Teorema della divergenza (o di Gauss - Green)

Dato un campo $F : A \to \mathbb{R}^n$ (A aperto di $\mathbb{R}^n$) ~~chiameremo~~ di classe $C^1(A)$ chiameremo divergenza di F in $x \in A$ l'operatore che associa ad F la funzione

$$\operatorname{div} F(x) := \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_j}(x)$$

Un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e limitato si dirà regolare di classe C^1 se esiste una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$A = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < 0 \}$$

$$\partial A = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0 \}$$

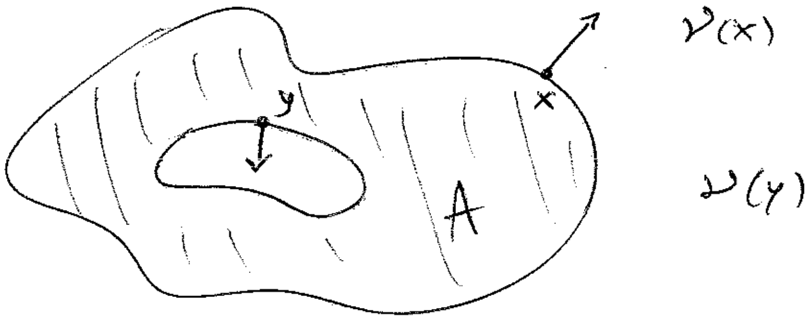
$$|\nabla f(x)| \neq 0 \quad \forall x \in \partial A$$

(Se A è regolare e $n = 3$, ∂A è una superficie regolare, se $n = 2$ ∂A è una curva regolare).

Il versore $\nu(x) := \dfrac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}$ $x \in \partial A$

è il vettore di modulo 1 normale a ∂A nel punto x e che punta verso l'esterno di A.

Esempi:



$x, y \in \partial A$

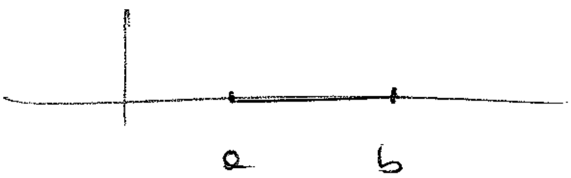
Teorema ($n \geq 2$) Sia $F : B \to \mathbb{R}^n$ campo di classe $C^1(B)$, B aperto di $\mathbb{R}^n$. Sia A un aperto regolare e limitato, $\bar{A} \subseteq B$.

Allora

$$(*) \quad \int_A \operatorname{div} F(x)\, dx = \int_{\partial A} \big(F(x), \nu(x)\big)\, d\sigma$$

Oss: Il teorema vale in qualunque dimensione ma noi abbiamo dato un significato all'integrale su un bordo solo se questo è una curva o una superficie.
Il termine a destra nella formula di Gauss-Green ⊛ va inteso come integrale di linea (curvilineo) se $n=2$, come un integrale di superficie se $n=3$.

Oss: Se $n=1$ che significato si potrebbe dare al teorema della divergenza?



Sia $A=(a,b)$

L'unico modo di considerare un versore normale esterno ad A in $\mathbb{R}$ è considerare uno scalare di modulo 1 che sia 1 in b e -1 in a.

Un campo in dimensione 1 è semplicemente una funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

e la divergenza è $\frac{df}{dx}(x) = f'(x)$.

Si avrebbe allora a sinistra di ⊛

$\int_a^b f'(x)\,dx$. Il bordo di $A = (a,b)$

è semplicemente $\{a.b\}$ e l'integrale sul bordo

è semplicemente la somma sugli estremi,

quindi $f(b)\,\nu(b) + f(a)\,\nu(a) = f(b) - f(a)$

Il teorema della divergenza può essere pensato

come un'estensione a $n \geq 2$ del teorema

in dimensione 1 che dice che se $f \in C^1(\mathbb{R})$

allora $\int_{(a,b)} f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$.

~~Vediamo la dimostrazione nel caso in cui~~

~~A sia un aperto di $\mathbb{R}^2$ la cui chiusura ~~unione~~ di~~

~~~~stessi~~ ~~che~~ possa essere ripartito come ~~unione~~~~
~~~~

Vediamo la dimostrazione nel caso in cui

$$A \text{ aperto di } \mathbb{R}^2$$

e inoltre

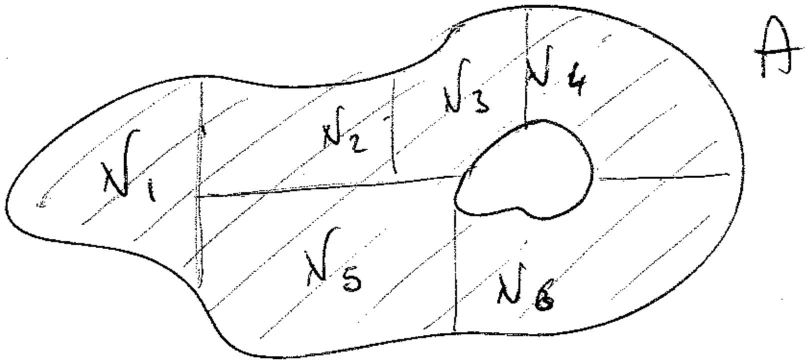
$\exists\ N_1, \dots N_k$ insiemi normali (quindi chiusi) tali che

$$\overline{A} = \bigcup_{j=1}^{k} N_j$$

$$\mathring{N}_j \cap \mathring{N}_i = \emptyset \quad \text{se } i \neq j$$

★

N_j normali rispetto ad entrambi gli assi



Cominciamo considerando un aperto regolare e limitato di $\mathbb{R}^2$ A e supponiamo che ∂A sia il sostegno di una curva chiusa e regolare $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ (o di più curve chiuse)

Indichiamo con x e y le due componenti di γ

cioè $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

Il versore tangente $\tau(t)$ a ∂A nel punto $\gamma(t)$ è dato da

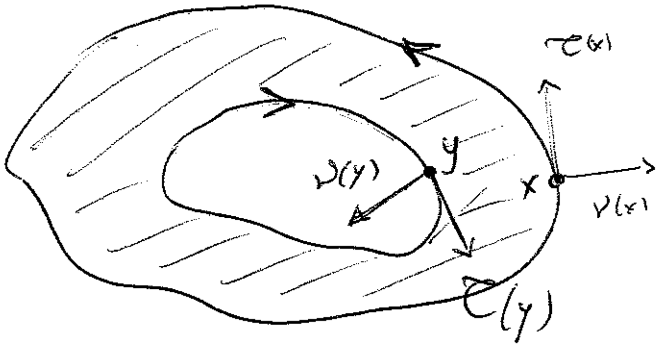
$$\tau(\gamma(t)) \frac{\dot\gamma(t)}{|\dot\gamma(t)|} = \frac{(x'(t), y'(t))}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}$$

Il versore normale a ∂A nello stesso punto ed esterno ad A è dato da

$$\nu(\gamma(t)) := \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}$$

Def Diremo che γ è un'orientazione positiva per ∂A ~~se~~ (o che γ orienta positivamente ∂A) se per ogni punto $x \in \partial A$ tra il versore normale $\nu(x)$ e $\tau(x)$ misurato in senso antiorario è di $\pi/2$.

(Intuitivamente si può dire che γ orienta ∂A positivamente se percorrendo ∂A nel senso crescente del parametro t si lascia A a sinistra).



Il verso indica le orientazioni positive

$A = $ [illegible]

Dato un campo $F : B \to \mathbb{R}^2$, $B \supseteq \overline{A}$,

scriveremo

$$\int_{\partial A^+} \left(F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy \right)$$

per indicare che ∂A è parametrizzato in modo da avere l'orientazione positiva,

$$\int_{\partial A^-} \left(F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy \right)$$

nel caso in cui l'orientazione sia negativa (cioè non positiva).

Cominciamo con il dimostrare un lemmino preliminare.

Lemma Siano $f \in C^1(B)$, B aperto di $\mathbb{R}^2$, A aperto con $\overline{A} \subseteq B$, $f: B \to \mathbb{R}$.

Se A è normale rispetto all'asse x si ha

$$(1) \qquad \iint_A \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy = -\int_{\partial A^+} f(x,y)\,dx \quad ;$$

se A è normale rispetto all'asse y si ha

$$(2) \qquad \iint_A \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx\,dy = \int_{\partial A^+} f(x,y)\,dy \quad .$$

Chiameremo (1) e (2) formule di Gauss-Green.

Oss: considerando due funzioni $F_1, F_2 : B \to \mathbb{R}$ (e pensando ad un campo $F = (F_1, F_2)$) si ottiene anche che

$$\int_{\partial A^+} (F_1\,dx + F_2\,dy) = \iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\,dy$$

oppure

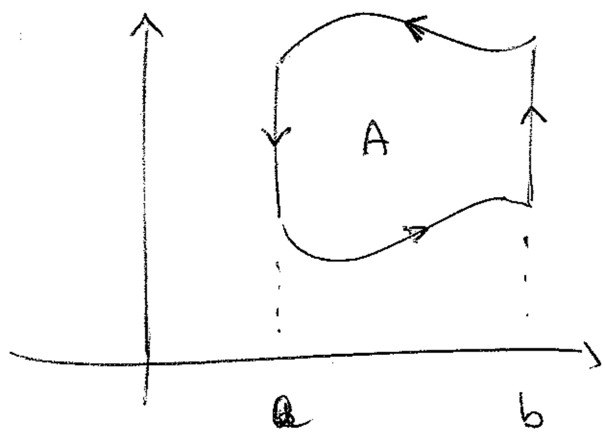
$$\iint_A \operatorname{div} F\,dx\,dy = \int_{\partial A^+} (F_1\,dy - F_2\,dx)$$

dim dimostriamo, ad esempio, la prima (la seconda per Ex).

Sia $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \}$

$$\circledast \quad \iint_A \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) =$$

$$= \int_a^b \left[f(x, \varphi_2(x)) - f(x, \varphi_1(x)) \right] dx$$



Parametrizziamo positivamente ∂A con una curva γ data dall'unione di $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}, \gamma^{(4)}$ dove

$$\gamma^{(1)}(t) = \left(a,\ (1-t)\,\varphi_2(a) + t\,\varphi_1(a)\right) \qquad t \in [0,1]$$

$$\gamma^{(2)}(t) = \left(t,\ \varphi_1(t)\right) \qquad t \in [a,b]$$

$$\gamma^{(3)}(t) = \left(b,\ (1-t)\,\varphi_1(b) + t\,\varphi_2(b)\right) \qquad t \in [0,1]$$

$$\gamma^{(4)}(t) = \left(b+a-t,\ \varphi_2(b+a-t)\right) \qquad t \in [a,b]$$

Ora valutando $\int_{\partial A^+} f \, dx$ usando la parametrizzazione $\gamma^{\partial A^+}$ si ha

$$\int_{\partial A^+} f \, dx = \int_0^1 f(\gamma^{(1)}(t))\, \dot\gamma_1^{(1)}(t)\, dt + \int_a^b f(\gamma^{(2)}(t))\, \dot\gamma_1^{(2)}(t)\, dt + \int_0^1 f(\gamma^{(3)}(t))\, \dot\gamma_1^{(3)}(t)\, dt + \int_a^b f(\gamma^{(4)}(t))\, \dot\gamma_1^{(4)}(t)\, dt$$

$\dot\gamma_1^{(1)}(t) = \dot\gamma_1^{(3)}(t) = 0$ mentre

$\dot\gamma_1^{(2)}(t) = 1$, $\dot\gamma_1^{(4)}(t) = -1$. Per cui

$$\int_{\partial A^+} f \, dx = \int_a^b f(t, \varphi_1(t))\, dt - \int_a^b f(b+a-t, \varphi_2(b+a-t))\, dt$$

Chiamando s la quantità $b+a-t$ nel secondo integrale si ottiene

$$\int_{\partial A^+} f\,dx = \int_a^b \left[f(t,\varphi_1(t)) - f(t,\varphi_2(t))\right] dt$$

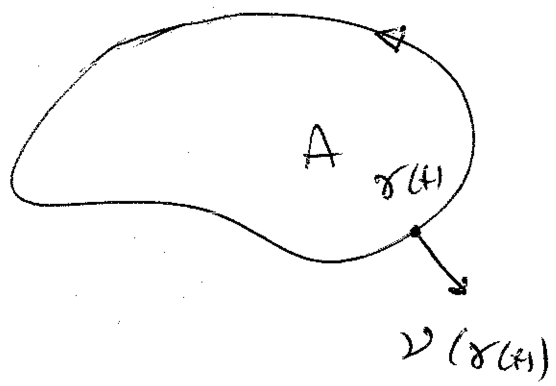
da cui, con $\oplus$, si conclude. //

Vediamo ora come scrivere in forma diversa gli integrali orientati delle formule di Gauss-Green.

Data $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

una parametrizzazione

che orienta positivamente ∂A,



$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, si ha che

$$\nu(\gamma(t)) = \frac{1}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \left(y'(t), -x'(t)\right)$$

Se $f : B \to \mathbb{R}$, $B \supseteq \overline{A}$, si ha

$$\int_{\partial A^+} f(x,y)\,dy = \int_\gamma f(x,y)\,dy =$$

$$= \int_a^b f(\gamma(t))\, y'(t)\, dt =$$ $y(t) = \gamma_1(t)$

$$= \int_a^b f(\gamma(t))\, \frac{y'(t)}{|\dot\gamma(t)|}\, |\dot\gamma(t)|\, dt =$$

$$= \int_a^b f(\gamma(t))\, \nu_1(\gamma(t))\, |\dot\gamma(t)|\, dt =$$

$$= \int_\gamma f \nu_1 \, ds$$ cioè

A normale risp. asse y

$$\int_{\partial A^+} f(x,y)\, dy = \int_{\partial A} f \nu_1 \, ds$$ (2)-bis

Analogamente si mostra (Ex)

A normale rispetto all'asse x

$$\int_{\partial A^+} f \, dx = - \int_{\partial A} f \nu_2 \, ds$$ (1)-bis

Si noti che nelle ultime due uguaglianze gli integrali a sinistra sono integrali di campi lungo cammini orientati (il campo $(0, f)$ nel primo, il campo $(f, 0)$ nel secondo caso) e quindi integrali di 2^a specie; gli integrali a destra sono integrali curvilinei (di 1^a specie)

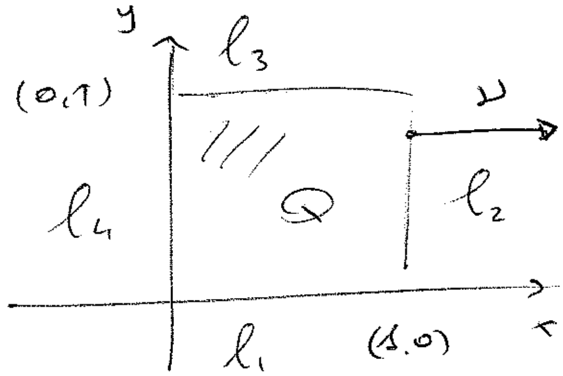
Ora dalle formule di Gauss-Green e da queste ultime uguaglianze si ha

$$(1), (1)\text{-bis} \Rightarrow \quad \iint_A \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy = \int_{\partial A} f \nu_2 \, ds$$

$$(2), (2)\text{-bis} \Rightarrow \quad \iint_A \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy = \int_{\partial A} f \nu_1 \, ds$$

altre versioni delle formule di Gauss-Green. Perché valgano entrambe dobbiamo richiedere A normale sia rispetto a x che a y.

Vediamo un esempio semplice. Se $A = Q$ quadrato di lato 1



$$\iint_Q \frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^1 dx\, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \int_0^1 dy\, \big(f(1,y) - f(0,y)\big)$$

D'altra parte,
$$\nu(x,y) = \begin{cases} (0,-1) & \text{in } l_1 \\ (1,0) & \text{in } l_2 \\ (0,1) & \text{in } l_3 \\ (-1,0) & \text{in } l_4 \end{cases}$$

per cui
$$\int_{\partial A} f \nu_1\, ds = \int_{l_2 \cup l_4} f \nu_1\, ds =$$

$\nu_1 = 1$ su l_2

$\nu_1 = -1$ su l_4

$$\cancel{= \int_{l_2} f\, ds - \int_{l_4} f}$$

$$= \int_0^1 f(1,y)\,dy - \int_0^1 f(0,y)\,dy$$

Se si considera nelle formule di Gauss-Green appena ottenute una funzione $F_j : B \to \mathbb{R}$ in corrispondenza dell'integrale che coinvolge ν_j, $j = 1, 2$, si ha

$$\iint_A \frac{\partial F_1}{\partial x} \, dx\,dy = \int_{\partial A} F_1 \nu_1 \, ds$$

$$\iint_A \frac{\partial F_2}{\partial y} \, dx\,dy = \int_{\partial A} F_2 \nu_2 \, ds$$

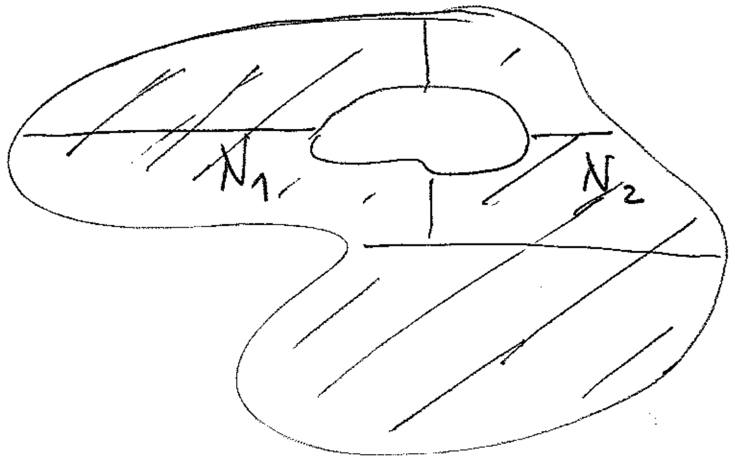
e pensando a F_1, F_2 come le componenti di un campo di classe C^1 $F : B \to \mathbb{R}^2$

$$\iint_A \operatorname{div} F \, dx\,dy = \int_{\partial A} (F, \nu) \, ds$$

Abbiamo mostrato quindi il teorema della divergenza nel caso in cui A sia normale sia rispetto all'asse x che all'asse y.

W. 27

Se A è unione di insiemi normali come sopra



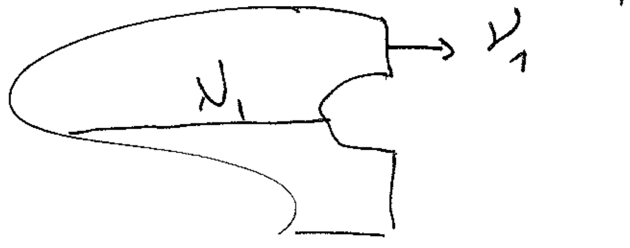
$A = \bigcup_{j=1}^{k} N_j$ s'ha

$$\int_A \operatorname{div} \overline{F}\, dx\,dy =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \int_{N_j} \operatorname{div} \overline{F}\, dx\,dy =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \int_{\partial N_j} (\overline{F}, \nu_j)\, ds =$$

ν_1 normale esterna a N_1



$$= \sum_{j=1}^{k} \int_{\partial N_j \cap \partial A} (\overline{F}, \nu_j)\, ds$$

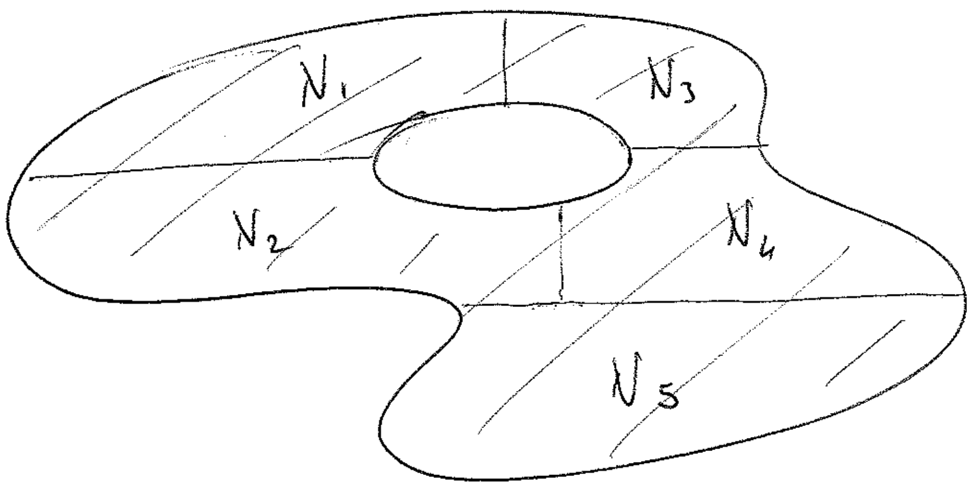
ν_2 normale esterna a N_2

$$= \int_{\partial A} (\overline{F}, \nu)\, ds$$

perché gli integrali sui tratti di bordo interni si compensano.

Abbiamo quindi mostrato il teorema della divergenza nel caso in cui A sia normale rispetto ad entrambi gli assi o unione di insiemi normali rispetto ad entrambi gli assi.

Si noti che (limitandoci a questo tipo di insiemi e alla dimensione 2) abbiamo mostrato qualcosa di più rispetto all'enunciato. Ad esempio $Q = [0,1]^2$ è un dominio che non è regolare, ma se i punti in cui l'insieme non è regolare (e nei quali quindi non esiste la normale) è un insieme trascurabile per gli integrali curvilinei la cosa funziona comunque.

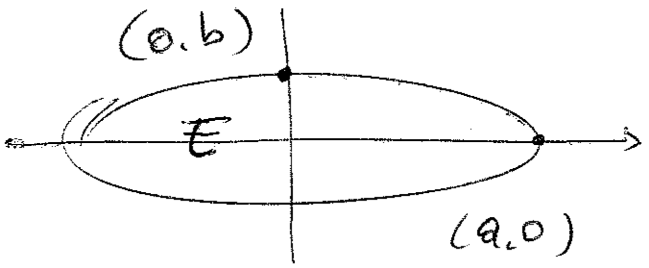


esempio

Alcuni esempi di applicazioni

Un esempio di applicazione del teorema della divergenza (delle formule di Gauss - Green) in dimensione 2 è quello di calcolare aree di insiemi regolari trasferendo il problema nel valutare integrali di campi su curve orientate.

<u>Esempio</u> Abbiamo già visto che l'area dell'ellisse in figura



è $\pi a b$.

Vediamo come valutare tale quantità in modo alternativo.

$$\iint_E \operatorname{div} F \, dx dy = \int_{\partial E} (F, \nu) \, ds =$$

$$= \int_{\partial E^+} \left[F_1(x,y) \, dy - F_2(x,y) \, dx \right]$$

ricordando che $(n = 2)$

$$\iint_E \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy = -\int_{\partial E^+} f(x,y)\,dx = \int_{\partial E} f\,\nu_2\,ds$$

$$\iint_E \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx\,dy = \int_{\partial E^+} f(x,y)\,dy = \int_{\partial E} f\,\nu_1\,ds$$

per una $f \in C^1(E)$ e ν normale esterna ad E.

A questo punto basta scegliere un campo F che abbia divergenza 1. Ad esempio

$F(x,y) = (x, 0)$. Allora

$$\text{mis}(E) = \iint_E 1\,dx\,dy = \iint_E \operatorname{div} F\,dx\,dy =$$

$$= +\int_{\partial E^+} x\,dy = \qquad \cancel{(a\cos\theta, b\,\text{sen}\,\theta)}$$

$$\cancel{= \int_0^{2\pi} (a\cos\theta)\, b\cos\theta\, d\theta}$$

La parametrizzazione $\theta \mapsto (a\cos\theta, b \,\mathrm{sen}\,\theta)$ $\theta \in [0, 2\pi]$

orienta positivamente ∂E

per cui

$$\int_{\partial E^+} x \, dy = \int_0^{2\pi} (a\cos\theta)\, b\cos\theta \, d\theta =$$

$$= ab\pi$$

Analogamente se si sceglie $F(x,y) = (0, y)$

si ha

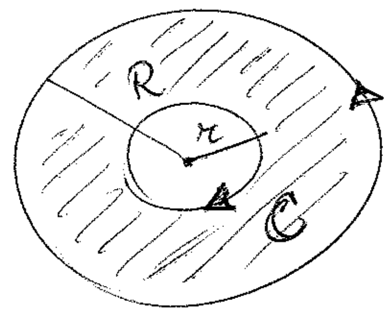
$$\mathrm{mis}\,(E) = -\int_{\partial E^+} y \, dx = -\int_0^{2\pi} (b\,\mathrm{sen}\,\theta)(-a\,\mathrm{sen}\,\theta)\, d\theta$$

$$= \pi ab$$

e la stessa cosa per ogni campo del tipo

$$F(x,y) = (\alpha x, (1-\alpha) y) \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

EX) Calcolare l'area della corona circolare $\mathbb{C}$



Scegliamo ad esempio

$$F(x,y) = \left(\frac{1}{2}x , \frac{1}{2}y\right)$$

$$\text{mis}(\mathbb{C}) = \int_{\partial C^+} \left(\frac{1}{2}x\,dy - \frac{1}{2}y\,dx\right)$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} R\cos\theta \, R\cos\theta\, d\theta - \frac{1}{2}(R\,\text{sen}\,\theta)(-R\,\text{sen}\,\theta)\,d\theta\right]$$

$$+ \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} r\cos\theta\,(-r\cos\theta) - \frac{1}{2}(-r\,\text{sen}\,\theta)(-r\,\text{sen}\,\theta)\right] d\theta$$

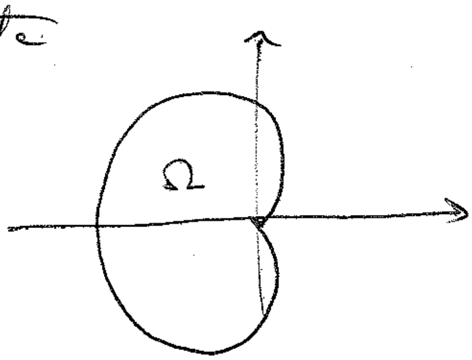
poiché $\theta \mapsto (R\cos\theta , R\,\text{sen}\,\theta)$ $\quad \theta \in [0, 2\pi]$

$\theta \mapsto (r\cos\theta , -r\,\text{sen}\,\theta)$

orientano positivamente ∂C. Per cui

$$\text{mis}(C) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{2}r^2\right) d\theta = \pi\left(R^2 - r^2\right)$$

Ex Calcolare l'area ~~contenuta~~ della figura limitata che ha come bordo la cardioide parametrizzata da



$$[0, 2\pi] \ni \theta \longmapsto$$

$$\Big((1-\cos\theta)\cos\theta \;,\; (1-\cos\theta)\operatorname{sen}\theta \Big)$$

$$\int_{\partial\Omega^+} \left(\frac{1}{2} x \, dy - \frac{1}{2} y \, dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \Big[(1-\cos\theta)\cos\theta \big[(1+\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta + (1-\cos\theta)\cos\theta \big] +$$

$$- (1-\cos\theta)\operatorname{sen}\theta \big[(1+\operatorname{sen}\theta)\cos\theta + (1-\cos\theta)\operatorname{sen}\theta \big] \Big] d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 + \cos^2\theta - 2\cos\theta \right) d\theta = \frac{3}{2}\pi$$

Volendo anche integrali più generali possono essere valutati. ~~Ad~~ esempio

$$\int_E (x^2 - y^2)\, dx\, dy \qquad E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

Scegliendo ad esempio $F(x,y) = \left(\frac{x^3}{3} - xy^2 ,\ 0 \right)$

diventa $$\int_{\partial E^+} \left(\frac{x^3}{3} - xy^2 \right) dy$$

Parametrizzo ∂E con $[0, 2\pi] \ni \theta \mapsto (a\cos\theta,\ b\,\mathrm{sen}\,\theta)$

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{a^3 \cos^3\theta}{3} - \underbrace{a^2 b \cos^2\theta\, \mathrm{sen}\,\theta} \right) (-b\cos\theta)\, d\theta$$

$$= \ldots = \pi \frac{ab}{4} (a^2 - b^2)$$

Ex Provare con $F = \left(0,\ x^2 y - \frac{y^3}{3} \right)$

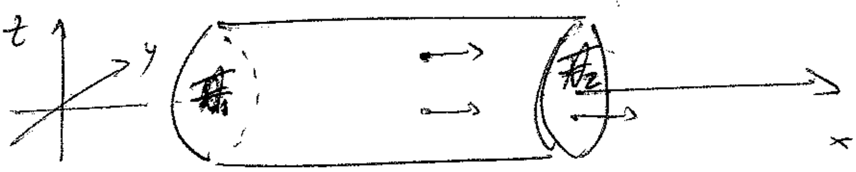
Valutare il flusso di un campo F attraverso una superficie S significa valutare

$$\int_S (F, \nu)\, d\sigma \,.$$

Ad esempio se consideriamo un campo costante

$F(x,y,z) = (a, 0, 0)$ attraverso la

superficie



si ha che

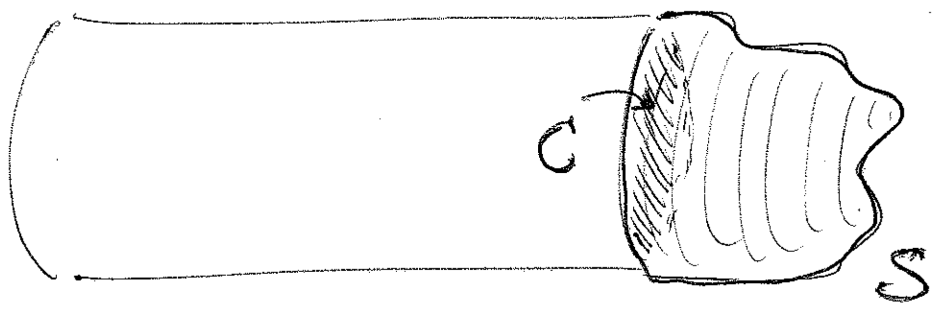
$$\operatorname{div} F = 0 \quad \text{per cui} \quad \int_C \operatorname{div} F = 0$$

Se F rappresenta il campo di velocità di un fluido e C una porzione di un tubo il fatto che $\int_C \operatorname{div} F$ sia nullo e che sia anche uguale a $\int_{\partial C} (F, \nu)\, d\sigma$ si ha che

$$\int_{\partial C} (F, \nu)\, d\sigma = \int_{A_2} F_1 - \int_{A_1} F_1$$

cioè tanto fluido attraversa la faccia A_1 e tanto ne esce dalla faccia A_2

Supponiamo di voler valutare il flusso del campo costante $(a, 0, 0)$ con $a > 0$ attraverso la superficie S



È sufficiente considerare una superficie chiusa, cioè che racchiude un aperto limitato di cui sia il bordo e integrando su tale aperto il campo che ha divergenza nulla si ha che

$$\int_S (F, \nu)\, d\sigma = a \operatorname{mis}(C)$$

Ex Trovare il flusso attraverso

$$S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1 \, , \quad z \geq 0 \}$$

del campo di vettori

$$F(x,y,z) = \left(z^2 \cosh y \, , \quad x^{\sqrt{z^4 + \log(x+5)}} \, , \; y \right)$$

Poiché $\operatorname{div} F = 0$ (e solo per questo il trucco funziona!) posso considerare un aperto che abbia come parte di bordo S.

S

Considero $\Omega = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2+x^2+y^2 \leq 1 \, , \; z \geq 0 \}$

e $\partial\Omega = S \cup \Sigma$ dove

$$\Sigma = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1 \, , \; z = 0 \}$$

In questo modo si ha:

$$0 = \int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz = \int_{S \cup \Sigma} (F, \nu) \, d\sigma$$ da cui

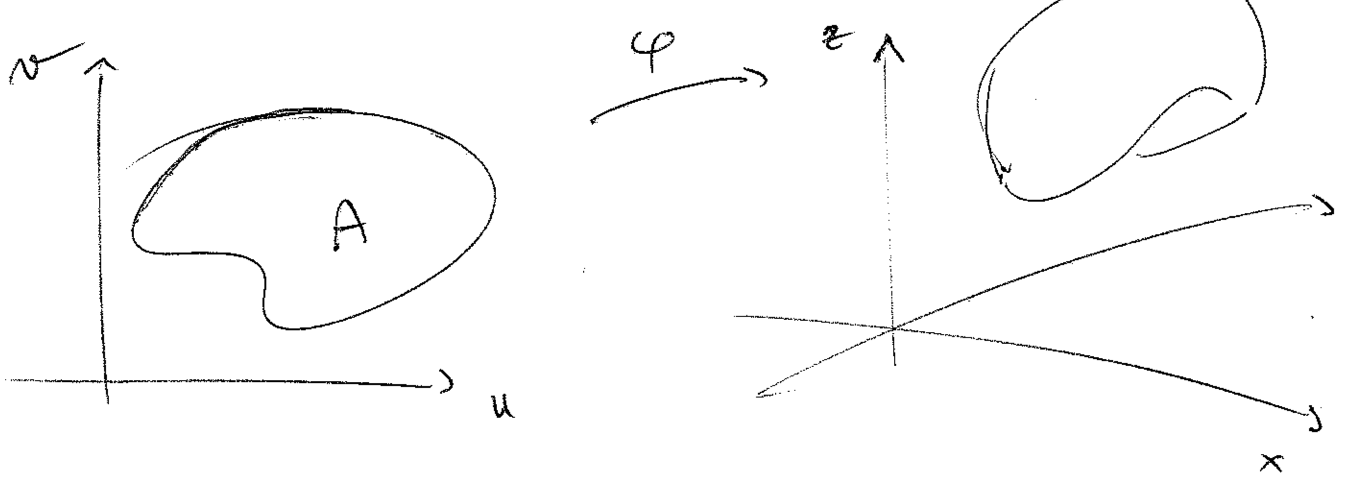
$$\int_S (F, \nu)\, d\sigma + \int_\Sigma F \cdot (0,0,-1)\, d\sigma = 0$$

$$\int_S (F,\nu)\, d\sigma = \int_\Sigma y = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho\, \rho^2 \operatorname{sen}\theta = 0$$

questo è più facile!

Vediamo ora il teorema di Stokes.

Consideriamo una superficie compatta, cioè $\varphi : K \to \mathbb{R}^3$, con K chiusura di A aperto connesso per archi e limitato, e orientabile. Denotiamo con $S = \varphi(A)$



Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ che orienta positivamente $\partial A = \partial K$.

Denotiamo con Γ la curva $\varphi \circ \gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, con ∂S l'insieme $\varphi(\partial A)$ e diciamo che Γ orienta positivamente ∂S e indicheremo con ∂S^+ il cammino orientato individuato da Γ.

Dato un campo $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$, Ω aperto di $\mathbb{R}^3$, si denota con $\operatorname{rot} F$ un campo di vettori definito da

$$\operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

Supponiamo di considerare un campo definito in Ω intorno di S. Vale il seguente risultato.

Teorema (di Stokes) Data S regolare e orientabile ~~si ha~~ con φ di classe C^2 si ha

$$\int_S (\operatorname{rot} F, \nu)\, d\sigma = \int_{\partial S^+} (F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz)$$

dove $\nu = \dfrac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|}$.

Oss: poiché φ è orientabile è possibile definire la normale senza ambiguità

dim

$$\int_S (\operatorname{rot} F, \nu)\, d\sigma =$$

$$= \int_A \left((\operatorname{rot} F)(\varphi(u,v)), \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|} \right) |\varphi_u \wedge \varphi_v| \, du\, dv$$

$$= \int_A \left((\operatorname{rot} F)(\varphi(u,v)), \varphi_u(u,v) \wedge \varphi_v(u,v) \right) du\, dv$$

$$(\operatorname{rot} F, \varphi_u \wedge \varphi_v) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \right)$$

$$+ \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \right)$$

Se ora si considera il campo G definito da A e a valori in $\mathbb{R}^2$ definito da

$$G_1(u,v) = F_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial u} + F_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial u} + F_3 \frac{\partial\varphi_3}{\partial u}$$

$$G_2(u,v) = F_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial v} + F_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial v} + F_3 \frac{\partial\varphi_3}{\partial v}$$

$$G_1(u,v) = \sum_{j=1}^{3} F_j(\varphi(u,v)) \frac{\partial\varphi_j}{\partial u}(u,v)$$

$$G_2(u,v) = \sum_{j=1}^{3} F_j(\varphi(u,v)) \frac{\partial\varphi_j}{\partial v}(u,v)$$

si ha che

qui si usa φ C^2

$$\left(\operatorname{rot} F(\varphi(u,v)),\ \varphi_u(u,v) \wedge \varphi_v(u,v)\right) =$$

$$= \frac{\partial G_2}{\partial u}(u,v) - \frac{\partial G_1}{\partial v}(u,v)$$

quindi

$$\int_S (\operatorname{rot} F, \nu)\, d\sigma = \int_A \left(\frac{\partial G_2}{\partial u} - \frac{\partial G_1}{\partial v}\right) du\,dv =$$

Vedi Lemma 6.6 pag W.23.b

$$= \int_{\partial A^+} (G_1\, du + G_2\, dv)$$

Ora valutando quest'ultimo termine si ha

$$\int_a^b \left[G_1(\gamma(t))\,\dot{\gamma}_1(t) + G_2(\gamma(t))\,\dot{\gamma}_2(t) \right] dt =$$

$$= \int_a^b \Big[\sum_{j=1}^{3} F_j(\varphi(\gamma(t)))\,\frac{\partial \varphi_j}{\partial u}(\gamma(t))\,\dot{\gamma}_1(t) + \sum_{j=1}^{3} F_j(\varphi(\gamma(t)))\,\frac{\partial \varphi_j}{\partial v}(\gamma(t))\,\dot{\gamma}_2(t) \Big] dt$$

Ricordando che $\Gamma(t) = \varphi \circ \gamma(t) =$

$$= \left(\varphi_1(\gamma_1(t), \gamma_2(t)),\ \varphi_2(\gamma_1(t), \gamma_2(t)),\ \varphi_3(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \right)$$

si ha che

$$\frac{d}{dt}\Gamma_j(t) = \frac{\partial \varphi_j}{\partial u}(\gamma(t))\,\dot{\gamma}_1(t) + \frac{\partial \varphi_j}{\partial v}(\gamma(t))\,\dot{\gamma}_2(t)$$

per cui l'integrale di sopra diventa

$$\int_a^b \sum_{j=1}^{3} F_j(\Gamma(t))\,\dot{\Gamma}_j(t)\,dt = \int_{\partial S^+} \left(F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz \right)$$