Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 10.4.2003

1. Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y' - \dfrac{y}{x} = -x^3y^4 \\ \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

2. Determinare gli estremi della funzione $f(x, y) = x^2 - y^2$ nell'insieme
$$E = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ (x-1)^2 + \frac{y^2}{4} \le 1, \ y \le 0\right\}.$$

3. Calcolare il seguente integrale doppio:
$$\int_E \frac{xe^{2y}}{y+2} dxdy,$$
dove $E = \{x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ x^2 + y^2 > 4, \ x^2 + 4y^2 < 16, \ x > 0, \ y > 0\}$.

4. Verificare se l'equazione
$$\log(1 + x^2y^2) - 4x^2 + y^2 - 1 = 0$$
definisce implicitamente una funzione $y = g(x)$ in un intorno del punto $(0, 1)$. In caso affermativo, stabilire se $x = 0$ è punto stazionario di g ed eventualmente classificarlo.

5. Calcolare l'insieme di convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{x^2-1}{2x+1}\Big)^{n/2}$$
e determinarne la somma.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 4.2.2003

1. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - y = \sin x \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 1. \end{cases}$$

2. Trovare i punti di massimo e di minimo della funzione $f(x, y, z) = z$ nell'insieme

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \ 2x^2 + 2y^2 - z^2 = 1, \ (x - y)^2 + z = 2\right\}.$$

3. Calcolare il seguente integrale di superficie:

$$\int_S |xyz| d\sigma,$$

dove $S = \{x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \ z = x^2 + y^2, \ 0 \leq z \leq 1\}$.

4. Data la funzione $f(x, y) = x^2 - y\cos(xy)$, dire se l'equazione $f(x, y) = 0$ descrive il grafico di una funzione $y = g(x)$ in un intorno del punto $(0, 0)$. In caso affermativo, stabilire se $x = 0$ è punto critico di g ed eventualmente classificarlo.

5. Calcolare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$$

e determinarne la somma.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 14.1.2003

1. Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y'' + y = xe^{-x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

2. Trovare i punti di massimo e di minimo della funzione
$$f(x, y) = |x| + |y|$$
nell'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ 5x^2 + 5y^2 - 6xy - 4 = 0\}$.

3. Sia E l'intersezione dei cerchi di centri (-1,0) e (1,0) e raggio $\sqrt{2}$. Calcolare
$$\int_E \frac{x}{\sqrt{2 - y^2}}.$$

4. Data la forma differenziale
$$\omega(x, y) = \frac{-2ydx + 2xdy}{(x - y)^2},$$
dire se essa è esatta e, in caso affermativo, determinarne le primitive.

5. Sviluppare in serie di McLaurin la funzione
$$f(x) = \frac{4 - x}{x^2 - 5x + 6}$$
e determinare l'insieme di convergenza della serie ottenuta.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 17.12.2002

1. Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y'' = 3y' + 10y + \sin x \\ \\ y(0) = 1, y'(0) = 0. \end{cases}$$

2. Calcolare il seguente integrale triplo:
$$\int_D \frac{|xz|}{y+1} dxdydz,$$
dove $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq 1, \ 0 \leq z \leq 1, \ y \leq 1/2\}$.

3. Trovare (se esistono) massimo e di minimo assoluti della funzione
$$f(x, y, z) = 2x - 3y + z$$
nell'insieme $E = \big\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq z \leq 25\big\}$.

4. Calcolare l'area della superficie ottenuta per rotazione intorno all'asse z della semicirconferenza:
$$x^2 - 2x + z^2 = 0, \qquad x \leq 1.$$

5. Data la funzione $f(x, y) = x \cos y - e^{xy}$, dire se l'equazione $f(x, y) = 0$ descrive il grafico di una funzione $y = g(x)$ in un intorno del punto $(1, 0)$. In caso affermativo, stabilire se $x = 1$ è punto critico di g ed eventualmente classificarlo.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 29.10.2002

1. Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y' = y + e^x y^3 \\ \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

2. Trovare i punti di massimo e di minimo della funzione
$$f(x,y,z) = x + 2y - 3z$$
nell'insieme $A = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \ x^2 + y^2 \le z, \ x^2 + y^2 + z^2 \le 2\}$.

3. Calcolare il volume dell'insieme:
$$E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \ x^2 + y^2 \le z, \ 2(x^2 + y^2) + z^2 \le 3\}\,.$$

4. Data la funzione
$$F(x,y,z) = x^2 - \sqrt{1+y^2} + \log(1+z),$$
stabilire se l'equazione $F(x,y,z) = 1$ definisce implicitamente una funzione $z = f(x,y)$ in un intorno del punto $(0,0,0)$, se $(0,0)$ è punto stazionario per f e, in caso affermativo, classificarlo.

5. Calcolare l'insieme di convergenza della serie
$$\sum_{n=1} \frac{n}{n+1} \Big(\frac{\log x}{x+1}\Big)^n$$
e determinarne la somma.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 10.9.2002

1. Risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x-y}{x+y} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

2. Calcolare il seguente integrale triplo

$$\int_E (xy+z)\,dxdydz,$$

dove $E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 \geq 1, \ x^2+y^2 \leq 1, \ 0 \leq z \leq 1\}$.

3. Trovare (se esistono) massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = y - \sqrt{y - x^2}$$

nell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ x^2 \leq y \leq 1, \ x \geq 0\}$.

4. Data la funzione

$$f(x,y) = \tan(xy) + 2e^{\sin y}\sqrt{1+x^2},$$

stabilire se l'equazione $f(x,y) = 2$ definisce implicitamente una funzione $y = g(x)$ in un intorno del punto $(0,0)$, se $x = 0$ è punto stazionario per g e, in caso affermativo, classificarlo.

5. Sviluppare in serie di Fourier di soli seni la funzione 2–periodica definita in $[0,1[$ da

$$f(x) = x^2(1-x)$$

e precisare gli intervalli di convergenza puntuale e uniforme della serie ottenuta.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 23.7.2002

1. Risolvere il Problema di Cauchy
$$\begin{cases} 2yy'' = 1 + y'^2 \\ \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

2. Trovare i punti di massimo e di minimo della funzione
$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} - xyz$$
nell'insieme $A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 :\ x^2 + y^2 \leq z^2,\ 0 \leq z \leq 1\}$.

3. Calcolare il seguente integrale:
$$\int_A \frac{xyz}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdydz,$$
dove $A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 :\ x^2 + y^2 - 2y \leq 0,\ x > 0,\ 0 \leq z \leq 2\}$.

4. Calcolare l'integrale superficiale
$$\int_\Sigma \frac{z}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} d\sigma,$$
dove
$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 :\ 2z = x^2 + y^2,\ 0 \leq z \leq 1\}.$$

5. Studiare la convergenza semplice, uniforme e totale della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\sqrt{x} - 1)^n}$$
e calcolarne la somma.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 25 Giugno 2002

1. Risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y + y^2 \sin x \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

2. Calcolare il seguente integrale triplo

$$\int_E xyz \ln(x+y) dxdydz,$$

dove $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \; x \geq 0, \; y \geq 0, \; 1 \leq x + y \leq 2, \; 0 \leq z \leq 1\}$.

3. Trovare (se esistono) massimo e minimo relativi e assoluti della funzione

$$f(x, y, z) = xy(x^2 + y^2 + z^2)$$

nell'insieme $E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

4. Data la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy,$$

dire se essa è esatta e, in caso affermativo, determinarne le primitive.

5. Sviluppare in serie di Fourier la funzione 1–periodica così definita

$$f(x) = x(1 - x) \quad \text{per } x \in [0, 1],$$

e precisare il tipo di convergenza.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 14.3.2002

1. Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y'' = y'(1-y) \\ y(0) = -4, \\ y'(0) = -8. \end{cases}$$

2. Dato l'insieme
$$E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ x \geq 0, \ 0 \leq y \leq e^{-2x}\},$$
calcolare (se converge) l'integrale doppio
$$\int_E \frac{e^{-4x}}{1+y^2}\, dxdy.$$

3. Determinare (se esistono) la massima e minima distanza dall'origine dell'insieme
$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \ x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1, \ x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

4. Stabilire se l'equazione
$$xy^2 + y + \sin(xy) + 3(e^x - 1) = 0$$
definisce implicitamente una funzione $y = g(x)$ in un intorno del punto $(0,0)$ ed eventualmente calcolare
$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x}.$$

5. Determinare gli insiemi di convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{n^2 x}{n+x^2}\right\}.$$

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 4.2.2002

1. Risolvere la seguente equazione differenziale:
$$xy' + y = -x^2y^3$$

2. Dato l'insieme
$$E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ xy \leq 1, \ x + y \geq 2, \ 0 \leq y \leq 1\},$$
calcolare
$$\int_E \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \, dxdy.$$

3. Determinare il massimo e il minimo della funzione
$$f(x, y, z) = (1 - x^2 - y^2 - z^2)(x + y + z)$$
nell'insieme
$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \ x \geq 0, \ y \geq 0\right\}.$$

4. Studiare la forma differenziale
$$\omega(x, y) = \frac{1}{y^2} dx - \left(\frac{2x}{y^3} + \sin y\right) dy$$
e, se è esatta, calcolarne le primitive.

5. Determinare gli insiemi di convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di funzioni:
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4x}{n^2 \log^2 n + 4x^2} \qquad x \in [0, +\infty) .$$

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 14.1.2002

1. Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} 2y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y} \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

2. Dato l'insieme
$$E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \; x^2 + \frac{y^2}{4} \le z^2, \; -2 \le z \le 3\},$$
calcolare
$$\int_E \frac{x^2}{z^2 + 5} \, dxdydz.$$

3. Determinare il massimo e il minimo della funzione $f(x, y, z) = x + 4y^2 - 2z$ nell'insieme
$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \; x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \le 4, \; z \le 3\right\}.$$

4. Stabilire se l'equazione
$$e^{xy} - (1 + x)y^2 = 0$$
definisce implicitamente una funzione $y = g(x)$ in un intorno del punto $(0, 1)$, se $x = 0$ è punto stazionario per g e, in caso affermativo, classificarlo.

5. Determinare gli insiemi di convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di funzioni:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \log\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{(x + n)^2} \qquad x \in [0, +\infty) .$$

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 10.12.2001

1. Calcolare la soluzione del problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y'' = 2y^3 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

2. Sia $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ definita da $F(x, y, z) = (ye^z + 4x^2, xy^2 - \cos x \sin z)$ e sia $G = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \; F(x, y, z) = (0, 0)\}$. Dopo aver verificato che $(0, 0, 0) \in G$, e che in un intorno di $(0, 0, 0)$ l'insieme G è localmente grafico di un'applicazione $f : (-\delta, \delta) \to \mathbf{R}^2$ del tipo $y = f_1(x), z = f_2(x)$, scrivere la derivata di f nel punto 0.

3. Trovare (se esistono) massimo e minimo assoluti della funzione
$$f(x, y) = \frac{1 + y^2}{2 + x^2}$$
nell'insieme
$$E = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2; \; |y| \le \frac{1}{1 + x^2}\right\}.$$

4. alcolare l'integrale triplo
$$\int_E \frac{|x|}{1 + \sqrt{z}} \, dxdydz,$$
dove $E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \; x^2 + y^2 \le z \le 1\}$.

5. Determinare gli insiemi di convergenza puntuale, uniforme e totale della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\log(2 + nx^2)}.$$

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 27.11.2001

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$y'' - 2y' + 2y = e^{-x}\sin x.$$

2. Dire se l'equazione $e^{xy} - \sin y - \cos x = 0$ definisce implicitamente y in funzione di x in un intorno di $(0,0)$; in caso affermativo, calcolare la derivata della funzione g cosí determinata in $x = 0$ e, qualora g abbia un punto critico in 0, classificarlo.

3. Calcolare massimo e minimo assoluti della funzione
$$f(x,y,z) = x^2 - 2y^3 + z^2$$
nell'insieme $E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x + y + z \geq 1\}$.

4. Calcolare l'integrale triplo
$$\int_E \frac{|x| + 1}{z^2}\,dxdydz,$$
dove $E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 :\ \sqrt[4]{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}\}$.

5. Sviluppare in serie di Mac Laurin la funzione:
$$f(x) = \log\Big(\frac{1 - x}{x^2 + 2}\Big).$$
precisando l'insieme di convergenza.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 17.9.2001

1. Calcolare la soluzione del problema di Cauchy:
$$\begin{cases} 2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2 \\ y(\pi/4) = 2 \\ y'(\pi/4) = 1. \end{cases}$$

2. Provare che l'equazione $x^3 + y^3 - 2xy + \sin y = 0$ definisce implicitamente y in funzione di x in un intorno di $(0,0)$ e calcolare la derivata della funzione cosi' determinata in $x = 0$.

3. Calcolare massimo e minimo assoluti della funzione
$$f(x,y) = 3x^2 - y^2 + 3xy$$
nell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq x - 1\}$.

4. Determinare gli insiemi di convergenza puntuale, uniforme e totale della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+nx}{2+n^3x^2}.$$

5. Calcolare il volume del solido limitato inferiormente dal piano $z = 0$, superiormente dal paraboloide $x^2 + 4y^2 = z$ e lateralmente dai cilindri $y^2 = x$ e $x^2 = y$.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 16.7.2001

1. Calcolare l'integrale generale dell'equazione differenziale
$$y' = \frac{y^2 - 2x^2}{x^2}$$
e determinarne la soluzione che verifica la condizione iniziale $y(1) = 2$.

2. Stabilire se esistono valori del parametro $a \in \mathbf{R}$ tali che la forma differenziale
$$\omega(x, y, z) = (a^2 - 7)xy\,dx + (x^2 + 2ayz)\,dy + ay^2\,dz$$
risulti esatta e, per i valori trovati, determinarne le primitive.

3. Trovare (se esistono) i punti di massimo e minimo assoluto della funzione
$$f(x, y, z) = 2x - y - z$$
nell'insieme $E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3\ x \le 1, x^2 + y^2 + z^2 \le 4\}$.

4. Determinare gli insiemi di convergenza puntuale, uniforme e totale della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\log x}}$$
e calcolarne la somma nel punto $x = e$. (*Suggerimento:* utilizzare un'opportuna serie di potenze).

5. Stabilire se esiste l'integrale triplo:
$$\int_E \frac{x}{z} dxdydz,$$
dove $E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 :\ x \ge 0, y \ge 0, 0 < x^2 + y^2 \le z \le 1\}$ ed eventualmente calcolarlo.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 25.6.2001

1. Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'' - 2yy' + (y')^2/y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2/3. \end{cases}$$

2. Calcolare la lunghezza del grafico della funzione $y = \log\cos x$, per $0 \leq x \leq \pi/3$.

3. Trovare (se esistono) i punti di massimo e minimo assoluto della funzione
$$f(x, y, z) = -2x - 2y + z$$
nell'insieme $E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \; x + y - 3 \leq z \leq 1 - x^2 - 2y^2\}$.

4. Calcolare la somma della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n(2n+1)},$$
precisando l'insieme di convergenza.

5. Calcolare il seguente integrale di superficie:
$$\int_S xy^2 z d\sigma,$$
dove S è la porzione di superficie di equazione $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}\}$ che si proietta sull'insieme $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \; x^2 + y^2 - 2y \leq 0, \; x \geq 0\}$.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 4.6.2001

1. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale
$$y' = \frac{xy^2 - 4x^3 + y^3}{xy^2}$$
e, in particolare, dire se fra esse vi sono polinomi.

2. Calcolare il volume dell'insieme
$$E = \left\{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2\right\}.$$

3. Trovare (se esistono) massimo e minimo assoluti della funzione
$$f(x, y) = \frac{x^2 + y}{x^2 + 2y^2 + 1}$$
nell'insieme $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, \; y \leq 1 - x^2\}$.

4. Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie di funzioni
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-1)^n \sin(nx)}{n^x}, \qquad x \in [1, 2].$$

5. Calcolare il seguente integrale di superficie:
$$\int_S \frac{x}{\sqrt{4z + 1}} d\sigma,$$
dove S è la porzione della superficie di equazione $z = x^2 + y^2$ che si proietta su $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 - y \leq 0, \; y \geq \frac{1}{2}, \; x \geq 0\}$.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 19.2.2001

1. Determinare tutte le soluzioni limitate dell'equazione differenziale
$$y' - y + y^3 = 0.$$

2. Calcolare l'integrale triplo
$$\int_E \frac{y}{x^2 + y^2} dxdydz,$$
dove $E = \{(x, y, z) : \ x^2 + y^2 \leq 1, \ x^2 + (y - 1)^2 \leq 1, \ 0 \leq z \leq 1\}$.

3. Trovare (se esistono) massimo e minimo assoluti della funzione
$$f(x, y, z) = |x|(x^2 + y^2 + 1)(z - 1)$$
nell'insieme $E = \{(x, y, z) : \ x^2 + y^2 - z \leq 0, \ z \leq 1\}$.

4. Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni
$$f_n(x) = \exp\{\sin^n x\}, \qquad x \in [0, 2\pi],$$
e dire se vale l'eguaglianza $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} f_n(x)dx = \int_0^{2\pi} \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$.

5. Calcolare l'area della seguente superficie:
$$S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 4, \ x^2 + y^2 - 2y \leq 0, \ z \geq 0\}.$$

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 29.1.2001

1. Data l'equazione differenziale $xy' = 2y - 3xy^2$, determinarne tutte le soluzioni definite in $]0, +\infty[$, quelle definite in $]-\infty, 0[$ e dire se vi sono soluzioni definite in $\mathbf{R}$.

2. Calcolare l'integrale triplo
$$\int_E xydxdydz,$$
dove E è l'intersezione degli insiemi $\{(x, y, z) : \ x \geq 0, \ y \geq 0\}$, $\{(x, y, z) : \ z \geq x^2 + y^2\}$ e $\{(x, y, z) : \ x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \leq 4\}$.

3. Trovare (se esistono) massimo e minimo assoluti della funzione
$$f(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$
nell'insieme $E = \{(x, y, z) : \ x^2 + 4y^2 + 4z^2 \leq 4, \ x \geq 0\}$.

4. Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni
$$f_n(x) = x^n \log\Big(1 + \frac{n}{x^{2n} + n}\Big), \qquad x \in \mathbf{R},$$
e calcolare, per ogni $c \in]0, 1]$, il $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^c f_n(x)dx$.

5. Calcolare il seguente integrale di superficie:
$$\int_S \frac{y^2}{x\sqrt{4x^4 - 5x^2 + 2}} \, d\sigma$$
dove S è la parte della superficie di equazione $y^2 + z^2 = x^2(1 - x^2)$ contenuta nel semispazio $\{x \geq 0\}$.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 15.1.2001

1. Determinare (se ne esistono) le soluzioni limitate dell'equazione differenziale
$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{2+x}, \qquad x > 0.$$

2. Calcolare l'integrale triplo
$$\int_E z dx dy dz,$$
dove $E = \{(x,y,z): \; x^2+y^2+z^2 \le 4, \; z \ge x+2\}$.

3. Trovare (se esistono) massimo e minimo assoluti della funzione
$$f(x,y,z) = x^2 - xy + 2z^2$$
nell'insieme $E = \{(x,y,z): \; x^2+y^2+z^2 \le 4, \; z \ge x\}$.

4. Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \frac{1+nx}{2+n^2x^2}.$$

5. Data la funzione $f(x,y,z) = z^3+2z^2-3xyz+x^3-y^3$, dire se l'equazione $f(x,y,z) = 0$ descrive il grafico di una funzione $z = g(x,y)$ in un intorno del punto $(0,0,-2)$. In caso affermativo, stabilire se $(0,0)$ è un punto critico di g ed eventualmente classificarlo.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 18.9.2000

1. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = xy + x\sqrt{y}, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

2. Calcolare massimo e minimo della funzione $x^2 + 3y^2 - xy - y$ nel quadrato $Q = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.

3. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int_E (x + y) dxdy,$$

dove $E = \{(x, y) : 0 < x < y < 2x,\ 1 < xy < 2\}$.

4. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1 + x^{2n}}}{3^n}.$$

5. Assegnata l'equazione $f(x, y) = x^2+y^2+\sin y = 0$, dire se essa definisce implicitamente una funzione $y = g(x)$ il cui grafico passa per il punto $(0, 0)$, ed eventualmente dire se in tale punto la funzione g è crescente, decrescente, ha un estremo relativo o un flesso.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 17.7.2000

1. Posto $f(x) = \sin x$ per $0 < x < \pi$, $f(x) = 0$ altrimenti, determinare tutte le soluzioni del problema differenziale
$$\begin{cases} y'' + y = f(x), & x > 0, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

2. Calcolare i massimi ed i minimi assoluti della funzione
$$f(x,y) = |x| - |y|$$
nell'insieme $A = \big\{(x,y) : \ x^2 + y^2 = 1\big\}$.

3. Calcolare il seguente integrale doppio (se è convergente)
$$\int_E \frac{y^2}{\sqrt{x}(1+x)} dxdy,$$
dove $E = \big\{(x,y) : y > 0, \ y^2 < x < y^{-2}\big\}$.

4. Dire se la seguente forma differenziale è esatta nel suo dominio naturale, e, in caso affermativo, calcolarne le primitive:
$$\omega(x,y) = \Big(\sqrt{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x^2+y^2}\Big)dx + \Big(\sqrt{\frac{x}{y}} + \frac{x}{x^2+y^2}\Big)dy.$$

5. Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1+|x|^n n^2}.$$

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 26.6.2000

1. Data l'equazione differenziale
$$(x+1)y' + 3y + (1-x^2)y^2 = 0,$$
stabilire se esiste ed è unica la soluzione $y : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ tale che
$$\lim_{x \to 0^+} y(x) = +\infty.$$

2. Dato l'insieme
$$E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ x < y < 2x, \ 0 < x + y < 2 \ \},$$
calcolare (se esiste) l'integrale
$$\int_E \sin \frac{\pi x}{x+y} dx\, dy.$$

3. Calcolare (se esistono) il massimo e il minimo della funzione $f(x, y, z, t) = xy - 2zt$ nell'insieme
$$G = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 : \ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq 1 \ \right\}.$$

4. Dato $R > 0$ e l'insieme $S_R = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; \ x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \ z \geq R/2\}$, rappresentare S_R come il sostegno di una superficie regolare φ_R e calcolare l'integrale superficiale
$$\int_{\varphi_R} z d\sigma.$$

5. Determinare gli insiemi di convergenza puntuale, assoluta ed uniforme della serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x+n}{x^2+n^4+\log n}.$$

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 5.6.2000

1. Determinare l'unica soluzione limitata dell'equazione differenziale
$$y'' + \frac{1}{x}y' = 1 + x^2, \qquad\qquad 0 < x < 1,$$
tale che $y(1) = 0$.

2. Calcolare i massimi ed i minimi assoluti e relativi della funzione
$$f(x, y) = e^{x^2+y^2-y^3}$$
nell'insieme $A = \{(x, y) : \ 4x^2 + y^2 \leq 4 \ \}$.

3. Calcolare il seguente integrale doppio (se è convergente)
$$\int_E \frac{x}{y} dxdy,$$
dove $E = \{(x, y) : 0 < x < 4, \ x^3/8 < y < x^3, \ 0 < y < 8\}$.

4. Calcolare l'area della porzione del piano $z = x + y$ che si proietta ortogonalmente sulla regione del piano (xy) delimitata dalle rette $y = 0$ e $x = \log 3$ e dalla curva di equazione parametriche
$$\begin{cases} x = \log(1 - 2t) \\ y = t - \log(1 - 2t) \end{cases} \qquad\qquad -1 \leq t \leq 0.$$

5. Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1} - x^n}{n}$$
e calcolarne la somma.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 10.4.2000

1. Trovare l'integrale generale dell'equazione
$$y'' + 3y' + 2y = \sin x.$$

2. Calcolare il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse z del grafico
$$y = \log z, \qquad 1 < z < 2.$$

3. Trovare (se esistono) massimo e minimo della funzione
$$f(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + 4z^2$$
nell'insieme
$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \; 2x + 4y - 6z + 5 = 0\right\}.$$

4. Calcolare l'integrale doppio
$$\int_E \frac{dxdy}{xy}$$
dove $E \subset \mathbf{R}^2$ è l'insieme racchiuso dalle rette $x + y = 1$, $x + y = 3$, $y = x$, $y = 2x$.

5. Sviluppare in serie di Taylor di punto iniziale $x = 0$ la funzione
$$f(x) = \frac{1 + 3x^2}{(1 - x)^3}$$
e descrivere l'insieme e il tipo di convergenza della serie ottenuta.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 21.2.2000

1. Risolvere il P.d.C.
$$\begin{cases} y^3y'' + 1 = y^4 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

2. Dato l'insieme
$$E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \ x^2 + y^2 \le 1, \ x^2 + y^2 - 2 \le z \le 4 - x - y\},$$
stabilire se E è limitato e calcolarne il volume.

3. Trovare (se esistono) i punti dell'insieme
$$G = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \ x^2 + y^2 \le 1, \ z = 1 - 3xy \ \right\}$$
aventi minima o massima distanza dall'origine.

4. Dato l'insieme $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; \ z = xy, \ x^2 + y^2 \le 1, \ 0 \le y \le \sqrt{3}x\}$, rappresentare S come il sostegno di una superficie regolare φ e calcolare l'integrale superficiale
$$\int_\varphi z d\sigma.$$

5. Sviluppare in serie di Fourier la funzione 2 periodica definita in $[-1, 1)$ da
$$f(x) = \begin{cases} x(x-1) & \text{se } x \in [0, 1) \\ x(x+1) & \text{se } x \in [-1, 0) \ . \end{cases}$$
Precisare gli insiemi di convergenza puntuale ed uniforme.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 13.12.1999

1. Trovare la soluzione generale della seguente equazione differenziale:
$$y''' + y = e^{-x}.$$

2. Calcolare il seguente integrale doppio:
$$\int_E \frac{|x-2y|}{(x^2+y^2)^{5/2}} dxdy,$$
dove $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ x > 0, \ y > 0, \ x^2 + y^2 \geq 1 \ \}$.

3. Trovare massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione
$$f(x,y,z) = 2x^2 - y^2 - z^2 - x$$
nell'insieme $E = E_1 \cup E_2$ dove
$$E_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \ z \leq 0\right\},$$
$$E_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \ x^2 + y^2 - (z-1)^2 \leq 0, \ 0 \leq z \leq 1\right\}.$$

4. Data $F(x,y,z) = e^x - \cos(xy) - z - z^3$, dire se l'equazione $F(x,y,z) = 0$ definisce una superficie S della forma $z = f(x,y)$ in un intorno di $(0,0,0)$. Verificare che $(0,0)$ è punto critico di f e classificarlo. È vero che S è definita globalmente da $F(x,y,z) = 0$?

5. Calcolare la somma della serie:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} \frac{x^n}{(1+x^2)^n}$$
giustificando i passaggi e precisando l'insieme di convergenza.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 20.9.1999

1. Risolvere la seguente equazione differenziale:
$$y' - y\cos x = y^2 \cos x.$$

2. Calcolare il seguente integrale doppio:
$$\int_E |x-y|dxdy,$$
dove $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ x > 0,\ x^2+y^2-y > 0,\ x^2+y^2-2y < 0\}$.

3. Trovare massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione
$$f(x,y) = xy - 2z^2$$
nell'insieme $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \ x^2+y^2+\log\left(\frac{1}{e}+z^2\right) \leq 0\right\}$.

4. Sia φ la superficie il cui sostegno è l'insieme
$S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ z = x^2-y^2,\ x^2+y^2 \geq 1,\ 4x^2+y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\,\}$.
Determinare il versore $\mathbf{n}$ normale alla superficie ed avente la terza componente positiva e calcolare l'integrale superficiale
$$\int_\varphi \langle \mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle d\sigma$$
dove $\mathbf{F}(x,y,z) = (y, -x, 5xy)$.

5. Sviluppare in serie di Mac Laurin la funzione:
$$f(x) = \log\Big(\frac{2x-4}{x-4}\Big).$$
precisando l'insieme di convergenza.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 6.9.1999

1. Trovare la soluzione del seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} yy'' = 2y^2 + (y')^2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

2. Sia γ la curva del piano xy di equazione $y = \arcsin x$, con $x \in [0,1]$, e sia Σ la parte del cilindro con direttrice γ e generatrici parallele all'asse z compresa tra i piani $z = 1$ e $z = e$. Calcolare il seguente integrale di superficie
$$\int_\Sigma \frac{y\sqrt{1-x^2}}{z\sqrt{2-x^2}} d\sigma$$

3. Trovare massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione
$$f(x,y) = e^{x^2+y^2} - x^2 - 2y^2$$
nell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ 3x^2 + 4y^2 \le 4, \ y \ge 1/2\}$.

4. Posto $E_n = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ 1 < x^2 + y^2 < n, \ x > 0, y > 0\}$ ed $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ 1 < x^2 + y^2, \ x > 0, y > 0\}$, dire se valgono le seguenti uguaglianze:
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{E_n} \frac{y-x}{x^2+y^2} dxdy = \int_E \frac{y-x}{x^2+y^2} dxdy$$
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{E_n} \frac{y-x}{(x^2+y^2)^2} dxdy = \int_E \frac{y-x}{(x^2+y^2)^2} dxdy\,.$$

5. Calcolare la somma della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}x^{n-1}$$
precisando l'insieme di convergenza puntuale; discutere anche la convergenza uniforme e totale.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 19.7.1999

1. Per ogni valore di $\lambda \in \mathbf{R}$ si trovi la soluzione in $(0, +\infty)$ del seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} x^5 y'' = 4\lambda + x^3 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = \lambda^2 - 1 \end{cases}$$
Si dica se esistono valori di λ per i quali la soluzione corrispondente abbia un estremo relativo per $x = 1$, e si precisi, per i valori trovati, se si tratta di un massimo o di un minimo.

2. Calcolare il seguente integrale triplo
$$\int_E \frac{xyze^{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} \sin z \; dxdydz$$
dove $E = \Big\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \ x > 0, \ x^2 + y^2 > 1, \ x^2 + y^2 - 2y < 0, \ 0 < z < \pi/2\Big\}$.

3. Trovare massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione
$$f(x, y) = e^{-|x|}(x^3 + y^2).$$

4. Trovare per quali valori di $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ la forma differenziale
$$\omega(x, y, z) = 2(\alpha + \beta - 2\gamma)xyz\,dx + (\alpha - 3\beta)x^2 z\,dy + (\alpha - \beta - \gamma)x^2 y\,dz$$
è esatta, e in caso affermativo calcolarne tutte le primitive.

5. Data la successione di funzioni $f_n(x) = nxe^{-nx}$, $x \geq 0$, dire se converge puntualmente, uniformemente e in $L^1(0, \infty)$.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 7.6.1999

1. Scrivere in forma esplicita la soluzione del seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y' = \dfrac{\sin y^2}{y} \\ y(0) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \end{cases}$$

2. Calcolare il seguente integrale doppio
$$\int_E \frac{xy}{y^2 - 4x^2} dxdy$$
dove $E = \Big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ -x/\sqrt{3} < y < -\sqrt{3}x, \ x^2 + y^2 < 1, \ 4y > -1/x\Big\}$.

3. Trovare massimi e minimi assoluti della funzione
$$f(x, y, z) = 2x + 3y + 4z$$
in $E = \Big\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \ x + y + z = 0, \ 4x^2 + y^2 = 16z\Big\}$.

4. Trovare per quali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ la forma differenziale
$$\omega(x, y) = \frac{5(\alpha^2 - 1)x}{1 + 5x^2 + y^2} dx + \frac{2(\alpha + 7)y}{1 + 5x^2 + y^2} dy$$
è esatta, e in caso affermativo calcolarne tutte le primitive.

5. Assegnata l'equazione $f(x, y) = x \cos y - ye^x = 0$, dire se

a) essa definisce implicitamente una funzione $y = g(x)$ il cui grafico passa per il punto $(0, 0)$;

b) la funzione $y = g(x)$ è crescente o decrescente in un intorno del punto $x = 0$.

c) la funzione $y = g(x)$ è convessa o concava in un intorno del punto $x = 0$.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 17.5.1999

1. Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} xy' + y = y^2 \log x \\ y(1/e) = -e. \end{cases}$$

2. Calcolare il seguente integrale
$$\int_E (x^2+y^2)\Big(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}\Big) dxdy,$$
ove $E = \Big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ 1 < xy < 3, \ 1 < x^2 - y^2 < 2\Big\}$.

3. Trovare massimi e minimi assoluti della funzione
$$f(x,y) = \arctan(x - |y|)$$
nel rettangolo di vertici (1,0), (0,1), (-2,-1), (-1,-2).

4. Dire per quali valori di $x \in \mathbf{R}$ converge la seguente serie, e calcolarne la somma:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\Big) x^n.$$

5. Calcolare l'integrale di superficie $\displaystyle\int_\Sigma xy d\sigma$, ove
$$\Sigma = \Big\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \ 0 < x < 1, \ 0 < y < 1, \ z = \frac{x^2+y^2}{2}\Big\}.$$

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 11.2.1999

1. Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y'' = -\dfrac{4y'}{y^2} \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$$

2. Calcolare il volume dell'insieme
$E = \Big\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \; x^2 + 2y^2 + z^2 < 4, \; x^2 + 2y^2 + 9z^2 > 9, \; z > 0\Big\}.$

3. Trovare massimi e minimi assoluti della funzione
$$f(x, y) = x^3 + x - 4xy - 2y^2$$
nel sottoinsieme del piano delimitato dalle rette $y = x$, $y = 2x + 2$ e $x = 0$.

4. Sviluppare in serie di Mac Laurin la seguente funzione:
$$f(x) = \sin^2 x,$$
precisando la convergenza della serie ottenuta.

5. Sia $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ definita da
$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = \sin x + \cos y + z - 1 \\ F_2(x, y, z) = \sin^2 x + y \cos y - \sin z \end{cases}$$
e sia $G = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \; F(x, y, z) = (0, 0)\}$. Dopo aver verificato che $(0, 0, 0) \in G$, e che in un intorno di $(0, 0, 0)$ l'insieme G è localmente grafico di un'applicazione $f : (-\delta, \delta) \to \mathbf{R}^2$, scrivere la matrice jacobiana di f nel punto 0.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 14.12.1998

1. Determinare tutte le soluzioni della seguente equazione differenziale
$$\frac{y''}{y} - \frac{2y'}{y\sin 2x} - \Big(\frac{y'}{y}\Big)^2 = \sin x.$$
Suggerimento: porre $y' = uy$, con u funzione di x.

2. Calcolare il seguente integrale
$$\int_E \frac{xy\exp\{(x^2+y^2)^{-1/2}\}}{(x^2+y^2)^{5/2}}\ dxdy$$
dove
$$E = \Big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 :\ 1 \le x^2+y^2,\ 0 \le x \le y \le 1\Big\}.$$

3. Trovare massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione
$$f(x,y) = \arctan\Big(\frac{1}{3}x^2y + 2y\Big)$$
in $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 :\ x^2+y^2 \le 6,\ y \ge 0,\ x \ge \frac{1}{5}y^2\}$.

4. Calcolare il seguente limite
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{1} \cos\frac{x^2}{n^2}dx.$$

5. Assegnata l'equazione

$$f(x,y) = 8\ \cos(x^2 - y) - xy = 0,$$

dire se

(a) definisce implicitamente una funzione $y = g(x)$ il cui grafico passa per il punto $(2,4)$;

(b) la funzione $y = g(x)$ è crescente o decrescente in un intorno del punto $x = 2$.

(c) la funzione $y = g(x)$ è convessa o concava in un intorno del punto $x = 2$.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 30.9.1998

1. Determinare le soluzioni del seguente problema di Cauchy
$$\begin{cases} y^3 y'' + 1 = 0 \\ y(1) = 1, \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

2. Calcolare il seguente integrale
$$\int_E \frac{z^2}{4x^2 + y^2 + 5}\, dxdydz$$
dove
$$E = \Big\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \ 0 \leq \frac{z}{9} \leq x^2 + \frac{y^2}{4} + 1 \leq 3 \Big\}.$$

3. Trovare massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione
$$f(x, y) = e^{x^2+y^2} + e^{4x^2+y^2} - 1$$
in $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1, \ y \geq 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ 4x^2 + y^2 \leq 4, \ y < 0\}$.

4. Calcolare il seguente limite
$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2 + x^2} dx.$$

5. Dire se la funzione definita da

$$f(x, y) = (x \log y, y \log x, x + y)$$

è la parametrizzazione di una superficie regolare in un intorno di (1,1), e, in caso affermativo, scrivere l'equazione del piano tangente nel punto $(0, 0, 2)$.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 8.9.1998

1. Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale
$$yy'' + (y')^2 + 1 = 0.$$
In che cosa consiste la famiglia delle curve integrali?

2. Calcolare il volume del seguente insieme
$$E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq (z-4)^2, \ 0 \leq z \leq 4, \ x \leq 2\}.$$

3. Trovare i punti di distanza massima e minima dall'origine nell'insieme
$$E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \ x^2 + 2y^2 \leq 8, \ 2y + z = 1\}.$$

4. Calcolare la lunghezza della curva piana (detta *catenaria*)
$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad -a \leq x \leq a.$$

5. Verificare che la funzione
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}, \qquad x \in \mathbf{R}$$
è definita in $\mathbf{R}$, continua in $\mathbf{R}$ e di classe C^1 in $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 20.7.1998

1. Determinare tutte le soluzioni del seguente problema
$$\begin{cases} y' - 2|y| = 2e^x\sqrt{|y|} \\ \\ \lim\limits_{x\to -\infty} y(x) = 0 \end{cases}$$

2. Calcolare il seguente integrale triplo
$$\int_E \frac{z+1}{2x^2+y^2+3}\; dxdydz,$$
dove $E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 :\; 2x^2+y^2+z^2 \leq 1,\; z \geq 0\}$.

3. Trovare massimi e minimi assoluti della funzione
$$f(x,y,z) = 5z^2 + y^2 - 6yz$$
nell'insieme $E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 :\; 4z^2 \geq x^2+y^2+1,\; y \geq 0,\; 0 \leq z \leq 3\}$.

4. Data la forma differenziale
$$\omega(x,y) = \frac{-y/|x|}{\sqrt{x^2-y^2}}dx + \frac{x/|x|}{\sqrt{x^2-y^2}}dy,$$
dire se è esatta, e in caso affermativo calcolarne le primitive, precisando il loro dominio massimale.

5. Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{-nx}}{n}, \qquad\qquad x \in \mathbf{R}$$
e calcolarne la somma.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 22.6.1998

1. Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y'' + y = \dfrac{2}{\sin^3 x} \\ \\ y(\pi/2) = 0, \quad y'(\pi/2) = 1 \end{cases}$$
e dire qual è il dominio della soluzione.

2. Calcolare il seguente integrale triplo
$$\int_E \frac{1}{3-z}\, dxdydz,$$
dove $E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 16,\ z \leq \sqrt{x^2+y^2}\}$.

3. Trovare massimi e minimi assoluti della funzione
$$f(x,y) = (1-y)(2-y-x^2)$$
nel triangolo di vertici (2,0), (0,2) e (-2,0).

4. Date la forma differenziale
$$\omega(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}dx + \Big(\frac{2y}{x^2+y^2} + \cos y\Big)dy$$
e la curva γ rappresentata parametricamente da $x(t) = (2t-1),\ y(t) = (3^t - 2)$ con $0 \leq t \leq 1$, calcolare il valore dell'integrale $\int_\gamma \omega$.

5. Sviluppare in serie di Fourier la funzione 2-periodica
$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x & -1 < x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$
e studiare la convergenza della serie ottenuta.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 25.5.1998

1. Risolvere la seguente equazione differenziale:
$$y^3y'' + 1 = 0.$$

2. Calcolare il volume del solido
$$E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq 16, 0 \leq z \leq 8, z \leq 12 - x - y\}.$$

3. Trovare massimi e minimi assoluti della funzione
$$f(x, y) = \frac{e^{x+y}}{x^2 + y^2}$$
nell'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ |x| \leq 2, |y| \leq 2, x^2 + y^2 \geq 1\}$.

4. Calcolare l'area della figura piana racchiusa dalla curva di equazioni:
$$x(t) = \cos t(1 + \sin t), \ y(t) = 1 + \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

5. Sviluppare in serie di soli seni la funzione 4-periodica definita in $[0, 2[$ da
$$f(x) = e^x - 1.$$
e studiare la convergenza della serie ottenuta.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 19.2.1998

1. Risolvere la seguente equazione differenziale:
$$y' - \frac{y}{x} = \frac{\tan x}{x^3}\, y^4.$$

2. Calcolare l'integrale doppio
$$\int_E \frac{1}{\sqrt{2-x^2-y^2}} dxdy,$$
ove $E = \Big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 :\ (x-\frac{1}{2})^2 + y^2 \geq \frac{1}{4},\ (x-1)^2+y^2 \leq 4\Big\}$.

3. Data la curva intersezione della superficie $x^2+y^2-z^2=1$ col piano $x+y+2z=0$, determinare i suoi punti di quota minima e massima.

4. Studiare la forma differenziale
$$\omega(x,y) = \frac{1}{y^2}dx + \frac{x+\sin y - \cos y}{y}dy$$
e, se è esatta, calcolarne le primitive.

5. Sviluppare in serie di Mac Laurin la seguente funzione:
$$f(x) = \log(x+\sqrt{1+x^2}),$$
precisando la convergenza della serie ottenuta. (*Suggerimento:* utilizzare lo sviluppo in serie della derivata di f)

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 15.12.1997

1. Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} yy'' + (y')^2 = 0 \\ y(1) = -1 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$
e dire qual è il dominio della soluzione massimale .

2. Calcolare l'integrale
$$\int_\gamma (y+z)dx + (x+z)dy + (x-y)dz,$$
ove γ è la curva intersezione della superficie $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ col piano $\{y = z\}$.

3. Data la curva $C : x^2 + 2xy - y^2 + 4 = 0$, determinare (se esistono) la distanza minima e massima dei punti di C dall'origine.

4. Data $f(t) = (t^3 - 2t)e^{-t}$, calcolare $\displaystyle\int_1^\infty f(t)dt$, e dedurre
$$\int_E f(xy)dxdy, \quad \text{con} \quad E = \{(x,y) : 0 < x < y < 4x,\ xy > 1\}.$$

5. Sviluppare in serie di Mac Laurin la seguente funzione:
$$f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2}),$$
precisando la convergenza della serie ottenuta. (*Suggerimento:* utilizzare lo sviluppo in serie della derivata di f)

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 29.10.1997

1. Data l'equazione differenziale $y = xy' - e^{y'}$, determinarne tutte le soluzioni e discutere l'unicità locale e globale delle soluzioni al variare dei dati iniziali.

2. Stabilire se l'equazione $\cos x - xy - e^y = 0$ definisce implicitamente una funzione derivabile $y = f(x)$ in un intorno del punto $(0,0)$, e, in caso affermativo, scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nello stesso punto.

3. Determinare (se esistono) estremi assoluti e relativi della funzione
$$f(x,y) = x^2 + y^2 + ax + y$$
nell'insieme $D = \{(x,y) :\ x^2+y^2 \leq 1\}$ al variare del parametro $a \in \mathbf{R}$.

4. Calcolare l'integrale di superficie
$$\int_\Sigma \frac{z^2}{\sqrt{4x+5}}d\sigma$$
dove $\Sigma = \{(x,y,z) :\ z = \sqrt{x-y^2+1},\ (x,y) \in E\}$, ed $E = \{(x,y) :\ 0 \leq x - y^2 \leq 1;\ 2 \leq x + y^2 \leq 3;\ y \geq 0\}$.

5. Usando la teoria delle serie di potenze, determinare la somma della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/2)^{2n}}{n}.$$

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 10.9.1997

1. Data l'equazione differenziale $y = xy' - e^{y'}$, determinarne tutte le soluzioni e discutere l'unicità locale e globale delle soluzioni al variare dei dati iniziali.

2. Stabilire se l'equazione $\cos x - xy - e^y = 0$ definisce implicitamente una funzione derivabile $y = f(x)$ in un intorno del punto $(0,0)$, e, in caso affermativo, scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nello stesso punto.

3. Determinare (se esistono) estremi assoluti e relativi della funzione
$$f(x,y) = x^2 + y^2 + ax + y$$
nell'insieme $D = \{(x,y) :\ x^2+y^2 \leq 1\}$ al variare del parametro $a \in \mathbf{R}$.

4. Calcolare l'integrale di superficie
$$\int_\Sigma \frac{z^2}{\sqrt{4x+5}} d\sigma$$
dove $\Sigma = \{(x,y,z) :\ z = \sqrt{x-y^2+1},\ (x,y) \in E\}$, ed $E = \{(x,y) :\ 0 \leq x - y^2 \leq 1;\ 2 \leq x + y^2 \leq 3;\ y \geq 0\}$.

5. Determinare l'insieme di convergenza e la somma della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n+1};$$
giustificare i passaggi e il significato del risultato.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 21.7.1997

1. Una soluzione u dell'equazione differenziale $y'' - 3y' - 4y = 0$ interseca una soluzione v dell'equazione $y'' + 3y' - 4y = 0$ nell'origine. Determinare u e v sapendo che hanno la stessa tangente nell'origine e che $\lim_{x \to +\infty} \frac{v^4(x)}{u(x)} = \frac{5}{6}$.

2. Dato il campo vettoriale $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$, calcolare l'integrale
$$\int_S F \cdot \nu d\sigma$$
dove S è il rettangolo di vertici $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(-1, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$ e ν è la normale ad S orientata in modo che la sua componente lungo l'asse z sia positiva.

3. Determinare (se esistono) estremi assoluti e relativi della funzione
$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + 1}$$
nell'insieme $D = \{(x, y) : \ x^2 \leq y^2 + 1, \ y^2 \leq x^2 + 1\}$.

4. Calcolare il volume dell' insieme
$$E = \{(x, y, z) : \ x^2 + y^2 \leq 1, \ x^2 + y^2 + z^2 \geq 1, \ 0 \leq z \leq 3 - x - y \ \}.$$

5. 5 Data la successione di funzioni $f_n(x) = \frac{n}{x^2 + n^2}$ $(x \in \mathbf{R})$, studiarne la convergenza, calcolare il $\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx$ e verificare l'applicabilità dei teoremi noti sul passaggio al limite sotto il segno d'integrale.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 23.6.1997

1. Determinare tutte le funzioni che risolvono la seguente equazione differenziale:
$$y' = \frac{y^4 - 1}{y^2 + 2}.$$
Precisare se esistono soluzioni definite su tutto $\mathbf{R}$.

2. Studiare la forma differenziale
$$\omega(x, y) = \Big(3\sqrt{xy}\Big)dx + \Big(\frac{\sqrt{x^3 y} + 2}{y}\Big)dy$$
e, se è esatta, calcolarne le primitive.

3. Determinare (se esistono) estremi assoluti e relativi della funzione
$$f(x, y) = 3x^2 - 10xy^2 + y^2$$
nell'insieme $E = \{(x, y) : \ x^2 + y^2 \leq 1, \ |x - y| \leq 1\}$.

4. Calcolare l'integrale di superficie
$$\int_M \frac{1 + z}{\sqrt{1 + \cos^2 x)^3}} \, d\sigma$$
dove M è la superficie generata dalla rotazione del grafico della funzione $y = \sin x$ per $\pi/4 < x < \pi/2$ attorno all'asse x.

5. Stabilire se esiste finito l'integrale

$$\int_A \frac{\sqrt{x}}{x^2+y^2}\,dxdy$$

dove

$$A = \left\{(x,y);\ x>0, 0<y<\sqrt{x}\ \right\}.$$

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 19.5.1997

1. Determinare tutte le funzioni che risolvono la seguente equazione differenziale:
$$y' - \frac{y}{x} = y^2 \sin x.$$

2. Studiare la forma differenziale
$$\omega(x,y) = \Big(\log|y| + \frac{y}{x^2+y^2}\Big)dx + \Big(\frac{x}{y} - \frac{x}{x^2+y^2}\Big)dy$$
e, se è esatta, calcolarne le primitive.

3. Dire se la funzione $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ ammette massimo e minimo assoluti nell'insieme
$$E = \{(x,y) \neq (0,0) :\ 0 \leq x \leq 2y - y^2\}$$
ed eventualmente calcolarli.

4. Calcolare l'integrale doppio
$$\int_E x\sqrt{1-x^2}\ dx\,dy$$
dove $E = \{(x,y) :\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ xy \leq 1\}$.

5. Sviluppare in serie di Fourier la funzione 2π-periodica definita in $[-\pi, \pi[$ da
$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi + x}{2} & -\pi \leq x < 0 \\ \dfrac{\pi - x}{2} & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$
e studiare la convergenza della serie ottenuta.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 26.2.1997

1. Determinare tutte le funzioni che risolvono il seguente problema:

$$\begin{cases} x(x+1)y' + y = x(x+1)^2 e^{-x^2} & \text{in }]-1,0[\\ \text{esiste finito } \ell = \lim_{x\to 0^-} y(x) \end{cases}$$

e calcolare il valore di ℓ.

2. Studiare la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \Big(-\frac{x}{|x|}\frac{1}{y^2-|x|}\Big)dx + \frac{2y}{y^2-|x|}dy$$

e, se è esatta, calcolarne le primitive.

3. Determinare (se esistono) estremi assoluti e relativi della funzione

$$f(x,y,z) = \frac{x-2y}{x^2+y^2+z^2+1}$$

nell'insieme $E = \{(x,y,z);\ -1 \le x+y+z \le 1\}$.

4. Calcolare l'integrale doppio

$$\int_E \sqrt{\frac{y}{x+3}}\, dx\, dy$$

dove $E = \{(x,y):\ y \ge 0;\ -2 \le x-y \le 1;\ xy \le 1\}$.

5. 5a) Sviluppare in serie di soli coseni la funzione f definita nell'intervallo $0 < x < 2$ come segue:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x \leq 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

6. 5b) Sia $E_\alpha = \{(x, y) : \ 0 < x < 1; \ 0 < y < x^\alpha\}$, per $\alpha > 0$. Data la successione di funzioni $f_n(x, y) = n^2 e^{xy}(nx + 1)^{-2}$, studiare il $\lim_n f_n$ e dire per quali valori di α vale l'uguaglianza

$$\lim_n \int_{E_\alpha} f_n(x, y)\, dxdy = \int_{E_\alpha} \lim_n f_n(x, y)\, dxdy$$

e per quali valori di α il limite è finito.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 17.12.1996

1. Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{1+x^2} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

2. Studiare la forma differenziale
$$\omega(x,y) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}dx + \Big(2y + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}\Big)dy$$
e, se è esatta, calcolarne le primitive.

3. Calcolare il massimo e il minimo della funzione $f(x,y,z) = e^{-z}(3x^2 + y^2)$
nell'insieme $E = \{(x,y,z);\ x^2 + 2y^2 - 2 \le z,\ z \ge 0\}$.

4. Calcolare l'area della superficie $\Sigma = \{(x,y,z):\ x^2+y^2 = z^2+4,\ -2 \le z \le 4\}$.

5. 5a) Studiare la convergenza semplice, assoluta, uniforme e totale della serie
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)}, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

6. 5b) Dire se la funzione $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{4-xy}}$ è sommabile nell'insieme
$$E = \{(x,y):\ x > 0,\ y > 0,\ xy < 4\}.$$

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 1.10.1996

1. Risolvere il seguente problema di Cauchy
$$\begin{cases} yy'' = 1 + (y')^2 \\ y(1) = -1, \quad y'(1) = 0. \end{cases}$$

2. Sviluppare in serie di soli seni la funzione $f(x) = x^2$, definita nell'intervallo $0 \leq x \leq \pi$.

3. Ricercare gli eventuali punti di massimo e minimo assoluto di
$$f(x, y, z) = x + y^2 z$$
nell'insieme $E = \{(x, y, z) : \; x^2 + y^2 \leq 2, \; z = x\}$.

4. Calcolare il seguente integrale
$$\int_V (x^2 + y^2)\, dxdydz,$$
dove
$$V = \{(x, y, z) \; ; \; z \geq 2\sqrt{x^2 + y^2}, \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

5. Data la forma differenziale
$$\omega(x, y) = \frac{(\alpha x + \beta y)dx + (\gamma x + \delta y)dy}{x^2 + y^2}$$
determinare i parametri α, $\beta\,\gamma\,\delta$ in modo che
   a) ω sia chiusa
   b) ω sia esatta; in questo caso calcolarne le primitive.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 10.9.1996

1. Risolvere il seguente problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'' = yy' \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$
Precisare se sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità e il dominio del prolungamento massimale della soluzione.

2. Calcolare la lunghezza della curva definita da $\varphi(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^{2t})$, per $t \in [0, 1]$.

3. Calcolare il massimo e il minimo della funzione
$$f(x, y) = \frac{3y - x}{x^2 + y^2 + 1}$$
nell' insieme $E = \{(x, y);\ -2 \leq y - x \leq 1\}$.

4. Calcolare il seguente integrale
$$\int_V \frac{|x|}{x^2 + y^2}\, dxdy,$$
dove
$$V = \{(x, y)\ ;\ -1 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq 2x^2\ \}.$$

5. Determinare una funzione $\alpha(x, y)$ in modo che la seguente forma differenziale sia esatta:
$$\omega(x, y) = \frac{x\, dx}{x^2 - y^2} + \frac{\alpha(x, y) dy}{x^2 - y^2}$$
e calcolarne le primitive.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 11.7.1996

1. Trovare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u' - \dfrac{x}{1-x^2}u + u^2 \arcsin x = 0 \\ u(0) = 2 \end{cases}$$

2. Sviluppare in serie di Fourier la funzione 2π-periodica definita in $[-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = x(\pi^2 - x^2)$$

3. Determinare massimi e minimi assoluti e relativi della funzione

$$f(x, y) = \exp\{x^2 + y^2 - x^3\}$$

nell'insieme $E = \{(x, y) : \ x^2 + 4y^2 \leq 4\}$.

4. Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int_E |x^2 + y^2 - 1|^3 \ dxdy,$$

ove $E = \{(x, y) : \ x \geq 0, \ 0 \leq y \leq \sqrt{3}, \ x^2 + y^2 \leq 4\}$.

5. Studiare la forma differenziale:

$$\omega(x, y) = \frac{x\,dx}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} + \frac{y\,dy}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$$

ed eventualmente calcolarne le primitive.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 18.6.1996

1. Trovare le soluzioni del sistema differenziale
$$\begin{cases} u' = 3u + v \\ v' = 2u + v + \sin x \end{cases}$$
verificanti le condizioni iniziali $u(0) = 1$, $v(0) = 1$.

2. Dopo aver studiato la convergenza della successione di funzioni
$$f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{n^2 x + 1}}, \qquad x \in [0, 1],$$
calcolare il $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$; si poteva prevedere il risultato?

3. Determinare massimi e minimi assoluti e relativi della funzione
$$f(x, y) = 2x|y| + y^2 - x^2$$
nell'insieme $E = \{(x, y) : \ x^2 + y^2 \le 1, \ x^2 + y^2 + 2x \le 1\}$.

4. Calcolare il seguente integrale doppio:
$$\int_E (1 + y\sqrt{x + 4})dxdy,$$
ove $E = \{(x, y) : \ y^2 - 3 \le x \le 2y^2, \ x \le 3 + y, \ x \le 3 - y\}$.

5. Studiare la forma differenziale:
$$\omega(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}\, dx - \frac{x}{|y|} \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}\, dy$$
ed eventualmente calcolarne le primitive.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 21.5.1996

1. Studiare il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} yy'' - (y')^2 = y^2 y' \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

2. Sviluppare in serie di Fourier la funzione
$$f(x) = |\sin x|$$

3. Determinare massimi e minimi relativi della funzione
$$f(x,y) = \log(x^2+y^2) + 2x + y$$
nell'insieme $E = \{(x,y) : \ 0 < x^2+y^2 \le 1\}$

4. Calcolare l'area della superficie
$$S = \{(x,y,z) : \ z = xy\}$$
interna al solido $\big\{(x,y,z) : \ x^2+y^2 \le 1\big\}$.

5. Dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ la forma differenziale è esatta:
$$\omega(x,y) = \frac{2x}{x^2-y}\,dx + \frac{\alpha}{x^2-y}\,dy;$$
per i valori trovati calcolare le primitive.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 13.10.1995

1. Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2 + \arcsin x}{n^3 x + 1}.$$

2. Determinare il massimo volume di un parallelepipedo avente superficie totale 36 cm^2.

3. Determinare l' integrale generale dell' equazione differenziale
$$y''' + 2y'' + y' = xe^{-x}.$$
Discutere il comportamento delle soluzioni per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$.

4. Calcolare il seguente integrale
$$\int_V \frac{x+y}{x^2+y^2}\, dxdy,$$
dove
$$V = \{(x, y)\ ;\ 0 \leq x \leq y^2 \leq 4\}$$

5. Studiare la forma differenziale
$$\omega(x, y) = \frac{xdx - 2ydy}{\sqrt{|x^2 - 2y^2 - 1|}}$$
e calcolare l' integrale $\int_\varphi \omega$ dove φ é il bordo del triangolo di vertici $(0, 0),\ (0, 2),\ (2, 2)$ percorso in verso antiorario.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 18.9.1995

1. Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n!}, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

2. Calcolare il volume del solido:
$$D = \{(x, y, z) : \ |x| + |y| + |z| \leq 2, \ y \geq z^2\}.$$
Suggerimento: utilizzare le proprietà di simmetria di D.

3. Determinare, se esistono, il massimo e il minimo della funzione
$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$
nella striscia $S = \{(x, y) : \ |y| \leq 1\}$.

4. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale
$$x^3 y''' + 6x^2 y'' + 11xy' + 5y = 0.$$

5. Studiare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$, la continuità e la differenziabilità della funzione:
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2 - xy)}{|x|^\alpha} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$
nei punti dell'asse $\{x = 0\}$.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 21.7.1995

1. Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale della seguente serie:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(1-\cos\frac{1}{n^2|x|^n}\Big) \qquad x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}.$$

2. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale
$$xy' = y^2 - y$$
e rispondere ai seguenti quesiti:
   a) Esistono soluzioni definite in tutto $\mathbf{R}$?
   b) Esistono soluzioni $y = y(x)$ tali che $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 1$?
   c) Esistono soluzioni $y = y(x)$ tali che $y(0) = 0$?

3. Stabilire se esistono valori del parametro $\alpha > 0$ tali che la funzione
$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} x^2\cos(x+y) & \text{per } x\le 0 \\ \dfrac{\sin(x^2y)}{x^\alpha} & \text{per } x>0 \end{cases}$$
sia continua e differenziabile nei punti dell'asse $x = 0$.

4. Calcolare il seguente integrale:
$$\int_T z\,dxdydz$$
dove $T = \{(x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$.

5. Cercare eventuali punti di massimo e di minimo della funzione $f(x,y) = xe^{-xy}$ nell'insieme:
$$E = \{(x,y) : x \leq y \leq 2x, \; x \geq 0\}.$$

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 28.6.1995

1. Determinare la serie di Fourier della funzione 4–periodica definita da
$$f(x) = |x| \qquad \forall x \in [-2, 2].$$
Precisare il tipo di convergenzea della serie trovata e di quella ottenuta da essa derivando termine a termine.

2. Calcolare, se esiste,
$$\int_E (2x-1)e^{-|y-x|}\,dxdy$$
dove $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ x \geq 0, \ y \geq x^2\}$.

3. Individuare, se esistono, i punti dell'insieme
$$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \ x + 2z - 2 = 0, \ x^2 + y^2 \leq z^2\}.$$
aventi distanza dall'origine minima o massima.

4. Risolvere il problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y' = \dfrac{x^2 + xy + y^2}{x^2} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$
Precisare l'intervallo di definizione del prolungamento massimale della soluzione.

5. Stabilire se esiste $\alpha \in \mathbf{R}$ tale che la forma differenziale
$$\omega(x, y) = \frac{x^2 + y}{x^2 y}dx + \frac{\alpha - x^2}{xy^2}dy$$
sia esatta; in tal caso determinare le primitive.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 5.6.1995

1. Studiare la continuità della funzione
$$f(x,y)=\begin{cases}(x^3+y^3)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{per } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{per } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$
Dire se la funzione ha derivate direzionali ed è differenziabile nell'origine.

2. Trovare l'integrale generale della seguente equazione differenziale
$$y'''+5y''+6y'=e^{-2x}$$
e rispondere ai seguenti quesiti:
   a) Esistono soluzioni $y=y(x)$ tali che $\lim_{x\to+\infty} y(x)=\alpha\in\mathbf{R}$?
   b) Esistono soluzioni $y=y(x)$ tali che $\lim_{x\to-\infty} y(x)=+\infty$?

3. Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale della seguente serie:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n}}{\sqrt{n}}\log\Big(1+\frac{x^2}{\sqrt{n}}\Big).$$

4. Dire se la funzione $f(x,y)=\dfrac{x^4}{x^2+y^2}$ ammette massimo e minimo assoluto nell'insieme:
$$E=\{(x,y)\neq(0,0):\ 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1\}$$
e in caso affermativo determinarli.

5. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_B \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

dove $B = \{(x,y) : \ (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 9.2.1995

1. Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{nx}}{n^{2x}} \qquad x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

2. Assegnata la funzione
$$f(x, y, z) = x^3 + y^2,$$
individuare i punti di minimo e di massimo nell' insieme
$$E = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \leq 4,\ x > y^2 - 1\}.$$

3. Studiare il seguente problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \sqrt[3]{y} - y \\ y(0) = k \end{cases}$$
e stabilire se esistono valori di k per cui
$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = 1 \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{x \to +\infty} y(x) = 0.$$

4. Calcolare al variare di $\beta > 0$ il seguente integrale
$$A = \int_V \frac{1}{(x^+ y^2)^\beta}\, dxdy,$$
dove
$$V = \{(x, y)\ ;\ x > 0,\ y < 0,\ x^2 + y^2 \leq 2, (x-1)^2 + y^2 \geq 1\ \}$$

5. Studiare la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{x}{(x^2+y^2-1)^2}dx + \frac{y}{(x^2+y^2-1)^2}dy$$

e calcolare l' integrale $\int_{\varphi} \omega$ dove φ è la circonferenza $\{(x,y);\ x^2+y^2 = 4\}$ percorsa in verso antiorario.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 15.12.1994

1. Determinare la serie di Fourier della funzione 4–periodica definita da
$$f(x) = |x| \qquad \forall x \in [-2, 2].$$

2. Assegnata la funzione
$$f(x, y, z) = x,$$
calcolarne il minimo ed il massimo sulla curva intersezione del piano $x + 2y = z$ con l'ellissoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$.

3. Determinare la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} xy'' + (x-1)y'^2 = y' \\ y(2) = -2 \qquad y'(2) = 4. \end{cases}$$

4. Calcolare il volume dell' insieme
$$V = \{(x, y, z);\ x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{6 - x^2 - y^2}\}$$
ed il seguente integrale
$$A = \int_V z\, dxdydz.$$
Precisare il significato meccanico del rapporto A/V.

5. Calcolare l' integrale
$$\int_\varphi (x^2 - xy)\, dx + (xy - y^2)\, dy$$
dove φ è la frontiera del triangolo di vertici $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(1, 1)$ percorsa in verso antiorario.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 19.9.1994

1. Studiare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$, la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^\alpha} \Big[(1 + \frac{1}{n})^\alpha - 1\Big].$$

2. Assegnata la funzione

$$f(x, y, z) = \frac{(x^2 + y^2 - 4) \log(x^2 + y^2 - 4)}{(x^2 + y^2 - 2)^2},$$

stabilire se esiste un prolungamento continuo di f definito su tutto $\mathbf{R}^3$.

Stabilire se esiste un prolungamento differenziabile di f definito su tutto $\mathbf{R}^3$.

Determinare, se esistono, il massimo e il minimo della funzione f nel suo dominio.

3. Determinare una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y - \sqrt[3]{y^2} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

precisando se essa è l'unica.

4. Calcolare il seguente integrale

$$\int_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$$

dove $D = \{(x,y,z);\ x^2+y^2+z^2 \le 1,\ z^2 \le x^2+y^2,\ z \ge 0\}$.

5. Calcolare l' integrale

$$\int_\varphi ydx + x^2dy$$

dove φ è descritta in figura.

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 27.5.1994

1. Studiare, al variare del parametro $\alpha > 0$, la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di funzioni
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} e^{n(x^2+x+\alpha)}.$$

2. Determinare il massimo e il minimo della funzione
$$f(x, y, z) = |y|(x^2 + y^2)(z - 1)$$
nell' insieme $E = \{(x, y, z);\ x^2 + y^2 \leq z \leq 4\}$.

3. Determinare, al variare di $\beta \in \mathbf{R}$, la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = y - \beta y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
precisando il dominio in cui essa è soluzione.

4. Calcolare, al variare di $\gamma \in \mathbf{R}$, il seguente integrale
$$\int_D \frac{1}{z^\gamma}\, dxdydz$$
dove $D = \{(x, y, z);\ x^2 + y^2 \leq z^2 + z,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 3,\ z > 0\}$.

5. Data la curva φ di equazioni parametriche
$$x(y) = \cos t, \qquad y(t) = \sin t, \qquad z(t) = t, \qquad t \in [0, 2\pi]$$
Calcolare i seguenti integrali
$$\int_\varphi (x^2 + y^2) ds, \qquad \int_\varphi x ds, \qquad \int_\varphi y ds, \qquad \int_\varphi z ds.$$

Facoltà di Ingegneria

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 9.2.1994

1. Studiare, al variare del parametro $\alpha > 0$, la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di funzioni
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n^\alpha} \log\left(1 + \frac{x^2}{n^\alpha}\right).$$

2. Dire se la funzione
$$f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)\log(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 + 1)^2$$
è prolungabile per continuità su $\mathbf{R}^2$ ed individuare, se esistono, i punti di massimo e di minimo relativo ed assoluto.

3. Risolvere l'equazione differenziale
$$(1 + x^2)(y' - 1) = 2xy.$$
Determinare le soluzioni tali che
   a) $\lim_{x\to+\infty} y'(x) \in \mathbf{R}$;
   b) $\lim_{x\to+\infty} y'(x) = +\infty$;
   c) $\lim_{x\to+\infty} y'(x) = -\infty$.

4. Calcolare l'ntegrale doppio

$$\int_E \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy$$

dove $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2+y^2 \le 4\ \}$.

5. Studiare la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{2x}{y+x^2}\, dx + \frac{1}{y+x^2}\, dy.$$

Calcolare $\int_\gamma \omega$, dove $\gamma(t) = (\cos t, \sin t + 2)$ per $t \in [0, 2\pi]$.

Prova scritta di Analisi Matematica II

Lecce, 10.1.1994

1. Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni definite su tutto $\mathbf{R}$ da
$$f_n(x) = \left(\frac{1}{n} + \cos^2 x\right)^n$$
e calcolare
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(x)\,dx.$$
Rispondere alle stesse domande nel caso $f_n(x) = \left(\frac{1}{n} + \cos^2 x\right)^{n^2}$.

2. Determinare i punti dell'insieme
$$E = \left\{(x,y,z);\ x^2 + 4y^2 - z^2 \le 1,\ x + 2y + 2z = 0\ \right\}$$
aventi il valore massimo e il valore minimo di z.

3. Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = 3y - y^2 \\ y(0) = k \in \mathbf{R}\ , \end{cases}$$
precisando
   a) se sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale;
   b) se sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza globale;
   c) per quali valori di k si ottengono soluzioni definite su tutto $\mathbf{R}$.

4. Calcolare l'area della porzione di superficie sferica

$$\Sigma = \{\ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ (x-1)^2 + y^2 \geq 1\ \}.$$

5. Studiare la continuità della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}\, e^{-\dfrac{x^2}{y^4}} & \text{per } y \neq 0 \\ 0 & \text{per } y = 0. \end{cases}$$

Precisare se la funzione f ha le derivate direzionali e se è differenziabile nei punti del tipo $(x, 0)$. Dire se $f \in C^1(\mathbf{R}^2)$.

Prova scritta di Analisi Matematica II

Facoltà di Ingegneria Lecce, 21.5.1993

1. Risolvere il problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y'' + \dfrac{y'}{x} = -xy'^2 \\ y(1) = -1, \ y'(1) = 1. \end{cases}$$

2. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme della seguente successione:
$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{1+n^2x^2} \qquad (x \in \mathbf{R}),$$
e calcolare $\lim_h \int_{\mathbf{R}} f_n(x)\,dx$.

3. Calcolare l'integrale doppio:
$$\int_E \sqrt{1-x^2-y^2}\ dxdy,$$
ove
$$E = \Big\{(x,y): \ (x^2+y^2)^2 \le x^2-y^2, \ x \ge 0 \ \Big\}.$$

4. Dire se la funzione
$$f(x,y) = e^{x+y}(x^2-y^2+xy)$$
ammette massimo e minimo assoluti nell'insieme
$$E = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 3x \le y \le x \le 0, \ \big\},$$
e in caso affermativo calcolarli.

5. Studiare la continuità, la differenziabilità, la continuità delle derivate prime della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+2y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Prova scritta di Analisi Matematica II

Facoltà di Ingegneria – Lecce, 4.2.1993

1. Studiare il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''' - 3y'' + 2y' = xe^x \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$$

2. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 x^n} \sin \frac{1}{n \log x}.$$

3. Calcolare l'integrale doppio

$$\int_E \frac{y\,dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

ove $E = \left\{(x,y) : -\dfrac{1+y}{2} \le x \le 2y+1;\ y \le \sqrt{1+x}\right\}$.

4. Trovare (se esistono) massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 5y^2$$

nell'insieme $E = \{(x,y) : 4 \ge y \ge |x| + 1\}$.

5. Studiare la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{\sqrt{y/x}\,dx + \sqrt{x/y}\,dy}{1+xy},$$

e, nel caso che sia esatta, calcolarne le primitive.

Prova scritta di Analisi Matematica II

Facoltà Ingegneria – Lecce, 15.12.1992

1. Determinare massimo e minimo della funzione
$$f(x,y) = x^2 - 6xy + y^2$$
nell'insieme
$$E = \{(x,y); |x| \le |y| + 1,\ \varrho \le 9\ \}\ .$$

2. Risolvere il P.d.C.
$$\begin{cases} y'' = x(y')^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1\ . \end{cases}$$

3. Calcolare
$$\int_E x\, dxdy$$
sull'insieme
$$E = \{\ (x,y) \in \mathbf{R}^2;\ (x-1)^2 + y^2 \le 2,\ y \le (x-1)^2\}.$$

4. Studiare la convergenza puntuale, assoluta e uniforme della serie di funzioni
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x+1)^n}{n + n^{2x}}.$$

5. Studiare la continuità della funzione
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{(\varrho)e^{1/y^2}} & \text{per } y \ne 0 \\ 0 & \text{per } y = 0. \end{cases}$$
Precisare se la funzione f è differenziabile nell'origine.