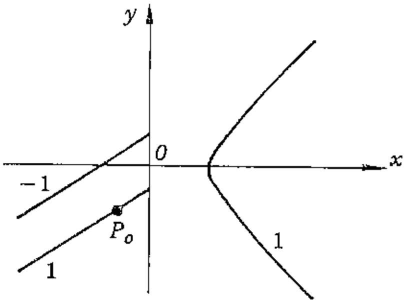

Fig. 2

La superficie di livello 2 della funzione (1.2) è l'ellissoide di equazione: $x^2 + 4y^2 + z^2 = 1 + e^2$.

1.3. Grafico. Una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ si rappresenta sul piano $[xy]$ mediante la curva di equazione $y = f(x)$, cioè associando ad ogni $x \in \operatorname{dom} f$ il punto $(x, f(x))$ del piano.

Sia $f(x, y)$ una funzione da $\mathbf{R}^2$ ad $\mathbf{R}$. Associando ad ogni punto $P(x, y) \in \operatorname{dom} f$ il punto $Q(x, y, f(x, y))$, si ottiene in tal modo una superficie S di equazione

$$z = f(x, y)$$

che si dice *superficie rappresentativa* (o *superficie grafico*) di f (cfr. Fig. 3).

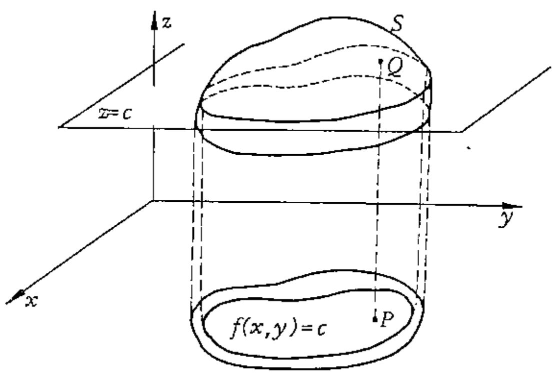

Fig. 3

Tale superficie ha la particolarità che ogni retta parallela all'asse z la interseca al più in un punto e si dice anche *superficie topografica.*

Così ad esempio, la superficie grafico della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

è la semisuperficie sferica, situata nel semispazio $z \geqslant 0$, di centro l'origine O (0, 0, 0) e raggio 1 .

Se S è la superficie rappresentativa di una funzione $f(x, y)$, le linee di livello di f sono le proiezioni ortogonali sul piano $[xy]$ delle linee intersezione di S con i piani paralleli al piano $[xy]$.

Molto spesso, come avviene nelle carte topografiche, invece di rappresentare S , si preferisce rappresentare sul piano $[xy]$ le linee di livello di f , indicando a fianco di ognuna di esse il relativo livello; ciò fornisce, se la distanza fra livelli successivi è sufficientemente piccola, una buona informazione per comprendere l'andamento della funzione.

Così, con linee di livello del tipo indicato in Fig. 4, si rappresenta una funzione che presenta due "colli,, separati da un "avvallamento,, .

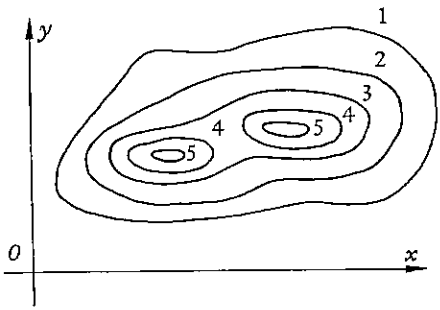

Fig. 4

Se $n > 2$ il *grafico* di una funzione $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ è il sottinsieme di $\mathbf{R}^{n+1}$ costituito dai punti di coordinate $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ con $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \operatorname{dom} f$, $x_{n+1} = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$; naturalmente, per una questione di dimensione, non è possibile rappresentare in tale caso il grafico di f mediante un disegno.

2. LIMITI E CONTINUITA'.

2.1. Insiemi aperti, chiusi, frontiera. Allo scopo di introdurre il concetto di limite per funzioni di più variabili, occorre premettere alcune definizioni che estendono ad $\mathbf{R}^n$ concetti già noti in $\mathbf{R}$.

Considerati due punti $P'(x'_1, \dots, x'_n)$, $P''(x''_1, \dots, x''_n)$ di $\mathbf{R}^n$, la *distanza* $d(P', P'') = \| P'' - P' \|$ tra i due punti è il numero $\geqslant 0$ dato da

$$\|P'' - P'\| = \sqrt{(x_1'' - x_1')^2 + \ldots + (x_n'' - x_n')^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i'' - x_i')^2}$$

come già si è visto nel Cap. VIII, (2.7).

Fissato un punto $P'(x_1', \ldots, x_n')$ ed un vettore $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ di $\mathbf{R}^n$, se $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ l'insieme dei punti P di $\mathbf{R}^n$ dati da

$$P = P' + t\,\mathbf{u} \;,$$

al variare di t in un intervallo $I \subset \mathbf{R}$, si dice *segmento* di $\mathbf{R}^n$.
Così il segmento di estremi P', P'' è l'insieme dei punti P dati da

$$P = P' + t\,\mathbf{u} \;, \text{ con } \mathbf{u} = P'' - P' \;, \; 0 \leqslant t \leqslant 1 \;.$$

DEF. 1. *Intorno sferico di centro* P_0 *e raggio* $r > 0$, che si indica col simbolo $S(P_0, r)$, *è la totalità dei punti* P *di* $\mathbf{R}^n$ *tali che*

$$\|P - P_0\| < r \;.$$

Sia U un sottinsieme di $\mathbf{R}^n$; introduciamo la seguente terminologia.

DEF. 2. *Un punto* P_0 *si dice interno ad* U *se esiste un intorno sferico di centro* P_0 *tutto contenuto in* U; P_0 *si dice esterno ad* U *se è interno al complementare di* U.

DEF. 3. *Il sottinsieme* U *si dice aperto se ogni suo punto è interno, chiuso se il suo complementare è aperto.*

La totalità dei punti di $\mathbf{R}^n$ che non sono né interni né esterni ad U costituiscono la *frontiera* di U.

DEF. 4. *Un punto* P_0 *di dice punto di accumulazione di* U *se in ogni intorno sferico di centro* P_0 *esistono punti di* U *distinti da* P_0.

Si tenga presente che un punto di accumulazione di U può anche non appartenere ad U.

DEF. 5. *Un punto* $P_0 \in U$ *è un suo punto isolato se non è un punto di accumulazione di* U.

Illustriamo alcune delle precedenti definizioni su un esempio.

Sia U il sottinsieme di $\mathbf{R}^2$ costituito dai punti $P(x, y)$ tali che $x^2 + y^2 < 1$; U è aperto. Il punto $P_0 (1, 0)$ non appartiene ad U, ma è un suo punto di accumulazione. Il punto P_0 appartiene alla frontiera di U, che é la circonferenza di equazione: $x^2 + y^2 = 1$.

2.2. Limiti per funzioni a valori reali. Sia U il dominio di una funzione $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ e sia P_0 un punto di accumulazione di U.

DEF. 6. *Si dice che* f *ha limite (finito)* $l \in \mathbf{R}$ *per* P *che tende a* P_0 *e si scrive:*

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = l$$

se, preso ad arbitrio un $\epsilon > 0$, *esiste un* $\delta > 0$ *tale che*

$$|f(P) - l| < \epsilon \ , \quad \forall P \in \operatorname{dom} f \ , \quad 0 < \| P - P_0 \| < \delta \ . \tag{2.1}$$

Sussistono teoremi analoghi a quelli noti per funzioni di una variabile reale.

Così se : $\lim_{P \to P_0} f(P) = l$, $\lim_{P \to P_0} g(P) = m$, si ha:

a) $\lim_{P \to P_0} (f(P) + g(P)) = l + m$

b) $\lim_{P \to P_0} (f(P)\, g(P)) = l\, m$

c) $\lim_{P \to P_0} \dfrac{f(P)}{g(P)} = \dfrac{l}{m}$, purchè $m \neq 0$.

La verifica del fatto che una data funzione f abbia limite l per $P \to P_0$, molte volte può essere difficilie. Aggiungiamo soltanto che, se U_1, U_2 sono sottinsiemi del dominio di f che ammettono P_0 come punto di accumulazione, dette $f_{|U_1}$, $f_{|U_2}$ le restrizioni di f a tali sottinsiemi, se:

$$\lim_{P \to P_0} f_{|U_1}(P) \neq \lim_{P \to P_0} f_{|U_2}(P) ,$$

ovvero se manca uno dei precedenti limiti, non esiste il limite di $f(P)$ per $P \to P_0$.

Ad esempio la funzione:

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

il cui dominio è $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$, non ha limite per $P \to O\,(0, 0)$, poichè, considerata una qualunque retta $r : y = mx$ passante per O, si ha

$$f_{|r}(P) = \frac{m}{1 + m^2} = \lim_{P \to O} f_{|r}(P) ,$$

che dipende quindi dalla restrizione considerata.

Se si considera invece la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

si può verificare facilmente che $\lim_{P \to O} f_{|r}(P) = 0$, qualunque sia la retta r passante per O. Considerata la parabola $\sigma : x = y^2$ si ha

$$\lim_{P \to O} f_{|\sigma}(P) = 1$$

e quindi anche tale funzione non ha limite per $P \to O$. E' un utile esercizio disegnare le linee di livello della (2.2).

2.3. Continuità. Sia P_0 un punto del dominio di f.

DEF. 6. *La funzione* f *si dice continua in* P_0 *se, per ogni* $\epsilon > 0$, *esiste un* $\delta > 0$ *tale che*

(2.3) $$|f(P) - f(P_0)| < \epsilon \ , \ \forall P \in \text{dom} f \ , \ \|P - P_0\| < \delta \ .$$

Ciò significa che:

a) se P_0 è un punto di accumulazione di $\text{dom} f$, si ha:

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0) \ ;$$

b) se P_0 è un punto isolato di $\text{dom} f$, qualunque sia f essa risulta continua in P_0.

DEF. 7. *Una funzione si dice continua in un sottinsieme* U *se è continua in ogni punto di* U.

Anche la verifica della continuità di una funzione è di solito piuttosto complessa, per cui è importante disporre:

1) di un certo numero di funzioni di cui si sappia verificare la continuità;
2) di criteri che permettano di riconoscere la continuità di funzioni "complicate,, utilizzando risultati su funzioni più semplici.

Così è immediato verificare che le n funzioni:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

cioè le funzioni di n variabili che si riducono ad una sola variabile, sono ovunque continue.

Considerata ad esempio la funzione

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \ ,$$

sia $P_0\ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \text{dom} f$; qualunque sia $P\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, si ha

$$f(P) - f(P_0) = x_1 - a_1$$

e risulterà:

$$|f(P)-f(P_0)|<\epsilon$$

per tutti i punti P tali che: $\|P-P_0\|<\epsilon$, in quanto si ha

$$|x_1-a_1|\leqslant\|P-P_0\|\ ;$$

basterà pertanto prendere $\delta=\epsilon$ affinchè sia soddisfatta la (2. 3).

Si dimostra inotre che la somma, ovvero il prodotto di funzioni continue in un punto P_0 è ancora una funzione continua in P_0 ed anche il quoziente di funzioni continue lo è, purchè il denominatore non si annulli in P_0 .

Da ciò segue che i polinomi in n variabili sono ovunque continui e che sono continue le funzioni razionali (cioè i quozienti di polinomi) in n variabili in tutti i punti in cui non si annulla il denominatore.

2.4. Funzioni composte. Un altro criterio importante per riconoscere la continuità di una funzione è basato sul concetto di funzione composta.

Sia $f(y_1, ..., y_m)$ una funzione di m variabili e supponiamo che $y_1, ..., y_m$ siano a loro volta espresse come fuzioni di n variabili $x_1, ..., x_n$, cioè

$$\left\{\begin{array}{l} y_1=y_1\ (x_1, ..., x_n) \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_m=y_m\,(x_1, ..., x_n) \end{array}\right. . \tag{2.4}$$

La funzione:

$$F(x_1, ..., x_n)=f(y_1\ (x_1, ..., x_n), ..., y_m\ (x_1, ..., x_n)) \tag{2.5}$$

che si ottiene sostituendo nell'espressione di f le (2.4) al posto di y_1, ..., ..., y_m , si dice la *funzione composta* delle (2.4) e della f .

Si dimostra il seguente

TEOREMA. *Se le funzioni* (2.4) *sono tutte continue nel punto* $P_0\ (a_1, \ldots, a_n)$ *e se la* f *è continua nel punto* $Q_0\ (y_1\ (P_0), \ldots, y_m\ (P_0))$, *la funzione* F *definita dalla* (2.5) *è continua in* P_0 .

L'utilità di questo Teorema è notevole.

Così, considerata la funzione:

$$\cos \frac{xy}{x^2 + y^2} \qquad , \tag{2.6}$$

essa si può pensare ottenuta dalla funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ data da $f(z) = \cos z$ in cui si ponga

$$z = z\ (x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

La funzione $z\ (x, y) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ è continua in $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$, la funzione $\cos z$ è continua per ogni valore di z e quindi la funzione (2.6) è continua in $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

3. DERIVATA SECONDO UN VETTORE E DERIVATA DIREZIONALE.

Dal corso di Analisi Matematica I è noto che la derivata prima di una funzione $f(x)$ esprime la "velocità di variazione,, della funzione stessa.

Un concetto analogo può essere introdotto anche per una funzione $f\ (P)$ di n variabili reali a valori reali con la differenza che, mentre nel caso di una sola variabile il punto x è "costretto,, a percorrere una retta, nel caso di funzioni in più variabili il punto P può percorrere diverse direzioni in corrispondenza alle quali si otterranno valori, in generale diversi, che esprimono la velocità di variazione della funzione.

Così ad esempio, se $f\ (P)$ è la temperatura nel punto P di un ambiente in presenza di una sorgente di calore, la variazione della temperatura dipenderà dal modo con cui il punto P si sposta e ci saranno percorsi lungo cui $f(P)$ cresce o decresce più o meno rapidamente, ovvero resta costante.

Il concetto di derivata direzionale permetterà di descrivere tali situazioni.

3.1. Definizione. Sia $f(P)$ una funzione di n variabili reali, $\mathbf{u}=(u_1, ..., u_n)$ un vettore di $\mathbf{R}^n$, P_0 un punto appartenente al dominio di f.

DEF. 1. *La funzione* f *si dice derivabile nel punto* P_0 *secondo il vettore* $\mathbf{u}$ *se esiste (ed è finito) :*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + t\,\mathbf{u}) - f(P_0)}{t} \tag{3.1}$$

ove $t \in \mathbf{R}$ *e tale che* $P_0 + t\,\mathbf{u} \in \operatorname{dom} f$.

Tale limite (se esiste) si dice la *derivata di* f *nel punto* P_0 *secondo il vettore* $\mathbf{u}$ e si indica con

$$\left(\frac{df}{d\mathbf{u}}\right)_{P_0} \quad \text{od anche} \quad \frac{df}{d\mathbf{u}}\,(P_0)\ .$$

Un caso particolarmente importante è il caso in cui $\mathbf{u}$ è un *versore:* sotto tali ipotesi $\left(\frac{df}{d\mathbf{u}}\right)_{P_0}$ si dice la *derivata direzionale nel punto* P_0 *di* f *secondo* $\mathbf{u}$.

3.2. Considerata la funzione $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$F(t) = f(P_0 + t\,\mathbf{u})\ , \tag{3.2}$$

risulta $F(0) = f(P_0)$ ed inoltre:

$$\frac{f(P_0 + t\,\mathbf{u}) - f(P_0)}{t} = \frac{F(t) - F(0)}{t}$$

da cui

TEOREMA. *La funzione* f *è derivabile nel punto* P_0 *secondo il vettore* $\mathbf{u}$ *se e solo se la funzione* $F(t)$ *definita dalla* (3.2) *è derivabile per* $t = 0$ *e* *si ha*

$$\left(\frac{df}{d\mathbf{u}}\right)_{P_0} = F'(0) \tag{3.3}$$

La (3.3) riduce pertanto il calcolo della derivata secondo $\mathbf{u}$ al calcolo della derivata di una funzione di una sola variabile reale, ben noto dal corso di Analisi Matematica I ; un altro metodo per il calcolo di $\dfrac{df}{d\mathbf{u}}$ verrà dato al n. 5.3.

Applichiamo la (3.3) per calcolare la derivata della funzione

$$f(x, y, z) = \frac{x \log y}{y - z^2}$$

nel punto $P_0\ (2, 1, -2)$ secondo il vettore $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Il punto $P_0 + t\,\mathbf{u}$ è il punto di coordinate $(2 + t\,,\ 1 + 2t\,,\ -2 - t)$ e quindi

$$F(t) = f(P_0 + t\,\mathbf{u}) = \frac{(2 + t)\log(1 + 2t)}{1 + 2t - (-2 - t)^2}\ .$$

Con un calcolo immediato si ottiene

$$\left(\frac{df}{d\mathbf{u}}\right)_{P_0} = F'(0) = -\frac{4}{3}\ .$$

Si tenga presente che la *derivata di f secondo la direzione individuata da un vettore $\mathbf{u} \neq 0$ è la derivata di f secondo il versore* $\mathbf{v} = \mathbf{u} / \|\mathbf{u}\|$.

Si verifichi che per la funzione in esame risulta

$$\left(\frac{df}{d\mathbf{v}}\right)_{P_0} = -\frac{4}{3\sqrt{6}}$$

e si osservi che

$$\left(\frac{df}{d\mathbf{v}}\right)_{P_0} = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|}\left(\frac{df}{d\mathbf{u}}\right)_{P_0}\ . \tag{3.4}$$

Tale formula verrà giustificata in generale al n. 5.5.

3.3. Mettiamo in evidenza il *significato geometrico della derivata direzionale* (e non della derivata rispetto ad un vettore qualsiasi) *nel caso in cui* $f = f(x, y)$ *è una funzione di due variabili* e quindi rappresentabile con una superficie S.

Con riferimento alla Fig. 5, i punti $P_0 + t\,\mathbf{u}$, al variare di t in un intervallo $I \subset \mathbf{R}$ in modo che $P_0 + t\,\mathbf{u} \in \operatorname{dom} f$, descrivono un segmento l della retta r passante per $P_0\,(x_0, y_0)$ ed individuata da $\mathbf{u}$; il grafico di f ristretta ad l è la curva L intersezione di S col piano per r parallelo all'asse z.

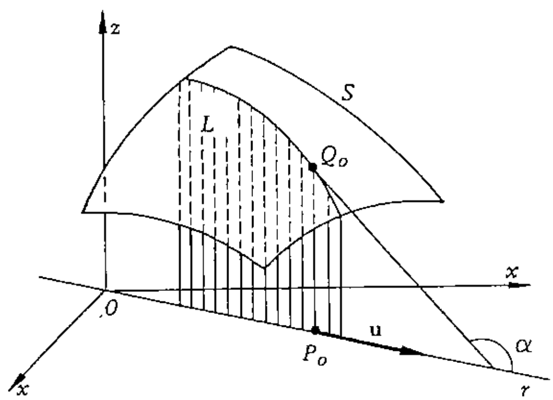

Fig. 5

La linea L è il grafico della funzione : $F(t) = f(P_0 + t\,\mathbf{u})$ e quindi $\left(\dfrac{df}{d\mathbf{u}}\right)_{P_0} = F'(0)$ è il coefficiente angolare della retta tangente ad L nel punto $Q_0\,(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, ossia è la tangente trigonometrica dell'angolo α individuato dalla retta r, orientata come $\mathbf{u}$, con la tangente in Q_0 ad L.

3.4. **Derivate parziali.** Nel caso in cui il vettore $\mathbf{u}$ coincida con uno dei versori $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)$ della base canonica di $\mathbf{R}^n$, si pone, con notazioni equivalenti:

$$\left(\frac{df}{d\mathbf{e}_i}\right)_{P_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{P_0} = f_{x_i}(P_0) \tag{3.5}$$

e tale numero si dice la *derivata parziale (prima) di* f *rispetto alla variabile*

x_i *nel punto* P_0 .

Tenuta presente la (3.1) e posto $P_0\ (a_1, \ldots, a_n)$ si ha ad esempio

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{P_0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1 + t, a_2, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{t}$$

ed analoghe per le altre derivate parziali e quindi:

la derivata parziale rispetto ad una variabile x_i *si ottiene considerando costanti nell'espressione della funzione le altre* $n-1$ *variabili e derivando la funzione rispetto alla sola variabile* x_i *come un'ordinaria funzione di una sola variabile.*

Così, posto

$$f(x, y, z) = \frac{x - z}{y + z^2} \tag{3.6}$$

si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y + z^2} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x - z}{(y + z^2)^2} \ ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-1\,(y + z^2) - 2z\,(x - z)}{(y + z^2)^2} = \frac{-y - 2xz + z^2}{(y + z^2)^2} \quad .$$

DEF. 2. *Una funzione* f *si dice derivabile in un punto* P_0 *se ammette tutte le derivate parziali prime in tale punto.*

A differenza di quanto avviene per le funzioni di una sola variabile, osserviamo che una funzione può essere derivabile in un punto P_0 ma non continua in tale punto (e, come nel caso delle funzioni di una sola variabile, continua in P_0 e non derivabile).

Per questo il concetto di derivabilità non ha molta importanza per le funzioni di più variabili, mentre è la nozione di *differenziabilità*, che verrà introdotta al n. 5, che ha maggiore interesse per tali funzioni.

Considerata ad esempio la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x\,y \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x\,y = 0 \end{cases}$$

essa è derivabile in $O(0, 0)$ con derivate parziali prime entrambe nulle, ma non è continua in O (non esiste il limite di f per $P \to O$) .

La funzione (2.2) cioè

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{x} & \text{per} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{per} \quad x = 0 \end{cases}$$

che non è continua nel punto O , si può derivare nel punto O secondo un qualunque vettore $\mathbf{u}$ e risulta $\left(\dfrac{df}{d\mathbf{u}}\right)_O = 0$. Difatti se $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ con $u_1 \neq 0$ risulta

$$\frac{f(O + t\,\mathbf{u}) - f(O)}{t} = \frac{(u_1^2 + u_2^2)t}{u_1} \to 0 \quad \text{per} \quad t \to 0 \ ;$$

mentre, se $u_1 = 0$, si ha $f(O + t\,\mathbf{u}) = 0$, $\forall\, t$.

Si verifichi che la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

è continua nel punto O , ma non derivabile, mentre la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{xy}$$

è continua in O , derivabile in tale punto e che le uniche direzioni rispetto a cui si può derivare sono quelle dell'asse x e dell'asse y .

3.5. Il gradiente. In molte applicazioni interviene il concetto di gradiente di una funzione, così definito.

DEF. 3. *Se* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *ha derivate parziali prime continue in un punto* P_0 *, il gradiente di* f *in* P_0 *, che si indica con* $\operatorname{grad}_{P_0} f$ *o anche* $\nabla_{P_0} f$ *, è il vettore di* $\mathbf{R}^n$ *di componenti* $(f_{x_1}(P_0), \ldots, f_{x_n}(P_0))$.

Al variare di P_0 , il gradiente di f descrive un *campo vettoriale* che si indica con $\operatorname{grad} f$ o ∇f ; con riferimento alla funzione (3.6) risulta:

$$\operatorname{grad} f = \frac{1}{y + z^2}\, \mathbf{i} - \frac{x - z}{(y + z^2)^2}\, \mathbf{j} + \frac{z^2 - y - 2xz}{(y + z^2)^2}\, \mathbf{k} \ .$$

4. DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE.

4.1. Definizione. La derivata di $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ rispetto ad un vettore $\mathbf{u}$, al variare del punto P_0 in cui viene calcolata, definisce una nuova funzione $\dfrac{df}{d\mathbf{u}} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ e quindi, considerato un altro vettore $\mathbf{v}$ (eventualmente coincidente con $\mathbf{u}$) , sotto opportune ipotesi avrà senso calcolare

$$\frac{d}{d\mathbf{v}}\left(\frac{df}{d\mathbf{u}}\right) = \frac{d^2 f}{d\mathbf{v}\, d\mathbf{u}} \ , \quad \frac{d}{d\mathbf{u}}\left(\frac{df}{d\mathbf{u}}\right) = \frac{d^2 f}{d\mathbf{u}^2} \ , \quad \text{ecc.}$$

Così, con riferimento alle derivate parziali, col simbolo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j} = f_{x_i x_j}$$

si intende:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

ed analogamente si pone

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\, \partial x_j\, \partial x_k} = f_{x_i\, x_j\, x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i} (f_{x_j, x_k})$$

ottenendo in tal modo le derivate parziali del 2°, 3° ordine, ecc. della funzione f .

DEF. *La funzione* f *si dice di classe* C^q *in un punto* P_0 *se tutte le sue derivate parziali fino all'ordine* q *sono continue in* P_0 *;* f *si dice di classe* C^q *in una regione* U *se è di classe* C^q *in ogni punto di* U .

Il caso $q = 0$ corrisponde alla continuità di f .

4.2. Inversione dell'ordine di derivazione. E' facile constatare su vari esempi che si ha di solito

$$f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$$

e più in generale

$$\frac{d^2 f}{du\, dv} = \frac{d^2 f}{dv\, du}\ , \quad \frac{d^3 f}{du\, dv\, dw} = \frac{d^3 f}{dv\, du\, dw} = \ \ldots$$

cioè che è lecito *spesso* cambiare l'ordine di derivazione.

Così per la funzione : $f(x, y, z) = x \sin y + x y z^2$ si ha

$$f_{yz} = \frac{\partial}{\partial y} (f_z) = \frac{\partial}{\partial y} (2xyz) = 2xz \ ,$$

$$f_{zy} = \frac{\partial}{\partial z} (f_y) = \frac{\partial}{\partial z} (x \cos y + xz^2) = 2xz \ .$$

Si dimostra difatti il seguente

TEOREMA. *Se* f *è di classe* C^2 *in una regione* U , *in tale regione si ha*

$$f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i} \quad ; \tag{4.1}$$

ciò si esprime anche dicendo che *le derivate miste sono uguali.*

Il risultato del Teorema continua a sussistere anche sotto ipotesi più deboli che non precisiamo e si estende anche alle derivate di ordine più elevato.

Nel seguito, allorchè si utilizzeranno derivate di ordine superiore al 1°, supporremo sempre che il risultato non dipenda dall'ordine di derivazione. Così ad esempio, con riferimento ad una derivata del 4° ordine di una funzione $f(x, y, z)$, supporremo

$$f_{xxyz} = f_{yxxz} = f_{xzyx} = \dots$$

4.3. Matrice hessiana. Utilizzando le derivate parziali seconde in un punto P_0 di una funzione $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, si introduce la matrice

$$H_{P_0} f = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(P_0) & f_{x_1 x_2}(P_0) & \dots & f_{x_1 x_n}(P_0) \\ f_{x_2 x_1}(P_0) & f_{x_2 x_2}(P_0) & \dots & f_{x_2 x_n}(P_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{x_n x_1}(P_0) & f_{x_n x_2}(P_0) & \dots & f_{x_n x_n}(P_0) \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

detta *matrice hessiana di* f *in* P_0 ed il cui determinante si dice *hessiano di* f *in* P_0 ; secondo la (4.1) , $H_{P_0} f$ è una matrice *simmetrica.*

5. IL DIFFERENZIALE.

5.1. Richiami. Dal corso di Analisi Matematica I è noto che la derivata $f'(x_0)$

della funzione $f(x)$ nel punto x_0 soddisfa alla condizione

$$(5.1)\qquad \lim_{b \to 0} \frac{f(x_0+b)-f(x_0)}{b} - f'(x_0) = $$

$$= \lim_{b \to 0} \frac{f(x_0+b)-f(x_0)-bf'(x_0)}{b} = 0,$$

relazione che è equivalente alla:

$$(5.2)\qquad f(x_0+b) = f(x_0) + b\, f'(x_0) + b\,\epsilon$$

ove ϵ, che dipende in generale da x_0 ed b, tende a zero per $b \to 0$, od anche

$$(5.3)\qquad f(x_0+b) = f(x_0) + b\, f'(x_0) + o(|b|)$$

ove $o(|b|)$ indica un infinitesimo (per $b \to 0$) di ordine superiore a $|b|$.

Dalla (5.3) seguono immediatamente queste considerazioni :

1) la legge che ad $b \in \mathbf{R}$ associa il numero $f'(x_0)\, b$ è un'applicazione lineare di $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$;
2) ponendo nella (5.3) $x_0 + b = x$ (e quindi $b = x - x_0$) ed introdotta la funzione (individuata da f)

$$g(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f'(x_0)$$

si ha:

$$f(x) = g(x) + o(|x - x_0|) .$$

La funzione $g(x)$ è un polinomio di grado $\leqslant 1$, il cui grafico è la retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$; tale funzione approssima f a meno di un infinitesimo (per $x \to x_0$) di ordine superiore al 1° (rispetto all'infinitesimo campione $|x - x_0|$) .

L'estensione delle precedenti considerazioni a funzioni di n variabili porta al concetto di differenziale per tali funzioni, che verrà illustrato nei n. seguenti.

5.2. Differenziabilità di una funzione. Sia f una funzione di n variabili reali a valori reali e sia P_0 un punto interno a $\operatorname{dom} f$.

Pertanto esiste un numero opportuno r tale che f sia definita in tutti i punti P per cui $\| P - P_0 \| < r$, od anche, se $\mathbf{h}$ è un vettore arbitrario con $\| \mathbf{h} \| < r$, in tutti i punti $P = P_0 + \mathbf{h}$.

DEF. *La funzione f si dice differenziabile in P_0 se esiste un'applicazione lineare di $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}$, che si indica con $d_{P_0} f$ e si dice il differenziale di f in P_0, tale che, qualunque sia il vettore $\mathbf{h}$ con $\| \mathbf{h} \| < r$, si abbia*

$$f(P_0 + \mathbf{h}) = f(P_0) + d_{P_0} f(\mathbf{h}) + o(\| \mathbf{h} \|) . \tag{5.4}$$

La (5.4) è equivalente alla:

$$f(P_0 + \mathbf{h}) = f(P_0) + d_{P_0} f(\mathbf{h}) + \| \mathbf{h} \| \epsilon \tag{5.5}$$

con $\epsilon = \epsilon(P_0, \mathbf{h}) \to 0$ per $\| \mathbf{h} \| \to 0$.

Se si pone: $P = P_0 + \mathbf{h}$, la (5.4) si può scrivere nella forma

$$f(P) = f(P_0) + d_{P_0} f(P - P_0) + o(\| P - P_0 \|) \tag{5.6}$$

da cui si deduce immediatamente che

TEOREMA 1. *Se f è differenziabile in P_0, è anche continua in tale punto.*

5.3. Espressione del differenziale. Per il calcolo del differenziale e per le notevoli conseguenze geometriche che verranno esaminate al n. 7 è fondamentale il seguente

TEOREMA 2. *Se f è differenziabile nel punto P_0, f è derivabile in P_0 secondo un qualsiasi vettore $\mathbf{u}$ e risulta* (*) :

$$d_{P_0} f(\mathbf{u}) = \left(\frac{df}{d\mathbf{u}} \right)_{P_0} = \operatorname{grad}_{P_0} f \cdot \mathbf{u} . \tag{5.7}$$

(*) Si tenga presente che il prodotto scalare in $\mathbf{R}^n$ di due vettori $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ è dato da (cfr. Cap. VIII, (2.5)) : $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n$.

Dimostrazione. Sia $\mathbf{u}$ un vettore qualsiasi e sia t un numero reale tale che $\| t\,\mathbf{u} \| < r$. Riscrivendo la (5.5) con $t\mathbf{u}$ al posto di $\mathbf{h}$ e tenendo presente la linearità dell'operatore $d_{P_0} f$, si ha:

$$f(P_0 + t\,\mathbf{u}) = f(P_0) + t\, d_{P_0} f(\mathbf{u}) + |t|\, \|\mathbf{u}\|\, \epsilon$$

e quindi:

$$\frac{f(P_0 + t\,\mathbf{u}) - f(P_0)}{t} = d_{P_0} f(\mathbf{u}) + \frac{|t|}{t} \|\mathbf{u}\|\, \epsilon \;;$$

facendo il limite di tale relazione per $t \to 0$, poichè per $t \to 0$ si ha $\| t\,\mathbf{u} \| \to 0$ e quindi $\epsilon \to 0$, segue dalla (3.3) che:

$$\left(\frac{df}{d\mathbf{u}}\right)_{P_0} = d_{P_0} f(\mathbf{u}) \;; \tag{5.8}$$

resta così dimostrata la prima parte della (5.7).

Supposto $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, ossia $\mathbf{u} = u_1\, \mathbf{e}_1 + \ldots + u_n\, \mathbf{e}_n$, ove $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)$ è la base canonica di $\mathbf{R}^n$, per la linearità di $d_{P_0} f$ si ha

$$d_{P_0} f(\mathbf{u}) = u_1\, d_{P_0} f(\mathbf{e}_1) + \ldots + u_n\, d_{P_0} f(\mathbf{e}_n)$$

e quindi, poichè per la (5.8) e la (3.5) risulta:

$$d_{P_0} f(\mathbf{e}_i) = \left(\frac{df}{d\mathbf{e}_i}\right)_{P_0} = f_{x_i}(P_0)$$

ne segue

$$d_{P_0} f(\mathbf{u}) = u_1 f_{x_1}(P_0) + \ldots + u_n f_{x_n}(P_0) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(P_0)\, u_i \tag{5.9}$$

ossia:

$$d_{P_0} f(\mathbf{u}) = \left(\frac{df}{d\mathbf{u}}\right)_{P_0} = \operatorname{grad}_{P_0} f \cdot \mathbf{u}$$

che dimostra completamente la (5.7) e *fornisce un'espressione esplicita del* *differenziale, oltre che un nuovo metodo per il calcolo della derivata di una funzione secondo un qualsiasi vettore* $\mathbf{u}$.

Supposto f di classe opportuna, poichè

$$\left(\frac{df}{d\mathbf{u}}\right)_{P_0} = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(P_0)\, u_i$$

si ha anche:

$$\left(\frac{d^2 f}{d\mathbf{u}^2}\right)_{P_0} = \sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}\, u_i\right]\right\}_{P_0} u_j = \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(P_0)\, u_i\, u_j \tag{5.10}$$

ed in generale

$$\left(\frac{d^r f}{d\mathbf{u}^r}\right)_{P_0} = \sum_{i_1,\dots,i_r=1}^{n} f_{x_{i_1}\dots x_{i_r}}(P_0)\, u_{i_1}\dots u_{i_r} \; . \tag{5.11}$$

5.4. Incremento di una funzione. Come risulta dalla (5.6) si ha che

$$f(P) - f(P_0) = d_{P_0} f(P-P_0) + o(\| P - P_0 \|)$$

e quindi $d_{P_0} f(P-P_0)$, a meno di un infinitesimo (per $P \to P_0$) di ordine superiore al 1° rispetto all'infinitesimo campione $\| P - P_0 \|$, è l'*incremento* che f subisce nel passaggio da P_0 a P .

Inoltre, la funzione

$$g(P) = f(P_0) + d_{P_0} f(P - P_0) \tag{5.12}$$

che, per la (5.6), approssima f a meno dell'infinitesimo sopra indicato, è un polinomio di grado $\leqslant 1$.

Difatti, posto $P(x_1, \dots, x_n)$, $P_0(a_1, \dots, a_n)$ e quindi: $P - P_0 = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$, dalla (5.9) si ha

$$g(P) = f(P_0) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(P_0)(x_i - a_i) \; .$$

Nel caso particolare in cui $n = 2$, considerato il punto $P_0\,(x_0, y_0)$, il grafico della funzione g è il piano di equazione

$$(5.13) \qquad z = f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} (y - y_0)$$

e, come si giustificherà al n. 7.2, esso è il piano α tangente alla superficie S grafico di $f(x, y)$ nel punto $Q_0\,(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

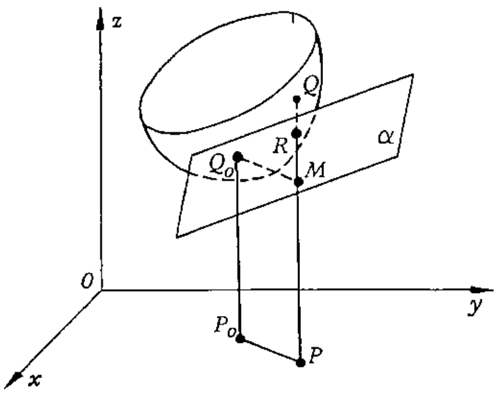

Fig. 6

Si osservi che, detti Q, R i punti di intersezione della retta parallela all'asse z passante per $P \in \operatorname{dom} f$ rispettivamente con S e con α, l'incremento di f nel passaggio da P_0 a P è la differenza tra la quota di Q e la quota di Q_o, mentre $d_{P_0} f(P - P_0)$ è la differenza tra la quota di R e quella di Q_0.

Con riferimento alla Fig. 6, l'incremento di f è la lunghezza di MQ, mentre MR rappresenta $d_{P_0} f(P - P_0)$.

5.5. Osservazioni.

a) Il *Teorema* 2 mette in evidenza che, se una funzione è differenziabile in P_0, essa è ivi derivabile secondo un qualsiasi vettore $\mathbf{u}$; si tenga tuttavia presente che vi sono funzioni (di più variabili) che ammettono derivate secondo un vettore arbitrario, ma che non sono differenziabili; è tale la funzione (2.2), come si è visto al n. 3.4.

Si dimostra il seguente Teorema, che fornisce un criterio per riconoscere la differenziabilità di una funzione

TEOREMA 3. *Se* f *è di classe* C^1 *in* P_0, f *è differenziabile in* P_0.

b) Sia $\mathbf{u} \neq 0$ e $\mathbf{v} = \mathbf{u} / \| \mathbf{u} \|$ il versore di $\mathbf{u}$. La derivata di f secondo la direzione individuatá da $\mathbf{u}$, cioè la derivata direzionale di f secondo $\mathbf{v}$, soddisfa, per la (5.7), alla seguente relazione:

$$\left(\frac{df}{d\mathbf{v}}\right)_{P_0} = \text{grad}_{P_0} f \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\| \mathbf{u} \|} \text{grad}_{P_0} f \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\| \mathbf{u} \|} \left(\frac{df}{d\mathbf{u}}\right)_{P_0}$$

che giustifica la (3.4), qualunque sia la funzione differenziabile f.

c) Molte volte il differenziale di una funzione f in n variabili viene indicato con la scrittura

$$d f = f_{x_1} dx_1 + \ldots + f_{x_n} dx_n \tag{5.14}$$

ove, se il differenziale è relativo ad un punto P, si intendono calcolate in tale punto le derivate che figurano nella (5.14); considerato il vettore "infinitesimo,, $dP = (dx_1, \ldots, dx_n)$, la (5.14) si indica anche con

$$df = \text{grad}\, f \cdot dP$$

e si dice che "il simbolo df esprime, a meno di infinitesimi di ordine superiore, l'incremento subito da f nel passaggio dal punto P al punto $P + dP$.

5.6. Teorema del valor medio. Supponiamo che la funzione f sia differenziabile in tutti i punti P del segmento $P_0 + t\,\mathbf{u}$, ove t descrive un intervallo reale I. Considerata la funzione $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$F(t) = f(P_0 + t\,\mathbf{u})$$

si verifica facilmente che, nel punto $P = P_0 + t\,\mathbf{u}$, si ha

$$F'(t) = d_P f(\mathbf{u}) = \left(\frac{df}{d\mathbf{u}}\right)_P \tag{5.15}$$

e quindi

$$F'(t) = \text{grad}_P f \cdot \mathbf{u} . \tag{5.16}$$

In generale, supposta f di classe opportuna, dalla (5.15) segue

$$F^{(r)}(t) = \left(\frac{d^r f}{d\mathbf{u}^r}\right)_P \quad . \tag{5.17}$$

TEOREMA 4 *(del valor medio). Se* f *è differenziabile in ogni punto del segmento di estremi* P_0 *e* $P_0 + \mathbf{u}$ *, esiste almeno un punto* P_1 *interno a tale segmento per cui si ha*

$$f(P_0 + \mathbf{u}) - f(P_0) = \left(\frac{df}{d\mathbf{u}}\right)_{P_1} \quad . \tag{5.18}$$

Difatti la funzione $F(t) = f(P_0 + t\,\mathbf{u})$ è derivabile nell'intervallo $I = [0, 1]$ e, per il Teorema del valor medio per funzioni di una variabile reale (cfr. Analisi Matematica I) risulta:

$$F(1) - F(0) = F'(\theta) \qquad 0 < \theta < 1 \ ,$$

da cui si ottiene direttamente la (5.18), tenendo presente la (5.15) e che il punto $P_1 = P_0 + \theta\,\mathbf{u}$ è interno al segmento considerato.

Se $P = P_0 + \mathbf{u} = (x_1, ..., x_n)$, $P_0 = (a_1, ..., a_n)$, la (5.18) si può scrivere esplicitamente, per la (5.16), nella forma

$$f(x_1, ..., x_n) - f(a_1, ..., a_n) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(P_1)(x_i - a_i) \ . \tag{5.19}$$

6. DERIVAZIONE DI FUNZIONI COMPOSTE.

6.1. Esempi di funzioni composte. Sia $f(y_1, ..., y_m)$ una funzione di m variabili a valori reali e supponiamo che $y_1, ..., y_m$ siano a loro volta espresse come funzioni di n variabili $x_1, .., x_n$:

$$\begin{cases} y_1 = y_1\,(x_1, ..., x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m = y_m\,(x_1, ..., x_n) \end{cases} \tag{6.1}$$

La funzione

$$(6.2) \qquad F(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m(x_1, \ldots, x_n))$$

che si ottiene sostituendo le (6.1) nell'espressione di f, è la *funzione composta di* f *e delle* (6.1), come già si è detto al n. **2.3**.

L'operazione precedentemente indicata si presenta in modo naturale in diverse circostanze.

Così, se è data una funzione $f(x, y, z)$ e si considera la restrizione di f ad una curva di equazioni parametriche: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, si ottiene la funzione $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$F(t) = f(x(t), y(t), z(t)) .$$

Analogamente le restrizioni di $f(x, y, z)$ alla superficie di equazioni parametriche: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ ovvero alla superficie topografica $S : z = \varphi(x, y)$ (grafico della funzione $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$) danno origine rispettivamente alle funzioni composte (da $\mathbf{R}^2$ ad $\mathbf{R}$):

$$F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$F(x, y) = f(x, y, \varphi(x, y))$$

6.2. Derivate parziali prime di funzioni composte. In molti problemi è importante esprimere le derivate parziali della funzione composta F (6.2) mediante le derivate parziali di f e delle funzioni (6.1). A tale scopo è di fondamentale importanza il seguente

TEOREMA. *Se le funzioni* (6.1) $y_1, \ldots, y_m : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *sono differenziabili nel punto* $P_0 = (a_1, \ldots, a_n)$ *ed* f *è differenziabile nel punto* $Q_0 = (y_1(P_0), \ldots, y_m(P_0))$, *la funzione composta* F (6.2) *è differenziabile in* P_0 *e si ha*

$$(6.3) \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_{P_0} = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)_{Q_0} \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)_{P_0} .$$

Limitiamoci a dimostrare la (6.3) per $x_i = x_1$.

Sia P_1 il punto di coordinate $(a_1 + h\,, a_2\,, \ldots, a_n)$. Per la differenziabilità delle funzioni $y_j\,(x_1\,, \ldots, x_n)$ in P_0 risulta

$$y_j\,(P_1) = y_j\,(P_0) + \Delta\, y_j$$

ove, per la (5.5) e la (5.9):

$$\Delta\, y_j = \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_1}\right)_{P_0} h + |\, h \,|\, \epsilon_j$$

e quindi

(6.4) $$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta\, y_j}{h} = \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_1}\right)_{P_0} .$$

D'altra parte risulta

$$F\,(P_1) = f\,(y_1\,(P_0) + \Delta\, y_1\,, \ldots, y_m\,(P_0) + \Delta\, y_m)$$

e, per la differenziabilità di f in $Q_0 = (y_1\,(P_0)\,, \ldots, y_m\,(P_0))$, si ha

(6.5) $$F\,(P_1) - F\,(P_0) = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)_{Q_0} \Delta y_j + \left\{\sum_{j=1}^{m} (\Delta\, y_j)^2\right\}^{1/2} \epsilon \quad ,$$

ove, poichè $\Delta\, y_j \to 0$ per $h \to 0$ ed $\epsilon \to 0$ per $\Delta\, y_j \to 0$, ne segue che $\epsilon \to 0$ per $h \to 0$.

Dalla (6.5), dividendo per h e facendo il limite per $h \to 0$, tenuta presente la (6.4) si ha che

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_{P_0} = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)_{Q_0} \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_1}\right)_{P_0} .$$

6.3. Applicazioni. Esaminiamo alcuni casi notevoli di derivazione di funzioni composte.

a) Siano $x_1 = x_1\,(t), \ldots, x_n = x_n\,(t)$ le equazioni parametriche di un arco

di curva L di $\mathbf{R}^n$ con vettore tangente nel punto $P(t)$ il vettore $P'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t))$ (*).
Sia $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ una funzione da $\mathbf{R}^n$ ad $\mathbf{R}$ differenziabile nel punto $P_0 = P(t_0)$. Applicando il *Teorema* del n. **6.2**, si ha che la funzione

$$F(t) = f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

è derivabile per $t = t_0$ e risulta, per la (6.3):

$$F'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(P_0)\, x_i'(t_0)$$

ossia

(6.6) $$F'(t_0) = \operatorname{grad}_{P_0} f \cdot P'(t_0)$$

che estende la (5.16) ad una curva qualsiasi di $\mathbf{R}^n$.

b) Consideriamo il caso particolare in cui $f = f(x, y) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ e L è il grafico di una funzione $y = \varphi(x)$, cioè il caso in cui L è la curva di equazioni parametriche: $x = x$, $y = \varphi(x)$ (x parametro).
La restrizione di f ad L è la funzione

$$F(x) = f(x, \varphi(x))$$

e la (6.3) è espressa da

(6.7) $$F'(x) = f_x(Q) + f_y(Q)\, \varphi'(x)$$

essendo Q il punto di coordinate $(x, \varphi(x))$.

c) Se $f = f(x, y, z)$ è una funzione a valori reali, la sua restrizione alla superficie topografica S di equazione $z = \varphi(x, y)$ è la funzione di due variabili: $F(x, y) = f(x, y, \varphi(x, y))$.
Posto $P = (x, y)$, $Q(x, y, \varphi(x, y))$, le (6.3) in questo caso si scri-

(*) Il concetto di arco di curva in $\mathbf{R}^n$ e di vettore tangente ad esso sono quindi le estensioni degli analoghi concetti già esaminati nel Cap. V per curve dello spazio ordinario.

vono:

(6.8) $F_x(P)=f_x(Q)+f_z(Q)\varphi_x(P)$, $F_y(P)=f_y(Q)+f_z(Q)\varphi_y(P)$.

7. APPLICAZIONI GEOMETRICHE DEL DIFFERENZIALE.

7.1. Gradiente ed insiemi di livello. Si è visto al n. 5.3 che se $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ è differenziabile nel punto P_0 , qualunque sia il vettore $\mathbf{u}$ risulta:

$$\left(\frac{df}{d\mathbf{u}}\right)_{P_0} = \operatorname{grad}_{P_0} f\cdot\mathbf{u}\ . \tag{7.1}$$

Ne segue che (cfr. anche *disuguaglianza di Schwartz*, n. 1 Cap. VIII), se $\operatorname{grad}_{P_0} f \neq \mathbf{0}$, la direzione rispetto a cui è massima la derivata direzionale di f in P_0 è quella del versore

$$\mathbf{v}=\frac{\operatorname{grad}_{P_0} f}{\|\operatorname{grad}_{P_0} f\|}\ , \tag{7.2}$$

in corrispondenza alla quale risulta:

$$\left(\frac{df}{d\mathbf{v}}\right)_{P_0} = \|\operatorname{grad}_{P_0} f\|\ . \tag{7.3}$$

Il versore $-\mathbf{v}$ individua la direzione a derivata direzionale minima nel punto P_0.

I vettori ortogonali al gradiente di f in P_0 individuano le direzioni rispetto a cui si annulla la derivata direzionale; il significato geometrico della totalità di tali vettori è messo in evidenza dall'importante teorema che segue.

Un vettore di $\mathbf{R}^n$ applicato in un punto P_0 si dice *ortogonale ad un sottinsieme* S di $\mathbf{R}^n$ passante per P_0 se è ortogonale in P_0 a tutte le curve di S passanti per tale punto, cioè ai loro vettori tangenti in P_0 .

Ciò premesso si ha

TEOREMA. *Il vettore* $\operatorname{grad}_{P_0} f$ *è ortogonale all'insieme di livello relativo al* *punto* P_0 *e diretto verso i livelli crescenti (se non è nullo).*

Difatti sia $P(t)$ una curva qualsiasi contenuta nell'insieme S di livello di f relativo al punto $P_0 = P(t_0)$. La funzione $F(t) = f(P(t))$ assume il valore costante $f(P_0)$, che è il valore preso da f in ogni punto di S , e quindi in particolare per la (6.6):

$$0 = F'(t_0) = \operatorname{grad}_{P_0} f \cdot P'(t_0) \ .$$

Pertanto il vettore $\operatorname{grad}_{P_0} f$ è ortogonale al vettore tangente in P_0 ad una curva qualsiasi appartenente all'insieme di livello relativo a P_0 .

Inoltre, con riferimento al versore $\mathbf{v}$ (7.2), si ha

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + t\,\mathbf{v}) - f(P_0)}{t} = \|\operatorname{grad}_{P_0} f\| > 0$$

e quindi in un intorno di 0 (per la permanenza del segno) se $t > 0$ risulterà $f(P_0 + t\,\mathbf{v}) > f(P_0)$, mentre, se $t < 0$, $f(P_0 + t\,\mathbf{v}) < f(P_0)$.

7.2. Rette e piani tangenti. Utilizziamo il *Teorema* del n. **7.1** per ottenere alcune formule di uso frequente.

Consideriamo la linea L del piano $[x\,y]$ di equazione cartesiana:

$$f(x, y) = 0 \tag{7.4}$$

e sia $P_0(x_0, y_0)$ un suo punto .

Poichè L si può considerare come la linea di livello relativa al punto P_0 della funzione $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ che figura nel 1° membro della (7.4) (L è esattamente la linea di livello 0 di f) , se $\operatorname{grad}_{P_0} f \neq 0$, tale vettore è ortogonale alla retta tangente ad L in P_0 e quindi la retta tangente si rappresenta con l'equazione

$$f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) = 0 \ . \tag{7.5}$$

In particolare si osservi che, se f è un polinomio di 2° grado, si ottiene l'equazione della tangente ad una conica in un suo punto, già ricavata per altra via al Cap. III ((9.10) del n. 9.2) .

Analogamente, considerata una superficie S di equazione

$$f(x, y, z) = 0 \quad ,$$

il piano tangente ad S in un suo punto $Q_0\ (x_0, y_0, z_0)$ in cui $\operatorname{grad}_{Q_0} f \neq 0$ è dato da

$$f_x(Q_0)(x - x_0) + f_y(Q_0)(y - y_0) + f_z(Q_0)(z - z_0) = 0 \quad . \tag{7.6}$$

Si osservi che, se S è il grafico di una funzione di due variabili $\varphi(x, y)$, cioè se S ha equazione :

$$z = \varphi(x, y) \quad ,$$

il piano tangente ad S nel punto $Q_0\ (x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0))$ si può ottenere mediante la (7.6) con

$$f(x, y, z) = \varphi(x, y) - z \quad . \tag{7.7}$$

Si riottiene in tal modo la formula (5.13) (in cui si scriva φ al posto di f). Difatti posto $P_0\ (x_0, y_0)$, con riferimento alla funzione f definita dalla (7.7), risulta

$$f_x(Q_0) = \varphi_x(P_0) \quad , \quad f_y(Q_0) = \varphi_y(P_0) \quad , \quad f_z(Q_0) = -1 \quad .$$

Si ricordi inoltre che se la superficie S è rappresentata mediante equazioni parametriche, il piano tangente in un suo punto è dato dall'equazione (6.9) del Cap. V.

Se si considera una linea L dello spazio intersezione delle due superfici (cfr. n. **10.3** del Cap. IV) S, S' di equazioni

$$f(x, y, z) = 0 \quad , \quad g(x, y, z) = 0$$

la retta tangente ad L in un suo punto Q_0 si può rappresentare come intersezione dei piani tangenti ad S, S' in Q_0, che si scrivono mediante la (7.6).

7.3. Curve e superfici inviluppo. Consideriamo una famiglia ad un parametro di curve piane rappresentata, al variare del parametro t in un certo intervallo reale I, da un'equazione del tipo

$$f(x, y, t) = 0 \quad , \tag{7.8}$$

ove (x, y) sono le coordinate cartesiane del piano; la (7.8) rappresenta, $\forall\, t \in I$, una curva L_t della famiglia.

DEF. *Una curva $\mathscr{I}$ del piano si dice inviluppo della famiglia se per ogni punto P di $\mathscr{I}$ passa una curva L_t tangente in P ad $\mathscr{I}$.*

Ad esempio ogni curva piana è la curva inviluppo della famiglia delle sue rette tangenti.

Dimostriamo che ogni punto $P(x, y)$ dellla curva inviluppo $\mathscr{I}$, ammesso che esista, della famiglia(7.8) soddisfa al sistema:

$$f(x, y, t) = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial t}\,(x, y, t) = 0 \quad . \tag{7.9}$$

Da ciò segue che, se si elimina il parametro t fra le (7.9), si ottiene l'equazione cartesiana dell'inviluppo $\mathscr{I}$, mentre se si ricavano dalle (7.9) le incognite x, y come funzioni di t, si ottengono le equazioni parametriche di $\mathscr{I}$.

Sia difatti $P(t) = (x(t), y(t))$ il punto in cui la curva L_t di equazione (7.8) tocca la curva $\mathscr{I}$; deve pertanto essere, $\forall\, t \in I$:

$$f(x(t), y(t), t) = 0 \quad ,$$

da cui, derivando rispetto a t, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,(P(t), t)\, x' + \frac{\partial f}{\partial y}\,(P(t), t)\, y' + \frac{\partial f}{\partial t}\,(P(t), t) = 0 \quad . \tag{7.10}$$

D'altra parte, essendo $\mathscr{I}$ tangente ad L_t in $P(t)$, il vettore $\dfrac{dP}{dt} = (x', y')$ risulta ortogonale al vettore $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ in tale punto e quindi la (7.10) si riduce alla 2^a delle (7.9).

Esempi.

1) Considerata la famiglia di circonferenze aventi centro variabile sull'asse x e raggio r costante:

$$(x - t)^2 + y^2 = r^2 \quad ,$$

il relativo inviluppo si ottiene risolvendo il sistema (7.9)

$$(x-t)^2 + y^2 = r^2 \quad , \quad -2\,(x-t) = 0$$

ed ha pertanto equazione cartesiana: $y^2 = r^2$, cioè è una coppia di rette parallele all'asse x.

2) La famiglia di ∞^1 circonferenze di centro l'origine

$$x^2 + y^2 = t^2$$

non ammette curva inviluppo.

Consideriamo una famiglia ad un parametro di superfici S_t di equazione

$$f\,(x, y, z, t) = 0 \tag{7.11}$$

ed il sistema, analogo al sistema (7.9):

$$f\,(x, y, z, t) = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial t}\,(x, y, z, t) = 0 \quad . \tag{7.12}$$

Se tale sistema individua, per ogni t di un certo intervallo I, una curva $\mathscr{I}_t$, al variare di t tale curva descrive in generale una superficie $\mathscr{I}$, che si dice la *superficie inviluppo* della famiglia (7.11). L'equazione cartesiana di $\mathscr{I}$ si ottiene per eliminazione del parametro t fra le (7.12).

Si può inoltre verificare che in ogni punto P della linea $\mathscr{I}_t$ il piano tangente alla superficie inviluppo coincide con il piano tangente in P alla superficie S_t di equazione (7.11).

Esempi

3) Si consideri una curva L e la famiglia di ∞^1 sfere aventi centro su L e raggio R costante. Verifichiamo che l'inviluppo di tale famiglia è la superficie luogo delle circonferenze di raggio R aventi centro su L e appartenenti al piano normale ad L in tale punto.
Supposto che L sia descritta dal punto $Q\,(s)$, ove s è ascissa curvilinea, il sistema (7.12) si scrive difatti

$$\|P - Q\,(s)\|^2 = R^2 \quad , \quad (P - Q\,(s)) \cdot \mathbf{t}\,(s) = 0$$

ove $P\,(x, y, z)$, $\mathbf{t}$ è il versore tangente ad L nel punto Q.
La superficie inviluppo $\mathscr{I}$ così ottenuta si dice *superficie canale;* nel caso particolare in cui L sia un'elica circolare, $\mathscr{I}$ prende il nome di *serpentino*, mentre se L è una circonferenza di raggio $R_1 > R$ si ottiene il *toro.*

4) Considerata la famiglia di ∞^1 piani paralleli all'asse z ;

$$x \cos t + y \sin t - r = 0 \quad (r \text{ costante})$$

la sua superficie inviluppo è il cilindro rotondo $x^2 + y^2 = r^2$ ed i piani della famiglia sono i suoi ∞^1 piani tangenti.
Le superfici che hanno soltanto ∞^1 piani tangenti, di cui i cilindri e i coni sono casi particolari, si chiamano *rigate sviluppabili* (cfr. Cap. XI, n. 3).

Si hanno anche inviluppi di famiglie di superfici dipendenti da due parametri:

$$f(x, y, z, \alpha, \beta) = 0 \tag{7.13}$$

e la sua superficie inviluppo $\mathcal{I}$ si ottiene risolvendo il sistema:

$$f(x, y, z, \alpha, \beta) = 0 \ , \ \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0 \ , \ \frac{\partial f}{\partial \beta} = 0$$

La superficie $\mathcal{I}$ è tangente in ogni suo punto alla superficie $S_{\alpha, \beta}$ di equazione (7.13) passante per esso.
Ad esempio ogni superficie, diversa da una rigata sviluppabile, è l'inviluppo della famiglia ∞^2 dei suoi piani tangenti.

Esempio

5) L'inviluppo della famiglia ∞^2 di piani di equazione

$$2\alpha x + 2\beta y - z - \alpha^2 - \beta^2 = 0$$

si ottiene risolvendo il sistema:

$$2\alpha x + 2\beta y - z - \alpha^2 - \beta^2 = 0 \ , \ 2x - 2\alpha = 0 \ , \ 2y - 2\beta = 0$$

ed è il paraboloide di equazione

$$z = x^2 + y^2 \ .$$

8. LA FORMULA DI TAYLOR.

Già si è visto al n. 5.3 che se una funzione $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ è differenziabile nel punto P_0 risulta:

$$f(P) = f(P_0) + d_{P_0} f(P - P_0) + o(\| P - P_0 \|) \quad ,$$

ossia, se $P(x_1, \ldots, x_n)$, $P_0(a_1, \ldots, a_n)$:

$$(8.1) \qquad f(P) = f(P_0) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(P_0)(x_i - a_i) + o(\| P - P_0 \|) \ .$$

La (8.1) si dice *formula di Taylor del 1° ordine* e permette di approssimare f , a meno di un infinitesimo (per $P \to P_0$) di ordine superiore all'infinitesimo campione $\| P - P_0 \|$, mediante un polinomio di grado $\leqslant 1$.

Se f è di classe C^r in un insieme aperto di $\mathbf{R}^n$ contenente il segmento $P_0 P$, si può provare che sussiste la seguente *formula di Taylor di ordine* r :

$$(8.2) \qquad f(P) = f(P_0) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(P_0)(x_i - a_i) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{r!} \sum_{i_1, \ldots, i_r = 1}^{n} f_{x_{i_1} \ldots x_{i_r}}(P_0)(x_{i_1} - a_{i_1}) \ldots (x_{i_r} - a_{i_r}) + o(\| P - P_0 \|^r) \ .$$

Trascurando nella (8.2) il termine $o(\| P - P_0 \|^r)$ si ottiene il *polinomio di Taylor di ordine* r che approssima f a meno di un infinitesimo (per $P \to P_0$) di ordine superiore ad r rispetto all'infinitesimo campione $\| P - P_0 \|$.

Ad esempio il polinomio di Taylor del 2° ordine di una funzione $f(x, y)$ relativo al punto $P_0(x_0, y_0)$ è dato da

$$(8.3) \qquad g(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) +$$

$$+ \frac{1}{2} \{ f_{xx}(P_0)(x - x_0)^2 + 2 f_{xy}(P_0)(x - x_0)(y - y_0) +$$

$$+ f_{yy}(P_0)(y - y_0)^2 \} \ .$$

Per provare la (8.2) occorre tenere presente la formula di Taylor per funzioni di una variabile reale nota dal corso di Analisi Matematica I .

Se $f(t)$ è una funzione di classe C^r in un intervallo I , t_0 un punto interno ad

I , per ogni $t \in I$ si ha

$$(8.4) \quad f(t)=f(t_0)+(t-t_0)f'(t_0)+\ldots+\frac{(t-t_0)^{r-1}}{(r-1)!}f^{(r-1)}(t_0)+\frac{(t-t_0)^r}{r!}f^{(r)}(t_1)\ ,$$

ove t_1 è un conveniente punto interno all'intervallo di estremi t_0 , t ; od anche:

$$(8.5) \quad f(t)=f(t_0)+(t-t_0)f'(t_0)+\ldots+\frac{(t-t_0)^r}{r!}f^{(r)}(t_0)+\mathrm{o}(|t-t_0|^r)\ .$$

La (8.4) e la (8.5) si dicono *formula di Taylor* per $f(t)$ rispettivamente col *resto di Lagrange* e di *Peano*.

Se f è una funzione a valori reali di più variabili, $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, consideriamo il vettore $\mathbf{u}=P-P_0=(x_1-a_1, \ldots, x_n-a_n)$ e la funzione F (da $\mathbf{R}$ ad $\mathbf{R}$) definita da

$$F(t)=f(P_0+t\mathbf{u})\ .$$

Poichè f è di classe C^r in una regione contenente il segmento $P_0 P$, F risulterà di classe C^r in un intervallo I contenente l'intervallo $[0, 1]$; applicando la (8.4) alla funzione F risulta:

$$(8.6) \qquad F(1)=F(0)+F'(0)+\ldots+\frac{1}{(r-1)!}F^{(r-1)}(0)+\frac{1}{r!}F^{(r)}(\theta)$$

con $0<\theta<1$. Per la (5.17) si ha

$$F^{(r)}(\theta)=\left(\frac{d^r f}{d\mathbf{u}^r}\right)_{P_1}$$

ove $P_1=P_0+\theta(P-P_0)$ è un punto interno al segmento di estremi P_0 , P .

Si può provare inoltre che

$$(8.7) \qquad F^{(r)}(\theta)=\left(\frac{d^r f}{d\mathbf{u}^r}\right)_{P_1}=\left(\frac{d^r f}{d\mathbf{u}^r}\right)_{P_0}+\mathrm{o}(\|P-P_0\|^r)\ .$$

Tenuto presente che

$$F(1)=f(P)\ ,\quad F(0)=f(P_0)$$

ed inoltre che, per la (5.11), qualunque sia k compreso tra 1 ed r :

$$(8.8) \qquad F^{(k)}(0)=\left(\frac{d^k f}{d\mathbf{u}^k}\right)_{P_0}=\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} f_{x_{i_1}\ldots x_{i_k}}(P_0)(x_{i_1}-a_{i_1})\ldots(x_{i_k}-a_{i_k})$$

dalle (8.6), (8.7), (8.8) si ottiene direttamente la (8.2).

9. ESTREMI RELATIVI.

9.1. Proprietà generali. In analogia con il caso delle funzioni di una sola variabile reale si pone la seguente

DEF. 1. *La funzione* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *presenta nel punto* $P_0 \in \operatorname{dom} f$ *un punto di minimo (ovvero di massimo) assoluto se si ha*

$$f(P) \geqslant f(P_0) \quad (\text{ovvero} \quad f(P) \leqslant f(P_0)) \tag{9.1}$$

per ogni $P \in \operatorname{dom} f$.

Sia A un insieme limitato di $\mathbf{R}^n$, cioè un insieme contenuto in un intorno sferico di raggio convenientemente grande.

TEOREMA 1.*(di Weierstrass).Se* f *è una funzione continua su un sottinsieme* A *di* $\mathbf{R}^n$ *chiuso e limitato (* A *si dice in tal caso anche compatto), essa assume in* A *massimo e minimo, cioè esistono almeno due punti* P_1, P_2 *di* A *tali che*

$$f(P_1) \leqslant f(P) \leqslant f(P_2) \quad , \quad \forall\, P \in A \ .$$

Il precedente *Teorema* è molto importante anche se non è sempre agevole trovare i punti di massimo e minimo assoluti di f sull'insieme A .

DEF. 2. *Il punto* $P_0 \in \operatorname{dom} f$ *si dice un punto di minimo (ovvero di massimo) relativo di* f *se esiste un intorno sferico* $S(P_0, r)$ *di* P_0 *tale che, per ogni* $P \in S(P_0, r) \cap \operatorname{dom} f$, *sia soddisfatta la* (9.1)

I punti di minimo e massimo relativo si dicono complessivamente i *punti di estremo relativo di* f ; i valori di f in tali punti si dicono gli *estremi relativi di* f .

9.2. Punti di stazionarietà.

TEOREMA 2. *Sia* P_0 *un punto di estremo relativo di* f *in cui la funzione risulti differenziabile* (e quindi in particolare P_0 deve essere interno a dom f).
Si ha allora:

$$\text{grad}_{P_0} f = \mathbf{0} \quad . \tag{9.2}$$

Difatti, considerato un qualsiasi vettore $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, la funzione $F(t) = f(P_0 + t\mathbf{u})$ (da $\mathbf{R}$ ad $\mathbf{R}$) presenta un estremo relativo nel punto $t = 0$, interno a dom F e in cui F è derivabile; pertanto è $F'(0) = 0$; d'altra parte (cfr. (5.16)) risulta

$$0 = F'(0) = \text{grad}_{P_0} f \cdot \mathbf{u} \quad ;$$

poichè tale risultato deve valere qualunque sia il vettore $\mathbf{u}$, ne segue la (9.2).

DEF. 3. *I punti in cui si annulla il gradiente di* f *si dicono punti di stazionarietà della funzione.*

Il Teorema 2 è importante in quanto esprime che i punti di estremo relativo di f, interni al dominio di f e in cui f sia differenziabile, devono essere ricercati fra i punti di stazionarietà della funzione.

Si osservi tuttavia che f può presentare punti di estremo relativo in cui non risulta differenziabile.

Per esempio, se

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

il punto $O(0, 0)$ è ovviamente un punto di minimo di f interno a dom f, ma f non è differenziabile in tale punto.

Se si considera invece la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

i punti per cui $x^2 + y^2 = 1$ sono punti di minimo di f, ma non sono interni a dom f.

In entrambi i casi non è definito il gradiente di f nei punti indicati.

DEF. 4. *Un punto di stazionarietà di f che non sia né di massimo né di minimo relativo si dice un punto di sella.*

Cioè un punto P_0 è un punto di sella se $\mathrm{grad}_{P_0} f = 0$ ed in ogni intorno di P_0 esistono dei punti P_1, P_2 per cui

$$f(P_1) < f(P_0) < f(P_2) .$$

9.3. Estremi relativi ed autovalori della matrice hessiana.

Sia P_0 un punto di stazionarietà di f ; per stabilire se P_0 è un punto di massimo, minimo relativo o di sella, in molti casi si ricorre al seguente

TEOREMA 3. *Sia f di classe C^2 in un punto P_0 di stazionarietà e sia $H_{P_0} f$ la matrice hessiana* (cfr. n. 4.3) *di f in P_0 .*

a) *Se gli autovalori di $H_{P_0} f$ sono tutti strettamente positivi, P_0 è un punto di minimo relativo;*

b) *se gli autovalori di $H_{P_0} f$ sono tutti strettamente negativi, P_0 è un punto di massimo relativo;*

c) *se $H_{P_0} f$ ammette autovalori positivi e negativi, P_0 è un punto di sella.*

Difatti, considerata la formula di Taylor del 2° ordine relativa al punto $P_0(a_1, \ldots, a_n)$, posto $P(x_1, \ldots, x_n)$, poichè per la (9.2) si ha $f_{x_i}(P_0) = 0$, essa è data da

$$f(P) = f(P_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(P_0)(x_i - a_i)(x_j - a_j) + o(\| P - P_0 \|^2)$$

e quindi, a meno di infinitesimi di ordine superiore al 2°, la forma quadratica nelle variabili $x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n$:

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(P_0)(x_i - a_i)(x_j - a_j) \tag{9.3}$$

rappresenta l'incremento di f nel passaggio dal punto P_0 al punto P

Tenuto conto della (4.11) del Cap. VIII, la quantità Q, qualunque sia $P(x_1, \ldots, x_n)$ in un conveniente intorno di P_0, è essenzialmente positiva (e quindi P_0 è un punto di minimo relativo di f) se gli autovalori della matrice simmetrica $H_{P_0} f$ sono tutti positivi; considerazioni analoghe si fanno negli altri casi.

OSSERVAZIONE 1. Per determinare il segno degli autovalori di $H_{P_0} f$ basta applicare la *regola di Cartesio* all'equazione caratteristica di $H_{P_0} f$ (cfr. Cap. VIII, n. 4.2).

OSSERVAZIONE 2. Nel caso in cui $H_{P_0} f$ ammette autovalori nulli e positivi, ovvero nulli e negativi (essendo sempre soddisfatta la condizione $\mathrm{grad}_{P_0} f = 0$), non è detto che f presenti in P_0 un punto di massimo ovvero minimo relativi.

Per esempio, considerate le funzioni :

$$f(x, y) = x^2 + y^4 \quad , \quad f(x, y) = x^2 - y^4$$

il loro unico punto di stazionarietà è $O(0, 0)$ e per entrambe risulta

$$H_o f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha come autovalori i numeri 2 e 0.

E' facile verificare che il punto O è un punto di minimo per la prima funzione ed è un punto di sella per la seconda.

OSSERVAZIONE 3. Se f dipende da una sola variabile, i risultati dei *Teoremi* 2, 3 coincidono coi metodi ben noti per la ricerca dei massimi e minimi in tale caso.

9.4. Considerazioni geometriche per funzioni di due variabili.

Sia $P_0(x_0, y_0)$ un punto di stazionarietà della funzione $f(x, y)$; tenuto conto della (5.13), si ha che il piano tangente alla superficie S grafico di f nel punto $Q_0\ (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è il piano orizzontale di equazione

$$z = f(x_0, y_0) \ ,$$

poichè $f_x\ (P_0) = f_y\ (P_0) = 0$.

Il polinomio di Taylor del 2° ordine che approssima f in un intorno di P_0 è dato da (cfr (8.3))

$$g(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \ \{ f_{xx}(P_0)\ (x - x_0)^2 + 2f_{xy}\ (P_0)\ (x - x_0)\ (y - y_0) \ +$$

$$+ f_{yy}(P_0)\ (y - y_0)^2 \} \ .$$

Operando la traslazione del sistema di riferimento:

$$X = x - x_0 \ , \ Y = y - y_0 \ , \ Z = z - f(x_0, y_0)$$

che porta il punto Q_0 nell'origine del sistema di riferimento di assi X, Y, Z , si ha che il grafico di g è rappresentato in tale sistema di riferimento dall'equazione:

(9,4) $$2Z = f_{xx}\ (P_0)\ X^2 + 2f_{xy}\ (P_0)\ XY + f_{yy}\ (P_0)\ Y^2 \ .$$

Per i risultati del n. 4.4 a) del Cap. VIII, esiste sul piano $[XY]$ una coppia di assi ortogonali x', y' rispetto a cui la forma quadratica a secondo membro della (9.4) assume la forma canonica $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$, ove λ_1, λ_2 sono gli autovalori della matrice

$$H_{P_0} f = \begin{pmatrix} f_{xx}\ (P_0) & f_{xy}\ (P_0) \\ f_{yx}\ (P_0) & f_{yy}\ (P_0) \end{pmatrix} \ ,$$

mentre i versori degli assi x', y' sono autovettori corrispondenti a tali autovalori. Si osservi inoltre che

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det H_{P_0} f \ .$$

Pertanto nel riferimento di assi (x', y', Z) la quadrica (9.4) assume la forma canonica

$$2Z = \lambda_1 \, x'^2 + \lambda_2 \, y'^2 \tag{9.5}$$

Ne segue che, tenendo presenti le (13.19), (13.20) del Cap. IV:

a) se $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ (P_0 punto di minimo relativo) la quadrica (9.5) è un paraboloide ellittico con concavità verso l'alto;

b) se $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ (P_0 punto di massimo relativo) la quadrica (9.5) è un paraboloide ellittico con concavità verso il basso;

c) se $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ (P_0 punto di sella) la (9.5) rappresenta un paraboloide a sella.

Inoltre $\det (H_{P_0} f)$ è positivo nei casi a), b), negativo nel caso c).