Serie di Fourier

Def Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice periodica di periodo $T > 0$ se T è il più piccolo numero positivo tale che
$$f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Oss Se f è periodica di periodo T (o T-periodica) allora
$$f(x+2T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
e
$$f(x+kT) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Def Diremo che $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo, si dice <u>continua a tratti</u> se esistono $x_1, \dots x_N \in I$ tali che f è continua in $I \setminus \{x_1, x_2, \dots x_N\}$ e inoltre esistono i limiti destro e sinistro finiti in ognuno dei punti $x_1, \dots x_N$ (solo destro o solo sinistro se uno dei punti è un estremo).

NOTAZIONE: data f discontinua in x_0, ma che ammette limiti destro e sinistro finiti in x_0 poniamo per comodità

$$f(x_0,+) := \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

$$f(x_0,-) := \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

$$\tilde{f}(x) := \frac{f(x_0,+) + f(x_0,-)}{2} = \frac{\lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x)}{2}$$

Def Diremo che $f : I \to \mathbb{R}$ è <u>regolare a tratti</u> se è continua a tratti, se nei tratti di continuità è derivabile a tratti, cioè esistono al più $y_1, \dots y_h$ t.c. f non è derivabile in $y_1, \dots y_h$ e inoltre nei punti in cui f non è continua esistono finiti i limiti destro e sinistro di f'

$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) \qquad \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$$

$$x_0 \in \{ x_1, \dots x_N, y_1, \dots y_h \}.$$

Si consideri uno spazio vettoriale V (di dimensione finita o infinita) dotato di prodotto scalare $(\cdot,\cdot)$ (il quale induce una norma $\|\cdot\|$, la quale induce una distanza d), un suo sottospazio vettoriale V_n di dimensione $n \in \mathbb{N}^*$.

Teorema (della proiezione) Sia $\{e_1, \dots e_n\}$ una base ortogonale dello spazio V_n e, fissato $v \in V$, si consideri l'elemento

$$v_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)} \, e_i \, .$$

Allora

i) $v - v_n$ è ortogonale ad ogni elemento di V_n

ii) $\|v_n\|^2 \leq \|v\|^2$ (dis. di Bessel)

iii) v_n è l'elemento che ~~rende mini~~ minimizza la funzione

$$u \mapsto \|v - u\| \quad \text{con } u \in V_n$$

cioè

$$\|v - v_n\| \leq \|v - u\| \quad \forall u \in V_n .$$

dim: i) $(v - v_n, e_j) =$

$$= (v, e_j) - \frac{(v, e_j)}{(e_j, e_j)} (e_j, e_j) = 0$$

ii) $v - v_n + v_n = v$ quindi

$$\|v\|^2 = ((v - v_n) + v_n, (v - v_n) + v_n) =$$

$$\overset{i)}{=} \|v - v_n\|^2 + \|v_n\|^2 \geq \|v_n\|^2$$

iii) Valutiamo la norma al quadrato di $v - u$ per $u \in V_n$:

$$\|v - u\|^2 = \|(v - v_n) + (v_n - u)\|^2 \overset{i)}{=}$$

$$= \|v - v_n\|^2 + \|v_n - u\|^2 \geq \|v - v_n\|^2.$$

Ex è istruttivo mostrare iii) facendo i calcoli

Si provi a dim. iii) per induzione ricavando esplicitamente i coefficienti

(Se $n = 1$ cerco a t.c. $\|v - a e_1\|^2$ è min.

Derivo e ottengo $2a(e_1, e_1) - 2(v, e_1) = 0$)

Quando saranno state viste le funzioni di più variabili sarà istruttivo anche calcolare il punto di minimo con un calcolo diretto.

Si consideri ora lo spazio vettoriale delle funzioni definite in $[0, 2\pi)$, continue a tratti nel senso definito precedentemente e che siano continue a destra e denotiamo con $V_+([0,2\pi))$ tale spazio. Quindi

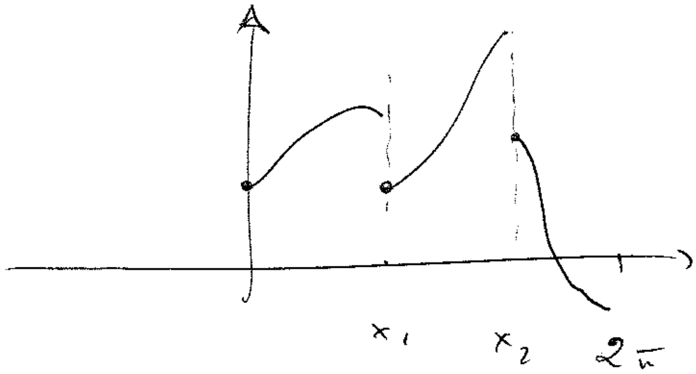
> Con $V_+([0,2\pi))$ denoto sia questo che lo spazio delle funzioni 2π-periodiche tc le loro restrizione a $[0,2\pi)$ appartiene a $V_+([0,2\pi))$

$f \in V_+([0,2\pi))$ se

- $f : [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}$
- esistono $x_1, \dots x_N \in [0, 2\pi)$ tali che f è continua in $[0, 2\pi) \setminus \{x_1, \dots x_N\}$
- esistono i limiti destro e sinistro in ognuno dei punti x_j, $j = 1, \dots N$ e sono finiti
- $\lim_{x \to x_j^+} f(x) = f(x_j) \qquad j = 1, \dots N$

Es. la funzione $x \overset{g}{\mapsto} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ con $x \in [-1, 0)$ non è continua a tratti (Non esiste (finito) il $\lim_{x \to 0^-} g(x)$).

Grafico di una possibile funzione in $V_+([0,2\pi))$



Analogamente si può definire lo spazio $V_-((0,2\pi])$ delle funzioni continue a tratti in $(0,2\pi]$ e continue a sinistra.

Ora dotiamo lo spazio $V_+([0,2\pi))$ con il prodotto scalare

$$(f,g) := \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, dx \qquad f,g \in V_+([0,2\pi))$$

Ex Verificare che $(\,,\,)$ è un prodotto scalare e che

$$\|f\| := \left(\int_0^{2\pi} f^2(x)\, dx\right)^{1/2} = \sqrt{(f,f)}$$ è una norma

Ricordo: $(\,,\,)$ è un prodotto scalare su uno s.v. V se

- $(u,v) = (v,u)$
- $(\alpha u + \beta v, w) = \alpha (u,w) + \beta (v,w)$
- $(u,u) \geq 0$ e vale $=$ sse $u=0$

$\forall u,v,w$ in V, $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$

Una norma $\| \cdot \|$ su uno s. v. V è un'applicazione $: V \longrightarrow [0, +\infty)$ tc

- $\|u\| \geq 0$ e $= 0$ sse $u = 0$
- $\|\alpha u\| = |\alpha| \, \|u\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

$\forall u, v$ in V

~~Costruiamo ora uno spazio vettoriale, sottospazio di V_+, definito come~~

Si considerino ora le funzioni

$$v_0(x) = 1$$

$$v_k(x) = \cos kx \qquad k \in \mathbb{N}^* \quad k = 1, 2, \dots n$$

$$u_k(x) = \operatorname{sen} kx$$

e lo spazio, che risulta un sottospazio vettoriale di V_+, V_n generato dalle $2n+1$ funzioni $\{v_0, v_1, \dots v_n, u_1, \dots u_n\}$, cioè l'insieme delle funzioni del tipo

$$\sum_{j=0}^{n} a_j v_j + \sum_{j=1}^{n} b_j u_j \qquad \text{con } a_j, b_j \in \mathbb{R}.$$

Si osservi che $(\mp x)$ $\underbrace{\dim V_n = 2n+1}_{\text{dim più avanti}}$

pag 31-b

$$(v_0, v_0) = \int_0^{2\pi} 1\, dx = 2\pi$$

$$(v_k, v_k) = \int_0^{2\pi} \cos^2(kx)\, dx = \pi$$

$$(u_k, u_k) = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(kx)\, dx = \pi$$

$$(v_j, v_k) = 0 \qquad \text{se } j \neq k$$

$$(u_j, u_k) = 0 \qquad \text{se } j \neq k$$

$$(v_j, u_k) = 0 \qquad \forall j, \forall k$$

La proiezione di $f \in V_+([0, 2\pi))$ su $V_n([0, 2\pi))$

è
$$\tilde{a}_0 v_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j v_j + \sum_{j=1}^{n} b_j u_j$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx)\, dx \qquad k = 1, \dots n$$

$$\tilde{a}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx)\, dx \qquad k = 1, \dots n$$

Data $f \in V_+((0, 2\pi))$ definiamo per comodità

$$a_0 := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx$$

(così è coerente con gli altri a_j e si può scrivere

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx \qquad k = 0, 1, \dots n$$

e quindi $\tilde{a}_0 = \frac{a_0}{2}$. Consideriamo il polinomio trigonometrico

$$\circledast \quad \boxed{S_n f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx \right)}$$

Si definisce serie di Fourier di f ~~la quantità~~ la serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx \right).$$

Oss La quantità $\frac{a_0}{2}$ è la media di f in $(0,2\pi)$

~~Oss~~ Dal teorema della proiezione possiamo facilmente, e gratuitamente, ricavare il teorema che segue

Teorema Data $f \in V_+([0,2\pi))$ si consideri $S_n f$, il polinomio trig. definito in ⊛.
Si ha

i) $$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (S_n f)^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2\right)$$

ii) $$\int_0^{2\pi} (S_n f)^2(x)\,dx \leq \int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx \qquad \left(\begin{array}{c}\text{dis. di}\\ \text{Bessel}\end{array}\right)$$

iii) la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right)$ converge

iv) $$\lim_{k \to +\infty} a_k = \lim_{k \to +\infty} b_k = 0$$

v) $S_n f$ è l'elemento di $V_n = V_n([0,2\pi))$ che rende minima la quantità

$$\int_0^{2\pi} \left(f(x) - p_n(x)\right)^2 dx$$ tra tutte le $p_n \in V_n$

dim. i) è un semplice conto (Ex)

ii) thm delle proiezione

v) " " "

iii) da i) e ii) si ha che

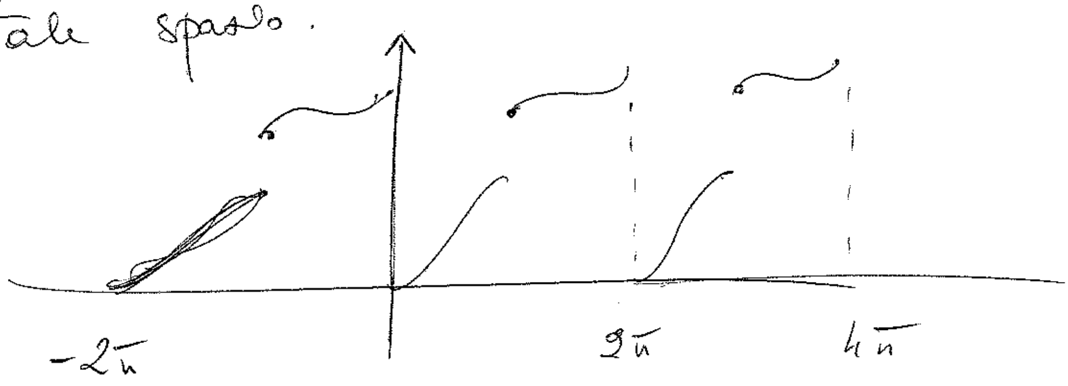
$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2\right) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx < +\infty$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}$$

poi passando al limite ...

iv) Da iii) se la serie converge necessariamente a_k e b_k devono essere infinitesimi. //

Anziché funzioni definite solamente in $[0, 2\pi)$ si possono considerare funzioni periodiche di periodo 2π estendendo per periodicità le funzioni dello spazio $V_+([0,2\pi))$. ~~Denotiamo con V_+~~ tale spazio.



Più in generale per funzioni T-periodiche si definisce <u>pulsazione</u> la quantità $\omega := \frac{2\pi}{T}$

In questo modo si possono considerare le funzioni $V_+([0,T))$ o le loro estese per periodicità. In questo caso si pongono

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(n\omega x)\,dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{sen}(n\omega x)\,dx, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

~~Teorema (convergenza delle serie di Fourier).~~
~~Sia f una funzione~~

<u>Oss</u> Data la periodicità di f, delle funzioni $\cos(n\omega x)$, $\mathrm{sen}(n\omega x)$, a_n e b_n possono anche essere definiti come

$$a_n = \frac{2}{T}\int_\alpha^{T+\alpha} f(x)\cos(n\omega x)\,dx, \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_\beta^{T+\beta} f(x)\,\mathrm{sen}(n\omega x)\,dx$$

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Oss Dall'ultima osservazione e dalla definizione di a_n e b_n si vede facilmente che, data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-periodica, se f è pari (cioè $f(x) = f(-x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$) si ricava che $b_n = 0$ $\forall n$ e quindi lo sviluppo in serie di Fourier di f risulta di soli coseni.
Analogamente lo sviluppo di una funzione che fosse dispari risulterebbe di soli seni.

Dir loro anche che $\int_0^{2\pi} |f - S_n f|^2 \, dx \to 0$

Teorema (convergenza della serie di Fourier)

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione T-periodica e regolare a tratti. Allora la serie di Fourier (a_n e b_n definiti a pag 5.29-b)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega x) + b_n \operatorname{sen}(n\omega x) \right)$$

- converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$ alla funzione

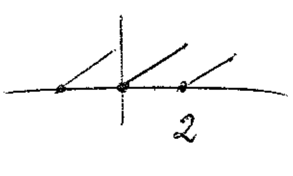
$$\tilde{f}(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \qquad \left(\begin{array}{c} \text{come def} \\ \text{a pag 24-b} \end{array} \right)$$

- converge uniformemente in ogni intervallo chiuso in cui f è continua.

Inoltre vale l'uguaglianza di Parseval

$$\frac{2}{T} \int_0^T f^2(x)\, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right)$$

Oss: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ posso pensarla come $f \in V_+([0,T))$, però f conv. unif nei chiusi in cui f è continua



La serie non conv. unif. in $[0,1]$ ma in $[a,b] \subset (0,2)$!

Teorema (integrazione delle serie di Fourier)

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua a tratti

e T-periodica e poniamo

$$F(x) = \int_0^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt \qquad x \in [0,T)$$

Allora F è continua e regolare a tratti e la sua serie di Fourier converge uniformemente alla sua estesa per periodicità in tutto $\mathbb{R}$.

Inoltre il legame tra i coefficienti A_n e B_n della serie di F e quelli a_n e b_n della serie di f è il seguente:

$$A_n = -\frac{1}{n} \frac{T}{2\pi} b_n \qquad \left(\frac{2\pi}{T} = \omega \right).$$

$$B_n = \frac{1}{n} \frac{T}{2\pi} a_n$$

Oss: A_0 è una costante e si calcola separat.

dim per EX solo se f è continua

(basta fare un'integrazione)

Ad esempio

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(x)\cos(n\omega x)\,dx =$$

$$= \frac{2}{T}\Bigg[\underbrace{\frac{1}{n\omega}F(x)\,\mathrm{sen}(n\omega x)\Big|_0^T}_{=0} +$$

$$-\frac{1}{n\omega}\int_0^T\left(f(x)-\frac{a_0}{2}\right)\mathrm{sen}(n\omega x)\,dx\Bigg]$$

$$= -\frac{1}{n}\,\frac{T}{2\pi}\;\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{sen}(n\omega x)\,dx$$

Oss: nell'ultimo passaggio si e' usato il fatto che $\int_0^T \mathrm{sen}(n\omega x)\,dx = 0$. Si osservi come si ha che i coefficienti di Fourier a_n, b_n con $n \geq 1$ sono gli stessi per tutta la famiglia di funzioni

$$f + c \qquad c \in \mathbb{R} \qquad f \text{ cont. a tratti } T\text{-periodica}$$

Se $u_1, \dots u_n$ sono vettori ortogonali in $(V, (\cdot,\cdot))$ allora sono lin. indipendenti.

dim: $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = 0 \Rightarrow$

$$0 = (\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n,\ u_j) = \alpha_j (u_j, u_j)$$

$$\Rightarrow \alpha_j = 0 \quad \forall\, j = 1, \dots n$$

È possibile rappresentare una serie di Fourier in forma complessa nel seguente modo:

$$\alpha \cos nx + \beta \operatorname{sen} nx =$$

$$= \frac{\alpha}{2}\left(\cos nx + i \operatorname{sen} nx + \cos nx - i \operatorname{sen} nx \right) +$$

$$+ \frac{\beta}{2i}\left(\cos nx + i \operatorname{sen} nx - \cos nx + i \operatorname{sen} nx \right) =$$

$$= \frac{\alpha}{2} e^{inx} + \frac{\alpha}{2} e^{-inx} +$$

$$+ \frac{\beta}{2i} e^{inx} - \frac{\beta}{2i} e^{-inx} =$$

$$= \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2i} \right) e^{inx} + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2i} \right) e^{-inx}$$

dove $e^{inx} = \cos nx + i \operatorname{sen} nx$

$e^{-inx} = \cos nx - i \operatorname{sen} nx$

Di conseguenza la serie può essere scritta

$$\frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n e^{inx} + d_n e^{-inx} \right)$$

dove $c_0 = a_0$

$$c_n = \frac{a_n - i b_n}{2}$$

$$d_n = \frac{a_n + i b_n}{2}$$

Oss se ~~fa~~ ha sviluppo $\frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ s'ha che la serie converge ~~totalmente~~ (e quindi uniformemente) se

$$\left(\sup_x | a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx | \leq |a_n| + |b_n| \right)$$

la serie $\sum (|a_n| + |b_n|)$ converge.

Se questa serie converge necessariamente il limite è una funzione continua!

Se f è discontinua (e continua a tratti) la serie $\sum (|a_n| + |b_n|)$ non può convergere!

Esercizio 6 Data la funzione

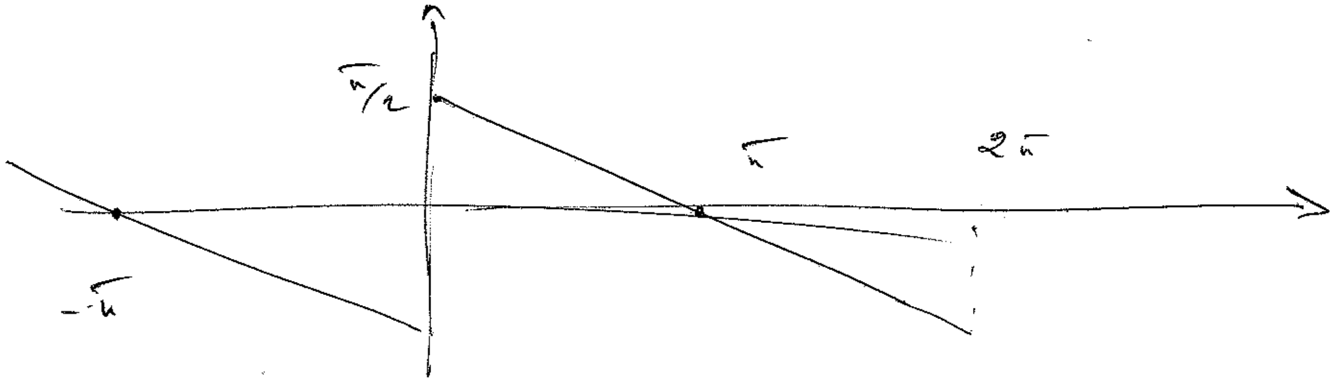
Gibbs

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{in} \quad [0, 2\pi)$$

ed estesa per periodicità a tutto $\mathbb{R}$

Verificare che lo sviluppo in serie di Fourier è

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} kx}{k}$$



Consideriamo $\quad S_n f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \operatorname{sen} kx$

Se si considera l'integrale

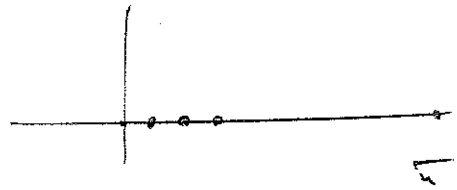
$$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$$

e si divide l'intervallo $[0, \pi]$ in n parti uguali si ha che

Ex F6

la somma di Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{n}\right)}{k\frac{\pi}{n}} \, \frac{\pi}{n}$$



approssima $\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$ e per $n \to +\infty$ converge proprio a $\int$ e quindi possiamo scrivere

$$S_n f\left(\frac{\pi}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2} \quad (\simeq 1,5708 \ldots)$$

mentre $\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt \simeq 1,85194$