Campi, teorema della divergenza, teorema di Stokes.

Una funzione F di n variabili reali e a valori in $\mathbb{R}^n$ è detta campo di vettori.

Def Dato un campo $F : A \to \mathbb{R}^n$, A aperto di $\mathbb{R}^n$, F continuo e data $\gamma : [a,b] \to A$ curva regolare (o regolare a tratti) si definisce integrale di F lungo la curva la quantità

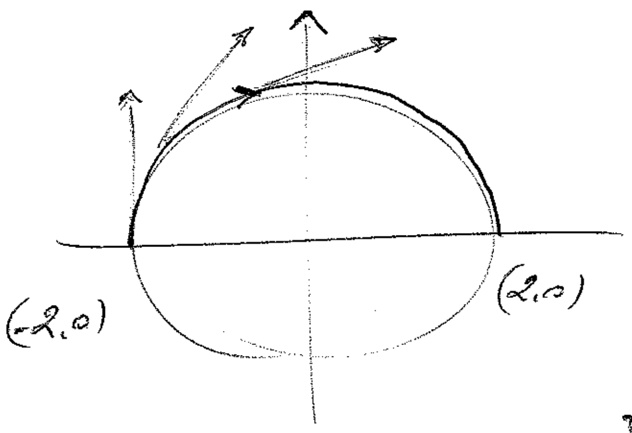
$$\int_\gamma F(x)dx := \int_a^b \sum_{i=1}^n F_i(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}_i(t)\, dt$$
$$= \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt$$

$x = (x_1, \dots x_n)$
$dx = dx_1 \dots dx_n$

$$F(x) . dx = F_1(x)\, dx_1 + \dots + F_n(x)\, dx_n$$

Esempio: Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \left(y\, dx + (x^2 - y^2)\, dy \right)$ dove γ è l'arco di circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ che va dal punto $(2,0)$ al punto $(0,2)$ in senso orario

$\omega = CDS . 1$



$$\gamma : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto 2(-\cos t, \operatorname{sen} t)$$

$$\gamma'(t) = (2 \operatorname{sen} t, 2 \cos t)$$

$$F(x,y) = (y, x^2 - y^2)$$

$$\int_\gamma \left(y\,dx + (x^2 - y^2)\,dy \right) =$$

$$= \int_0^\pi [(2 \operatorname{sen} t)^2 + (4 \cos^2 t - 4 \operatorname{sen}^2 t) 2 \cos t]\, dt$$

$$= 4 \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 t\, dt + 8 \int_0^\pi \cos^3 t - 8 \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 t \cos t\, dt$$

$$= 4 \cdot \frac{\pi}{2} + 8 \int_0^\pi (\cos t - 2 \operatorname{sen}^2 t \cos t)\, dt =$$

$$= 2\pi + 8(-2)\frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 t \Big|_0^\pi =$$

$$= 2\pi - \frac{16}{3} \cdot 0 = 2\pi$$

Che succede se γ_1 e γ_2 sono due curve equivalenti?

Proposizione Date due curve equivalenti

$\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$

(cioè due curve con lo stesso sostegno)

risulta

$$\int_{\gamma_1} F(x)\cdot dx = \int_{\gamma_2} F(x)\cdot dx$$

se γ_1 e γ_2 hanno lo stesso verso,

$$\int_{\gamma_1} F(x)\cdot dx = -\int_{\gamma_2} F(x)\cdot dx$$

se hanno verso opposto.

dim supponiamo γ_1 e γ_2 abbiano lo stesso verso. Esiste un cambiamento di variabile C^1

$\alpha : [a,b] \to [c,d]$ (un diffeomorfismo)

con $\alpha'(t) > 0$ e $\gamma_1(t) = \gamma_2(\alpha(t))$.

Si ha allora

$$\int_a^b F(\gamma_1(t)) \cdot \dot{\gamma}_1(t)\, dt = \int_{\gamma_1} F(x) \cdot dx$$

$$= \int_a^b F(\gamma_2(\alpha(t))) \cdot (\gamma_2(\alpha(t)))'\, dt$$

$$= \int_a^b F(\gamma_2(\alpha(t))) \cdot \dot{\gamma}_2(\alpha(t))\, \alpha'(t)\, dt$$

$\alpha(t) = s$

$$= \int_c^d F(\gamma_2(s))\, \dot{\gamma}_2(s)\, ds =$$

$$= \int_{\gamma_2} F(x) \cdot dx$$

Se $\alpha' < 0$ si ottiene il secondo punto. //

~~Ora ci poniamo la seguente domanda~~:

Si osservi la seguente cosa: se esiste una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe $C^1(A)$ tale che

$$F_j(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \qquad \text{allora}$$

è possibile valutare semplicemente l'integrale di F lungo un cammino. Infatti se

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow A \quad \text{regolare}.$$

$$\int_\gamma F(x) \cdot dx = \sum_j \int_a^b F_j(\gamma(t))\, \dot\gamma_j(t)\, dt =$$

$$= \int_a^b \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(t))\, \dot\gamma_j(t)\, dt =$$

$$= \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)\, dt =$$

$$= \int_a^b \left(\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right) dt = f(x_2) - f(x_1)$$

dove $\quad x_1 = \gamma(a)$

$\qquad\quad x_2 = \gamma(b).$

Def Un campo $F : A \to \mathbb{R}^n$ si dice conservativo se esiste $f : A \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $F = \nabla f$ (cioè se F è un gradiente). In tal caso f si dice primitiva o potenziale.

Ci poniamo la domanda seguente: quand'è che un campo è un gradiente?

Teorema Sia A un aperto connesso per archi, e sia $F : A \to \mathbb{R}^n$ un campo continuo. Allora ~~le tre cose~~ sono equivalenti:

(a) per ogni coppia di curve

$\gamma_1 : [a,b] \to A$, $\gamma_2 : [c,d] \to A$

regolari a tratti e con $\gamma_1(a) = \gamma_2(c) = \bar{x}$

$\gamma_1(b) = \gamma_2(d) = \bar{y}$

si ha

$$\int_{\gamma_1} F(x) \cdot dx = \int_{\gamma_2} F(x) \cdot dx$$

(b) per ogni curva γ regolare a tratti chiuse e con sostegno in A risulti

$$\int_\gamma F(x) \cdot dx = 0$$

(c) F è conservativo (è un gradiente).

~~dim: (a) ⇒ (c)~~

Def Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice connesso per archi se $\forall\, x, y \in A$ $\exists$ una curva regolare a tratti ~~continua~~ $\gamma : [a,b] \to A$ t.c. $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$.

<u>dim</u> (a) $\Rightarrow$ (c) Scegliamo ~~due~~ un punto $x_0 \in A$

Poiché A è connesso per archi per ogni altro punto $x \in A$ si ha che $\exists\ \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ regolare a tratti tale che

$$\gamma(a) = x_0, \qquad \gamma(b) = x.$$

Definiamo $\forall\, x \in A$

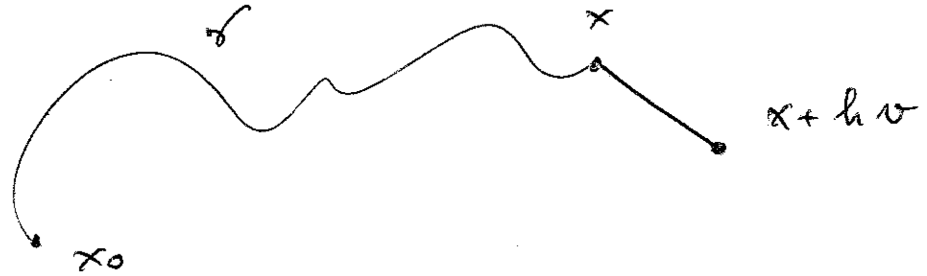
$$f(x) = \int_\gamma F(y) \cdot dy \qquad \text{dove } \gamma \text{ unisce } x_0 \text{ e } x$$

Per ipotesi f non dipende dal cammino scelto.

Si fissi un vettore v di modulo 1 e si consideri δ t.c. $B_\delta(x) \subseteq A$.

Allora per $h \in \mathbb{R}^*$, $|h| < \delta$, il segmento $[x, x+hv] \subseteq A$. Si consideri la curva $\gamma : [a, b+1] \to A$ così definita

$$\gamma(t) = \begin{cases} \sigma(t) & \text{se } t \in [a,b] \\ x + (t-b)\,h\,v & \text{se } t \in [b, b+1] \end{cases}$$



γ è regolare a tratti e quindi

$$f(x+hv) = \int_\gamma F(y)\cdot dy$$

Di conseguenza

$$\frac{1}{h}\Big(f(x+hv)-f(x)\Big) =$$

$$= \frac{1}{h}\left[\int_{\gamma} F(y)\cdot dy - \int_{\gamma} F(y)\cdot dy\right]$$

$$= \frac{1}{h}\int_{b}^{b+1}\sum_{j=1}^{n} F_j\,(x+(t-b)h\,v)\,h\,v_j\,dt$$

$s=(t-b)h$

$$= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{h}\int_{0}^{h} F_j\,(x+s\,v)\,v_j\,ds$$

La funzione $g_j : (-\delta,\delta)\to\mathbb{R}$, $g_j(s)=F_j(x+sv)v_j$ è continua per cui dal teorema fondamentale del calcolo integrale applicato ad ogni singola g_j e passando al limite per $h\to 0$ si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \sum_{j=1}^{n} F_j(x)\,v_j = \cancel{}\,(F(x),v)$$

ω.5

Scegliendo $v = e_j$ in particolare si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = F_j(x)$$

e inoltre si deduce che f è C^1 e che

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \left(\nabla f(x), v\right).$$

(c) => (b) È immediato perché se F è conservativo e γ è una curva regolare a tratti e chiusa si ha che ($\gamma : [a,b] \to A$)

$$\int_\gamma F(x) \cdot dx = \cancel{\gamma(b)}\ f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

ma $\gamma(a) = \gamma(b)$ per cui la tesi.

(b) => (a) Siano $\gamma_1 : [a, b] \to A$ e $\gamma_2 : [c, d] \to A$ regolari a tratti ed equivalenti e con la stessa orientazione.

Costruiamo la curva

$\cancel{\gamma(t)}$ $\tilde{\gamma}_2 : [b, b+d] \to A$

di equazione parametrica

$$\tilde{\gamma}_2(t) := \gamma_2\big(d - (d-c)(t-b)\big)$$

che ha lo stesso sostegno di γ_2, ma opposta orientazione. Allora la curva

$$\gamma(t) := \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } t \in [a,b] \\ \tilde{\gamma}_2(t) & \text{se } t \in [b, b+1] \end{cases}$$

è regolare a tratti e chiusa. Di conseguenza

$$0 = \int_\gamma F(x)\cdot dx = \int_{\gamma_1 \cup \tilde{\gamma}_2} F(x)\cdot dx = \int_{\gamma_1} F + \int_{\tilde{\gamma}_2} F =$$

$$= \int_{\gamma_1} F - \int_{\gamma_2} F.$$

//

Si supponga ora che le componenti del campo F siano di classe C^1. Se il campo è anche conservativo si ha che $\exists\, f : A \to \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = F_i \qquad (f \text{ sarà } C^2)$$

Derivando rispetto a x_j si ottiene

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}$$

Considerando $F_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$ e derivando risp a x_i

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

Poiché f è C^2 si conclude che

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) \qquad (*)$$

Se un campo F di classe C^1 soddisfa $(*)$ è detto (irrotazionale) chiuso.

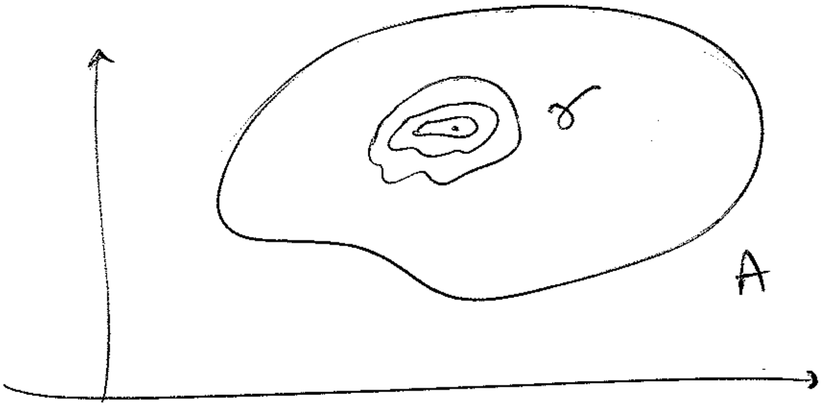
Def Diremo che un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso se per ogni curva $\gamma : [a,b] \to A$ continua, semplice, chiusa esiste una famiglia di curve continue e chiuse $\gamma_s : [a,b] \to A$ $s \in [0,1]$

in modo tale che

$$\Gamma(t,s) := \gamma_s(t) \qquad \text{è semplice } \forall s \in [0,1)$$

$\Gamma(t,0) = \gamma(t)$ $\qquad$ Γ continua nelle due variabili!

$\Gamma(t,1) = x_0 \;\; \forall t$ $\qquad$ con $x_0 \in A$.



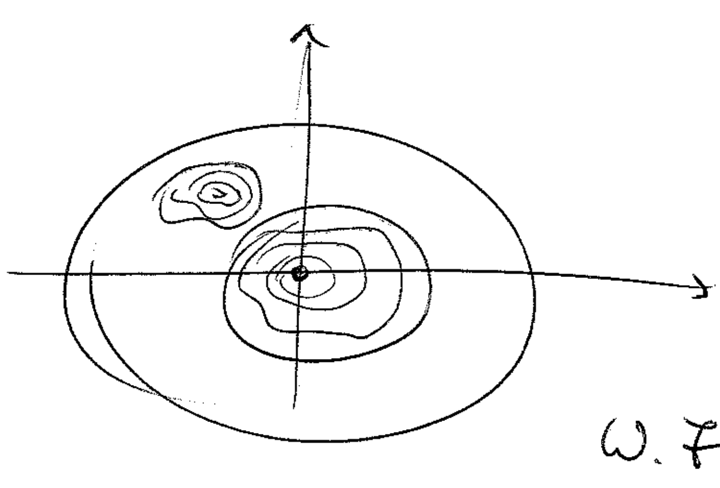
Esempio:

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$

è semplicemente connesso

$A = \{x,y \in \mathbb{R}^2 \mid 0<x^2+y^2<1\}$

non è sempl. connesso



Esempio in $\mathbb{R}^3$

W. 7

Teorema Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$ semplicemente connesso e sia $F : A \to \mathbb{R}^n$ un campo C^1 chiuso.

Allora F è conservativo.

(Senza dim)

Il viceversa abbiamo già visto che è vero in generale su un qualunque aperto.

L'ipotesi che A sia semplicemente connesso è fondamentale come mostrano i seguenti esempi.

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ non è semplicemente connesso

$\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ è semplicemente connesso

$\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ non è semplicemente connesso

Si consideri $n = 2$ e il campo

$$F(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2} , \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

$$F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

Si ha che $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{y^2-x^2}{x^2+y^2}$

Se si considera la curva

$\gamma : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

si ha che

$$\int_\gamma (F_1\, dx + F_2\, dy) = \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)\, dt = 2\pi$$

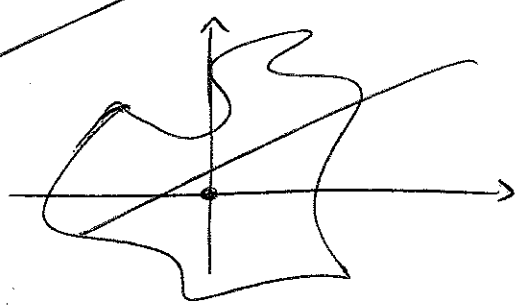
Per quanto visto precedentemente F non è conservativo.

Anche il campo $F(x,y,z) = \left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$

definito su $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=y=0\}$

non è conservativo (e il suo dominio non è semplicemente connesso) anche se è chiuso.

~~Si osservi come, tornando a~~ $\cancel{n = 2}$ ~~, qualunque sia~~ $\cancel{\gamma}$ ~~continua semplice e chiusa~~



DOPO

~~t.c.~~

~~l'aperto di cui il sostegno di γ è bordo contenga l'origine si ha~~

$$\cancel{\int_\gamma F_1\,dx + F_2\,dy = 2\pi}$$

~~dim nel foglio~~ W.8 bis

Ex Dire se il campo $F(x,y) = \left(\dfrac{2xy}{(1+x^2)^2}, -\dfrac{1}{1+x^2}\right)$

è conservativo. In tal caso

trovarne una primitiva.

F è definito su tutto $\mathbb{R}^2$, è C^1.

Vediamo se è chiuso.

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

è chiuso

Allora esiste f t.c. $\nabla f = F$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy}{(1+x^2)^2}$$

Come trovare f?

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

Se integro (ad esempio la seconda che è più semplice) ho che

$$f(x,y) = -\frac{1}{1+x^2}\, y + g(x)$$

e derivando rispetto a x ho

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy}{(1+x^2)^2} + g'(x)$$

Eguagliando a F_1 ho che $g'(x) = 0$ da cui

$$f(x,y) = -\frac{y}{1+x^2} + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Oppure: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ considero un cammino, ad esempio il segmento, che unisce l'origine (o (x_0,y_0)) a (x,y) e integro

$$f(x,y) = \int_\gamma F_1\,dx + F_2\,dy = \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\,dt$$

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$$

$$\gamma(t) = \cancel{t\big((x,y)-(x_0,y_0)\big)}\; t(x,y) + (1-t)(x_0,y_0)$$

W.9

$$\int_0^1 \left(\frac{2t^2 x y}{(1+t^2x^2)^2}\, x - \frac{y}{(1+t^2x^2)} \right) dt$$

Scelgo $x_0 = y_0 = 0$

$\gamma(t) = (tx, ty)$

$$= \int_0^1 \frac{2t^2x^2y - y\,(1+t^2x^2)}{(1+t^2x^2)^2}\, dt$$

No (Noioso)

$$= \int_0^1 y\, \frac{(x^2t^2 - 1)}{(x^2t^2+1)^2}\, dt = \int_0^1 y \left[\frac{1}{x^2t^2+1} - \frac{2}{(x^2t^2+1)^2} \right] dt$$

Noioso!

Ex idem con $F(x,y,z) = (2y+1, 2x-1, 2z)$

F è chiuso $\quad \exists f$ t.c.

$$1 \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2y+1$$

$$2 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x-1$$

$$3 \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z$$

per cui

$$3 \Rightarrow \quad f(x,y,z) = z^2 + g_3(x,y)$$

$$2 \Rightarrow \quad f(x,y,z) = (2x-1)\,y + g_2(x,z)$$

$$1 \Rightarrow \quad f(x,y,z) = (2y+1)\,x + g_1(y,z)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g_3}{\partial x} = 2y+1 \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} + 2y = 2x-1 \\ \dfrac{\partial g_3}{\partial y} = 2x-1 \end{cases} \qquad \frac{\partial g_2}{\partial x} = 2x-2y-1$$

$$g_3(x,y) = 2xy + x + h_1(y) \qquad h_1(y) + x = h_2(x) - y$$

$$g_3(x,y) = 2xy - y + h_2(x) \qquad h_1(y) = h_2(x) - x - y$$

$$\Rightarrow \quad h_2(x) - x = 0 \;, \quad h_1(y) = -y$$

W. 10

per cui $\quad g_3(x,y) = 2xy + x - y$

$$f(x,y,z) = z^2 + 2xy + x - y + c$$

Oppure fisso (x_0, y_0, z_0) ad esempio $(0,0,0)$

$$\gamma(t) = t\,(x,y,z)$$

$$f(x,y,z) = \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)\, dt =$$

$$= \int_0^1 \left[(2ty+1)x + (2tx-1)y + 2tz^2 \right] dt =$$

$$4txy + x + \cancel{2txy} - y + 2tz^2$$

$$= \left(2t^2xy + tx - ty + t^2 z^2 \right) \Big|_0^1 =$$

$$= 2xy + x - y + z^2$$

Se cambio punto
cambia la primitiva

~~Dato~~ Dato $F(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2} , \frac{x}{x^2+y^2} \right)$ Ex

dire se esiste un dominio $A \subseteq \mathbb{R}^2$ t.c.

$F : A \to \mathbb{R}^2$ risulti conservativo.

In tal caso trovare il più grande dominio nel quale è possibile definire F in modo che risulti conservativo.

Il fatto che F non sia conservativo nel suo dominio massimale $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ deriva dal fatto che l'integrale su una curva chiusa (una circonferenza centrata nell'origine) non ha integrale 0.

Se si considera $\mathbb{R}^2 \setminus S =: A$ dove S è una qualunque semiretta uscente dall'origine si ha che A è semplicemente connesso; poiché F è chiuso $F : A \to \mathbb{R}^2$ è conservativo. Vediamo di calcolarne una primitiva.

Chiedendo che $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

e che $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

integrando la seconda

$$\cancel{f(x,y)=} \quad \frac{x}{x^2+y^2} = x \, \frac{1}{x^2\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{x} \, \frac{1}{\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)}$$

$$f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + g(x)$$

Derivando rispetto a x

$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) + g'(x) =$$

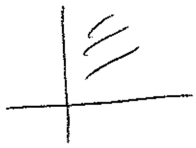
$$= -\frac{y}{x^2+y^2} + g'(x)$$

$\Rightarrow \quad g'(x) = 0 \quad$ per cui

$$f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

sono tutte le primitive (definite però per $x \neq 0$!)

Per cui fintanto che $x > 0$ e $y > 0$

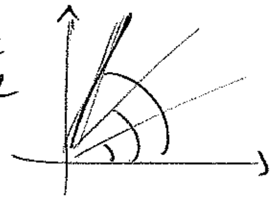


$f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ è una primitiva

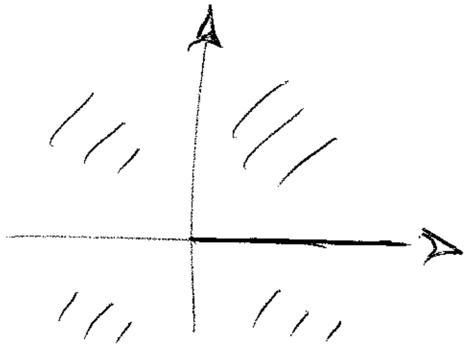
(prendendo $c = 0$)

$\frac{y}{x}$ è costante sulle semirette uscenti dall'origine

cioè fissato un angolo θ tra 0 e $\pi/2$



su tutte le semirette individuate dall'angolo.



Se in ogni settore

considero

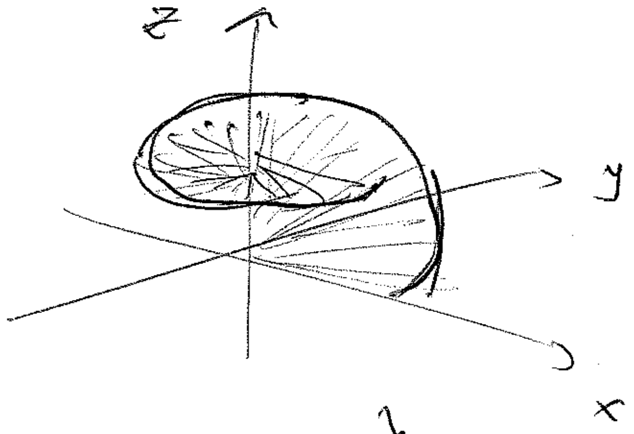
$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + c_i \qquad i = 1,2,3,4$

e raccordo in modo da rendere C^1 la funzione ottenuta si ha che

$$f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & x > 0,\ y > 0 \\ \pi/2 & x = 0,\ y > 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi & x < 0 \\ \frac{3}{2}\pi & x = 0,\ y < 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2\pi & x > 0,\ y < 0 \end{cases}$$

Si osservi come facendo un cammino circolare attorno all'origine si salga di 2π.

$f(x,y) + c$ al variare di $c \in \mathbb{R}$



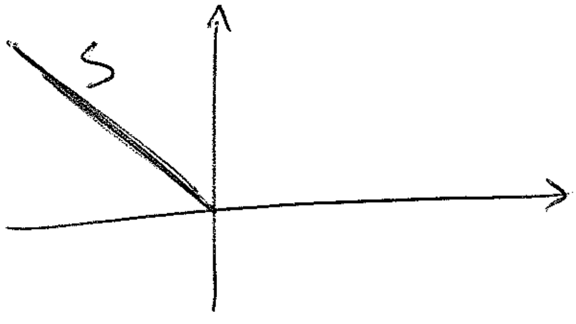
definite in $\mathbb{R}^2 \setminus S$

dove $S = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 , y = 0 \}$

(analogamente si potrebbe togliere un'altra semiretta e trovare un'analoga primitiva)

è una primitiva del campo F che risulta conservativo in $\mathbb{R}^2 \setminus S$.

Se si considera $\mathbb{R}^2 \setminus S$ dove S è una qualunque semiretta uscente dall'origine



si può ripetere il ragionamento.