L'integrale di un campo lungo una curva (detto talvolta integrale curvilineo di 2ª specie per distinguerlo dagli integrali di funzioni scalari lungo curve, detti di 1ª specie) se tale campo rappresenta un campo di forze viene detto <u>lavoro</u> del campo lungo la curva data.

Si osservi come se si sceglie un cammino γ che sia sempre ortogonale ad un campo il lavoro di tale campo lungo tale cammino risulta nullo: (poiché $F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) = 0 \quad \forall t$)

Ex Dato il campo $F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$
vedere se è conservativo
ed in tal caso calcolarne una primitiva.
Calcolare il lavoro lungo l'ellisse data dall'equazione $3x^2 - xy + 10y^2 = 1$
percorsa in senso antiorario.
Calcolare il lavoro lungo qualunque

arco di circonferenza centrato in $(0,0)$.

988 l'ellisse data gira intorno all'origine

Cerchiamo f t.c. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

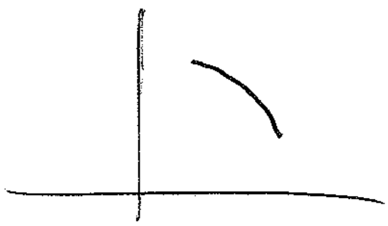
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

sono tutte primitive. Il campo è conservativo anche se il dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ non è semplicemente connesso.

Di conseguenza il lavoro compiuto lungo il cammino dato dall'ellisse sarà nullo (per ex. parametrizzare l'ellisse).

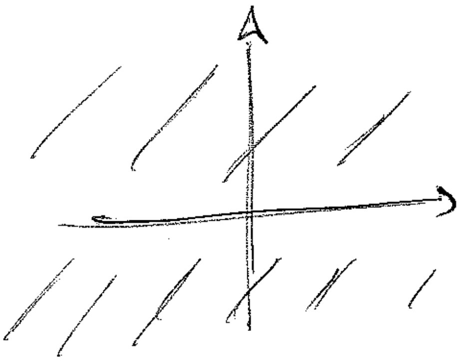
Preso un arco di circonferenza qualsiasi il campo è ortogonale al cammino per cui l'integrale (e il lavoro svolto) è nullo!



Calcolare quali dei seguenti campi ammettono primitive (ove sono definiti) ed eventualmente calcolarle

- $F(x,y,z) = \left(y^\alpha z^\alpha , z^\alpha x^\alpha , x^\alpha y^\alpha \right), \quad \alpha > 0$
- $F(x,y) = \left(1+y , 1+x \right)$
- $F(x,y) = \left(2xy + y^2 + 2xy^2 , x^2 + 2xy + 2x^2 y \right)$
- $F(x,y) = \left(e^x \cos y , -e^x \operatorname{sen} y \right)$
- $F(x,y) = \left(\dfrac{e^x}{y} , -\dfrac{e^x}{y^2} \right)$

Vediamo l'ultimo. È definito per $y \neq 0$ e quindi nei due semipiani (che sono semplicemente connessi)



$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} = P_1$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\} = P_2$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^x}{y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{e^x}{y^2}\right)$$

$f(x,y) + c_1$ in P_1

$f(x,y) + c_2$ in P_2

con $f(x,y) = \dfrac{e^x}{y}$

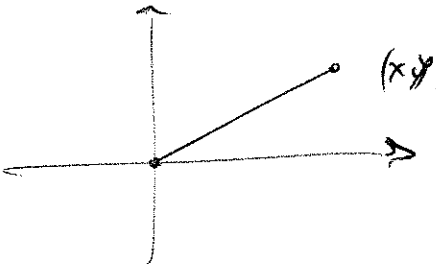
sono tutte le primitive

(Provare con l'altro metodo)

$F(x,y) = \left(e^x \cos y , -e^x \operatorname{sen} y \right)$ è definito in tutto $\mathbb{R}^2$

che è stellato

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(e^x \cos y\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-e^x \operatorname{sen} y\right) \quad \text{ok}$$



$$\gamma(t) = (0,0) + t(x,y) \qquad t \in [0,1]$$

$$\dot\gamma(t) = (x,y)$$

$$\int_0^1 \left(x e^{tx} \cos(ty) - y e^{tx} \operatorname{sen}(ty) \right) dt =$$

$$= e^{tx} \cos(ty) \Big|_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 y e^{tx} \operatorname{sen} ty \, dt$$

$$- \int_0^1 y e^{tx} \operatorname{sen} ty \, dt = e^x \cos y - 1$$

Se considero la curva $\gamma(t) = (x_0, y_0) + t\left((x,y) - (x_0,y_0)\right)$

$$= (x_0,y_0) + t\,(x - x_0, y - y_0)$$

con $t \in [0,1]$

$$\gamma'(t) = (x-x_0,\ y-y_0)$$

$$F(\gamma(t)) = \Big(e^{x_0 + t(x-x_0)} \cos\big(y_0 + t(y-y_0)\big),$$
$$- e^{x_0 + t(x-x_0)} \operatorname{sen}\big(y_0 + t(y-y_0)\big) \Big)$$

$$\int_0^1 (x-x_0) e^{x_0 + t(x_0-x_0)} \cos\big(y_0 + t(y-y_0)\big)\, dt +$$

$$- \int_0^1 (y-y_0)\, e^{x_0 + t(x-x_0)} \operatorname{sen}\big(y_0 + t(y-y_0)\big)\, dt$$

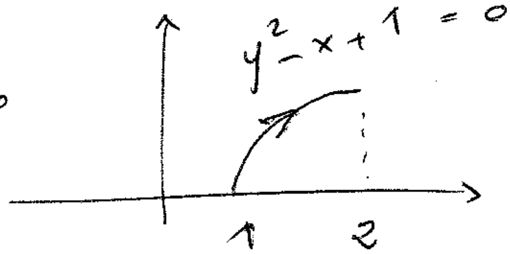
$$= e^{x_0 + t(x-x_0)} \cos\big(y_0 + t(y-y_0)\big)\Big|_0^1 +$$

$$+ \int_0^1 e^{x_0 + t(x-x_0)} (y-y_0) \operatorname{sen}\big(y_0 + t(y-y_0)\big)\, dt - \int_0^1 \text{idem} =$$

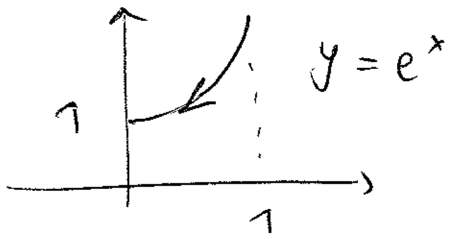
$$= e^{x} \cos y - e^{x_0} \cos y_0$$

Trovare la primitive dell'integrando.

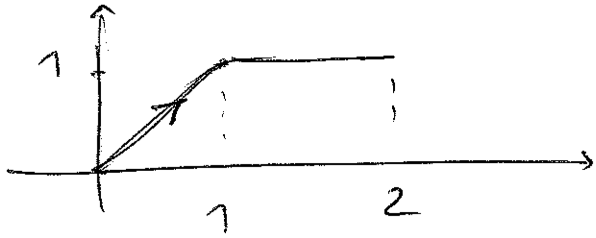
Integrare $F(x,y) = (y, \log x)$ lungo



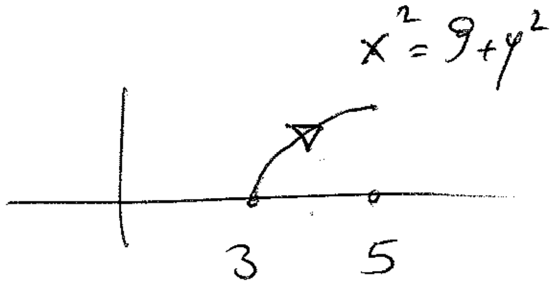
$F(x,y) = \left(xy, -\frac{1}{1+y}\right)$ lungo



$F(x,y) = (e^y, y \operatorname{sen} x)$ lungo



$F(x,y) = \left(-\frac{y}{x}, 1\right)$ lungo

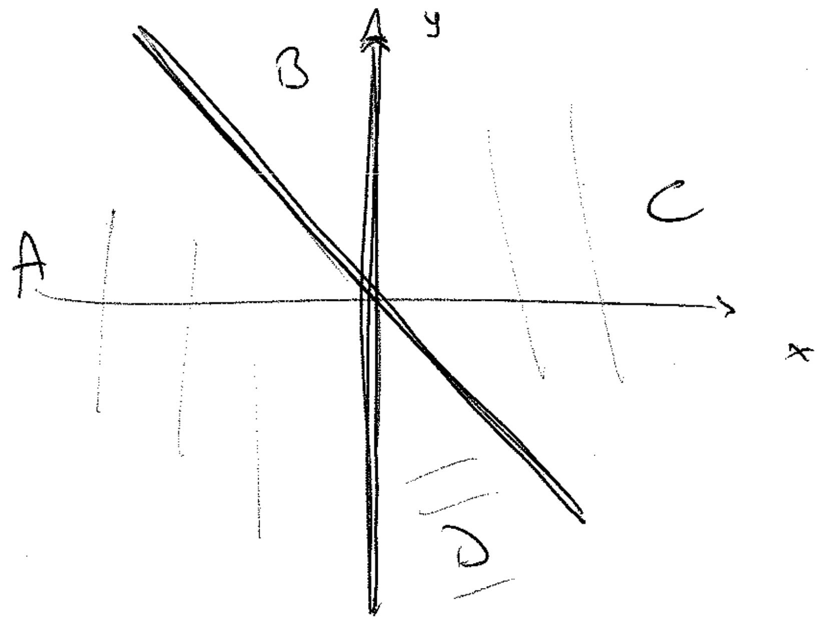


Ex Dato il campo

$$F(x,y) = \left(\frac{2x+y}{(x^2+xy)^{2/3}} , \frac{x}{(x^2+xy)^{2/3}} + 2y \right)$$

~~dire~~ trovarne il dominio e, se esiste, una primitiva (o tutte le primitive)

$x^2+xy = 0$ per $x=0$ o per $x=-y$



Si osservi come F sia definito in

$\Omega = A \cup B \cup C \cup D$; il dominio Ω

non è connesso per archi, ma è semplicemente connesso ! ~~(Ho solo A, B, C, D~~

W.19.1

Gli aperti A, B, C, D sono però anche connessi per archi.

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \quad (\text{verificarlo !})$$

di conseguenza F è conservativo.

$$\exists\, f \text{ t.c. } \quad \frac{\partial f}{\partial x} = F_1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = F_2$$

Integrando si ottiene (rispetto a x)

$$f(x,y) = (x^2 + xy)^{1/3} + g(y) \quad ;$$

derivando rispetto a y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{(x^2+xy)^{2/3}} + g'(y)$$

da cui $g(y) = y^2 + c$. Una primitiva generica sarà allora

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+xy)^{1/3} + y^2 + c_A & (x,y) \in A \\ (x^2+xy)^{1/3} + y^2 + c_B & (x,y) \in B \\ (x^2+xy)^{1/3} + y^2 + c_C & (x,y) \in C \\ (x^2+xy)^{1/3} + y^2 + c_D & (x,y) \in D \end{cases}$$

con c_A, c_B, c_C, c_D costanti (a priori differenti!!)