

Successioni e serie di funzioni

Indichiamo con I un intervallo non vuoto di $\mathbb{R}$.

Def Consideriamo una successione $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ di funzioni reali. Diciamo che

1) $\{f_n\}_n$ converge in $x_0 \in I$ se $\{f_n(x_0)\}$ ammette limite finito.

2) $\{f_n\}$ converge puntualmente in $J \subseteq I$ se $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ammette limite finito

per ogni $x \in J$. In particolare è possibile definire una funzione $f: J \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{come } f(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

Diremo che $\{f_n\}$ converge puntualmente a f in J .

3) $\{f_n\}$ converge uniformemente in J a $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ se si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in J} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Esempi

1. la successione $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^n$

converge per ogni $x \in [0,1]$ e

ha come limite puntuale la funzione

$$f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

2. La successione $f_n: [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^n$

converge in $[0,1]$ e ha come limite
la funzione f dell'esempio 1, mentre
per $x \in (1,2]$ non converge (diverge a $+\infty$).

3. La ~~funzione~~ successione $h_n: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$

$$h_n(x) = (\sin x)^{2n+1} \quad \text{converge in tutto}$$

l'insieme $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ alla funzione

$$h(x) := \begin{cases} -1 & \text{se } x = -\frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{se } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ 1 & \text{se } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

4. Se si considera la successione $h_n(x) = (\sin x)^n$
definita in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ si ha che l'insieme
di convergenza è $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $h_n(\frac{\pi}{2})$ non
converge!

5. $f_n: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{n}} \rightarrow f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$

Oss - Si osserva che l'insieme di convergenza puntuale in generale è un sottoinsieme dell'insieme di definizione delle funzioni della successione (Es 2. e 4.)

- In generale se f_n sono monotone e convergono puntualmente ad f in $J \subseteq I$ allora anche f è monotona (in J) con lo stesso tono come ad esempio accade in 1. e 3. Ma se le f_n sono continue, non è detto che lo sia la funzione limite f (esempi 1. e 3.)

Nemmeno la limitatezza viene mantenuta al limite, come mostra l'esempio 5.

Oss La convergenza uniforme implica quella puntuale.

Si suppone infatti che $f_n \rightarrow f$ unif. in $J \subseteq I$

& Vogliamo vedere che $f_n(x_0) \rightarrow f(x_0)$

$\forall x_0 \in J$.

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \sup_{x \in J} |f_n(x) - f(x)|$$

Passando al limite si conclude.

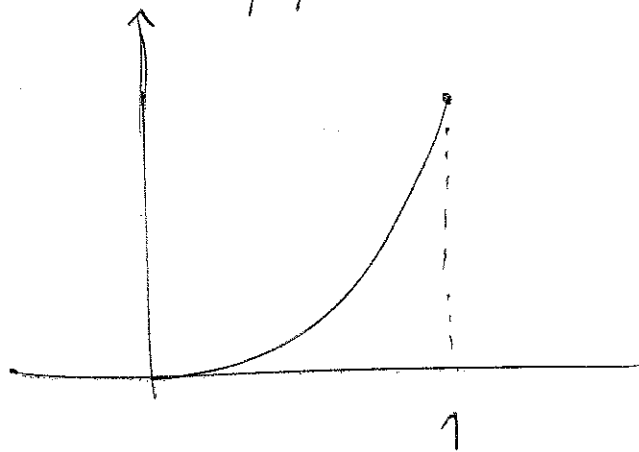
Il viceversa è falso! Si consideri l'esempio 1. Se f_n convergessero uniformemente ad f in $[0, 1]$ si avrebbe

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Scegliamo ora x poco più piccolo di 1 in maniera opportuna:

ad esempio il punto $x_n = 1 - \frac{1}{n}$

(scelto non proprio a caso)



$$f_n(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \nearrow \frac{1}{e}$$

$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ è crescente

$$n=2 \quad \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, si ha allora

$$\begin{aligned} \sup_{x \in (0, 1)} |f_n(x) - f(x)| &\geq \left| f_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) - f\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right| = \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Passando all'estremo superiore si ha

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \forall n \geq 2$$

e passando al limite non si può ottenere 0.

Obs Scriviamo in maniera estesa le due definizioni.

• $f_n \rightarrow f$ puntualmente in J se

$$\forall x \in J \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad (N = N(x, \varepsilon))$$

$$\text{t.c.} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

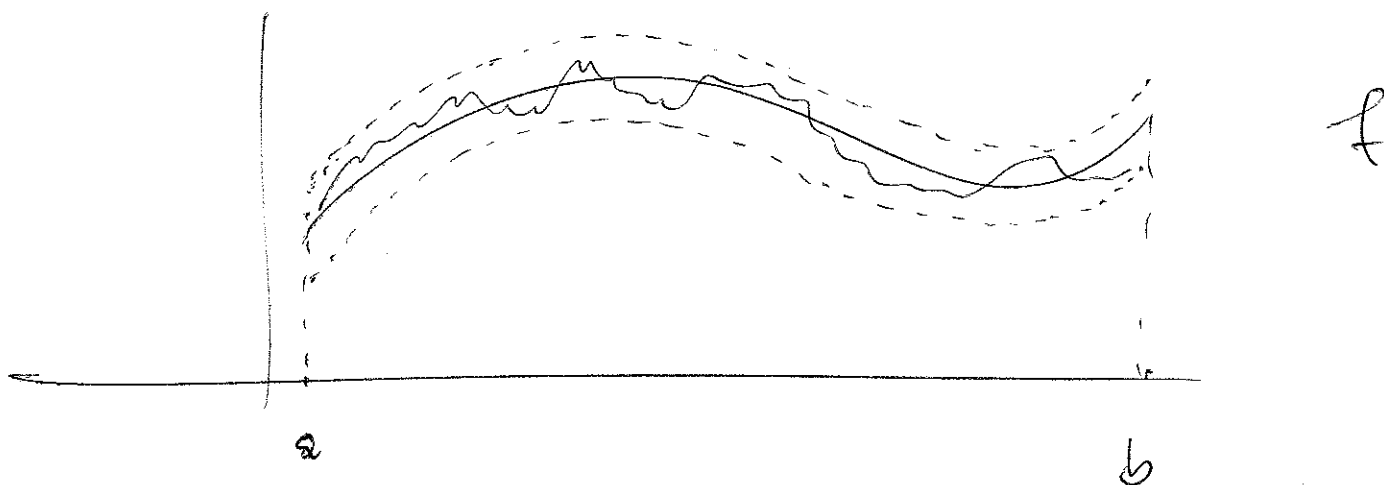
• $f_n \rightarrow f$ uniformemente in J se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad (N = N(\varepsilon)) \quad \text{tale che}$$

$$\sup_{x \in J} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

$$\text{cioè} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N, \quad \forall x \in J$$

Dire che $f_n \rightarrow f$ unif. in J
graficamente si può rappresentare così



$$f_n(x) < f(x) + \varepsilon$$

$$f_n(x) > f(x) - \varepsilon$$

$$\forall n \geq N$$

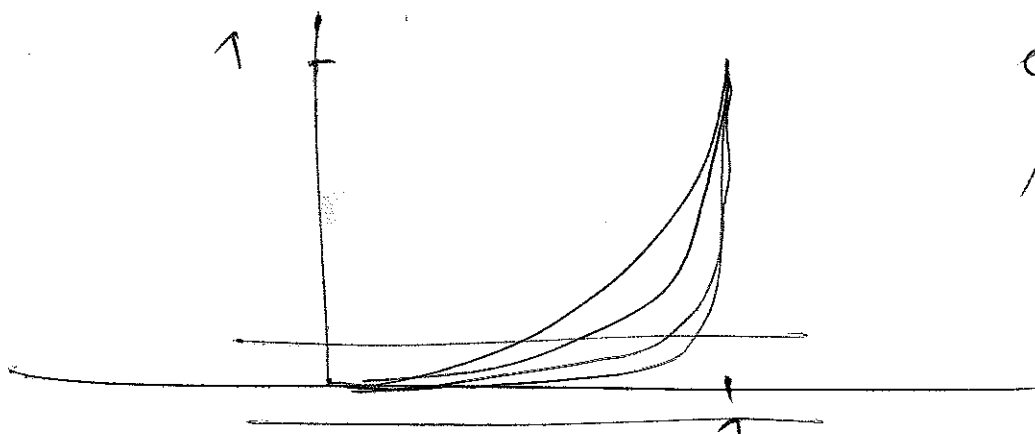
$$\forall x \in J$$

Se nell'esempio 1. cambiamo le funzioni
considerando

$$\tilde{f}_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\tilde{f}_n(x) = x^n$$

$$\tilde{f}_n(x) \rightarrow 0 \quad \forall x$$



Non c'è
convergenza
uniforme!

! Il problema non è dovuto al fatto che l'insieme di definizione non è chiuso!

Esempio 6.



$$f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ -nx + 2 & x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\text{Se } x = 0: f_n(x) = 0 \quad \forall n$$

$$\text{Se } x > 0: f_n(x) \rightarrow 0 \quad \text{visto che}$$

$$\text{prima o poi} \quad \exists N \text{ t.c. } \frac{2}{n} \leq x \\ \forall n \geq N$$

quindi f_n converge puntualmente alla funzione nulla in $[0, 1]$.

$$\text{Zero} \quad \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = 1$$

$$f(x) = 0 \quad \forall x$$

Teorema Si consideri una successione di funzioni

$f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo di $\mathbb{R}$, e
si suppone che $f_n \rightarrow f$ uniformemente
in I . Allora se f_n sono tutte continue
in un punto $x_0 \in I$ anche lo è f .

Ne consegue che se f_n sono continue
in tutto l'intervallo I (o in un suo
sottoinsieme) anche f è continua in I (...).

Dim. sia $x_0 \in I$ punto di continuità di tutte
le f_n . Fissiamo $\varepsilon > 0$.

Vogliamo trovare $\delta > 0$ tale che se

$|x - x_0| < \delta$ allora $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Inanzitutto scriviamo

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= f(x) - f_n(x) + \\ &\quad + f_n(x) - f_n(x_0) + \\ &\quad + f_n(x_0) - f(x_0) \end{aligned}$$

Dalla convergenza uniforme, qualunque

sia $x \in I$ (non abbiamo ancora scelto δ)

si ha che (poiché $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{y \in I} |f_n(y) - f(y)| = 0$)

$\exists N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall x \in I \quad |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n \geq N$$

$$\forall n \geq N \quad |f(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

A questo punto scegliamo $n \geq N$, ad esempio proprio N . Dalle continuità di f_N in x_0 si ha che in corrispondenza a $\frac{\varepsilon}{3}$ esiste

$\delta > 0$ tale che

$$|f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \text{ tale che } |x - x_0| < \delta$$

Scegliendo questo δ in particolare si ha

$$\text{che} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Oss Questo teorema mostra come la convergenza uniforme, a differenza di quella puntuale, si trasmette al limite la continuità.

Questo fatto può essere usato anche in negativo per mostrare che manca

la convergenza uniforme. Nell'esempio 1.
le funzioni $f_n(x) = x^n$ definite in $[0, 1]$
convergono puntualmente a $\begin{cases} 0 & x \in [0, 1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$
in $[0, 1]$, che non è continua.

Di conseguenza non si può essere convergenza
uniforme, perlomeno in tutto $[0, 1]$.

Ex Vedere che f_n convergono uniformemente
alla funzione nulla in tutti gli insiemi
del tipo $[0, a]$ con $0 < a < 1$.

Chiarisce se si è convergenza uniforme il
limite è una funzione continua, ma il
viceversa non è vero, come mostra l'esempio 6.

Proposizione Supponiamo ~~che~~ che $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
siano continue in $[a, b]$ e che convergano
uniformemente in $[a, b]$ ad una funzione f .

Allora convergono uniformemente in $[a, b]$.

Inoltre, detto $l = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(b)$, si ha che $\lim_{x_1 \rightarrow b} f(x) = l$.

Commento: analogamente se la conv. uniforme è in
 $(a, b]$ o in (a, b) .

dim Si osservi innanzitutto che dire che

$f_n \rightarrow f$ uniformemente su $[a, b]$

è equivalente a dire che la

successione $\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)|$ tende

a zero al tendere di n ad infinito e

quindi che

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\textcircled{*} \quad \left| \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f_k(x)| < \varepsilon \quad \forall n, k \geq N. \right.$$

Analogamente dire che $\{f_n\}_n$ converge uniformemente su $[a, b]$ (senza specificare chi è il limite) equivale a dire che

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}$ tale

$$\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f_k(x)| < \varepsilon \quad \forall n, k \geq N$$

Si osservi inoltre che

$$\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f_k(x)| = \max \left\{ |f_n(b) - f_k(b)|, \sup_{x \in (a, b)} |f_n(x) - f_k(x)| \right\}$$

Per mostrare la conv. uniforme in $[a, b]$ è quindi sufficiente mostrare che $\{f_n(b)\}_n$ è di Cauchy.

Tale vale $\otimes$ per ipotesi in particolare si ha

$$|f_n(x) - f_k(x)| < \varepsilon \quad \begin{array}{l} \forall x \in (a, b) \\ \forall n, k \geq N \end{array}$$

Passando al limite dalla continuità di tutte le f_n si ha

$$\lim_{x \rightarrow b^-} |f_n(x) - f_k(x)| = |f_n(b) - f_k(b)| \leq \varepsilon \quad \forall n, k \geq N.$$

Abbiamo quindi mostrato che $\{f_n(b)\}_n$ è di Cauchy e quindi convergente ad un limite $l \in \mathbb{R}$.

Tale le f_n convergono uniformemente e sono continue il limite

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (a, b) \\ l & x = b \end{cases} \quad \text{è una funzione continua.}$$

Proposizione Siano $f_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo

che $\{f_n\}_n$ converge uniformemente ad f in (a, b) . Si suppone che

$\forall n$ esiste finito $\lim_{x \rightarrow b^-} f_n(x) = \lambda_n$.

Allora esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = \lambda \in \mathbb{R}$ (finito!).

Inoltre la funzione f ammette limite per $x \rightarrow b$, $x \in (a, b)$, e tale limite è λ , cioè

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lambda.$$

Possiamo legare le due conclusioni dicendo

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow b^-} f_n(x) \right).$$

dalla $\exists x$ (è analoga alla precedente. L'ipotesi che esiste λ_n è gratuita per la continuità di f_n . Baste sostituire $f_n(b)$ con λ_n e ...)

! Non è gratuito il fatto che $\lambda_n = \lambda$

dim: $\forall \varepsilon \exists N \in \mathbb{N} \forall n \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$
quindi $\{\lambda_n\}_n$ è di Cauchy, $\exists \lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
 $|f(x) - \lambda| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - \lambda_n| + |\lambda_n - \lambda|$. Fissato $\varepsilon > 0$
 $x \in (a, b) \int \exists N \forall n \geq N \quad |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in (a, b) \quad | \lambda_n - \lambda | < \varepsilon \quad \exists \delta \forall x \quad |f_n(x) - \lambda_n| < \varepsilon \quad \text{se } 0 < b-x < \delta \quad \text{S.F.}$

Questa proposizione ha come conseguenza il fatto seguente: supponiamo che $f_n \rightarrow f$ puntualmente in (a, b) e ci chiediamo se $f_n \rightarrow f$ unif. in (a, b)

~~Il problema~~ Se f_n sono continue in $[a, b]$ e non convergono uniformemente in $[a, b]$ allora non possono convergere uniformemente nemmeno in (a, b) .

Si consideri l'esempio 1. $f_n(x) = x^n$ converge puntualmente a 0 in $[0, 1)$, ma non uniformemente in $[0, 1]$ perché il limite non è continuo. Per cui f_n non converge uniformemente a 0 in $[0, 1)$!

Oss. Se $f_n \rightarrow f$ puntualmente in un insieme A il candidato ad essere il limite uniforme è f !

Teorema (passaggio al limite sotto il segno d'integrale)

⊗ Supponiamo che ~~$f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$~~ $f_n: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$, convergano uniformemente ad f
 in un insieme ~~$\mathbb{I}$~~ $[a, b] \subseteq \mathbb{I}$ ⊗ Allora

Slom.
 f_n e f
 integrabili
 secondo
 Riemann.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

dim:

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq$$

$$\leq \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \cdot (b - a)$$

oss 1. Basta che l'insieme di convergenza sia limitato.
 Se l'insieme di convergenza uniforme non
 è limitato il risultato non è garantito.

Es. 7

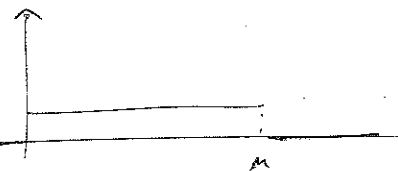
$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x \in [0, n] \\ 0 & x \in \mathbb{R} - [0, n] \end{cases}$$

$$f_n(x) \rightarrow 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

uniformemente!

ma $\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = 1$

$\mathbb{R}$

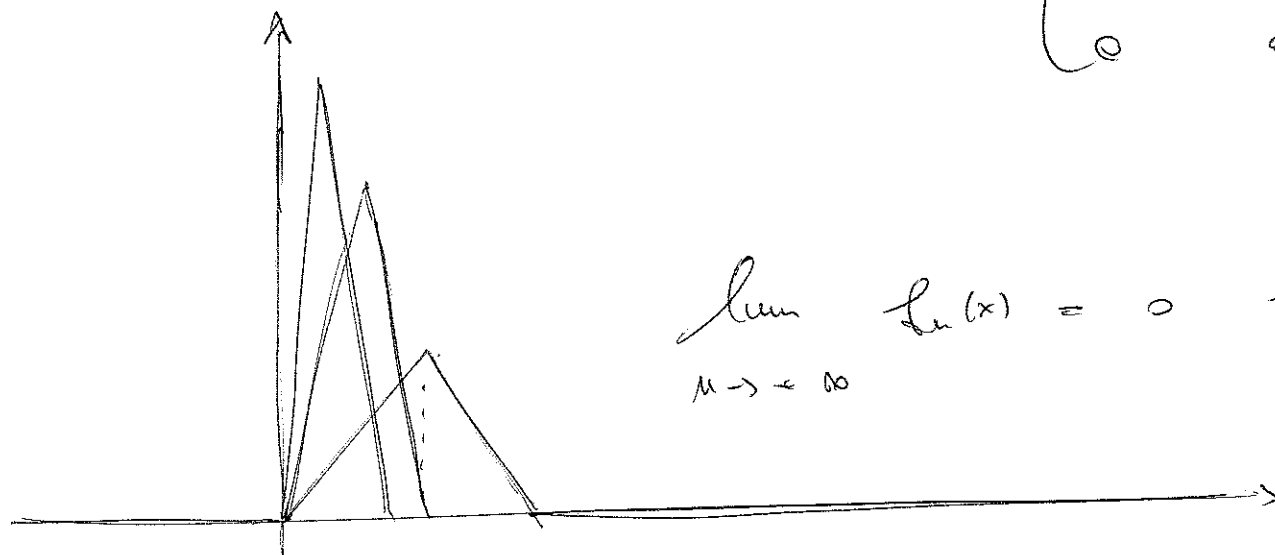


2. Se la convergenza è solo puntuale
non è detto che il risultato valga.

Esempio 8.

$$f_n: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 2n - n^2 x & x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & \text{altri'manti} \end{cases}$$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x$$

Per $x \leq 0$ è chiaro

se $x > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{2}{N} \leq x$

per $\forall n \geq N$

Si osservi come f_n è illimitata!

f_n non converge uniformemente perché

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n \quad \text{quindi} \quad \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x)| = +\infty$$

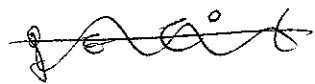
Tuttavia

$$\int_0^1 f_n(x) dx = 1 \quad \text{e} \quad \int_0^1 f(x) dx = 0$$

Teorema (passaggio al limite sotto il segno di derivata)

Siano $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni di classe C^1 in $[a, b]$ e si suppone che

1. $f_n' \rightarrow g$ uniformemente in $[a, b]$



2. $\forall c \in [a, b]$ la $\{f_n(c)\}_n$ sia convergente.

Allora f_n converge uniformemente ad una funzione f , f è derivabile e $f' = g$.

Dal: prima di tutto si osserva che, visto che f_n' sono continue, la funzione $g \in C^0([a, b])$.

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha che

$$f_n(x) = \int_c^x f_n'(t) dt + f_n(c) \quad \forall x \in [a, b]$$

Passando al limite si ha $(\gamma = \lim_n f_n(c))$

$$\int_c^x g(t) dt + \gamma$$

Per cui $f_n(x)$ converge proprio a

$$\gamma + \int_c^x g(t) dt.$$

In particolare ciò significa che $f \in C^1([a, b])$

e che $f'(x) = g(x) \quad \forall x \in [a, b].$

Inoltre

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| f_n(c) + \int_c^x f_n'(t) dt - r - \int_c^x f'(t) dt \right|$$

$$\leq |f_n(c) - r| + \int_c^x |f_n'(t) - f'(t)| dt$$

$\downarrow$

0

$\downarrow$

0

(anche passando al sup ...)

//

Serie di funzioni

Dato una successione di funzioni $u_n: I \rightarrow \mathbb{R}$,
 $I \subseteq \mathbb{R}$, $I \neq \emptyset$, possiamo considerare, come per
le serie numeriche, la serie associata ~~ad~~ che
denotiamo con $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$. Possiamo considerare
la successione delle somme parziali con $x \in I$

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x)$$

Come per le successioni di funzioni diremo che

• $\sum u_k$ converge puntualmente in $x_0 \in I$

se $\{f_n(x_0)\}_n$ converge; $\sum u_k$ converge

puntualmente in $J \subseteq I$ se $\{f_n(x)\}_n$
converge $\forall x \in J$.

• $\sum u_k$ converge uniformemente in J

se $\{f_n\}$ converge uniformemente in J

• $\sum u_k$ converge assolutamente (spesso si
sottintende puntualmente) in J se

~~la~~ converge puntualmente la serie $\sum |u_k|$
in J

• $\sum_n u_n$ converge assolutamente uniformemente in J se $\sum_n |u_n|$ converge ~~in~~ uniformemente in J

• $\sum u_n$ converge totalmente in $J \in \mathbb{I}$

se $\sum_{k=0}^{\infty} \sup_{x \in J} |u_k(x)|$ converge

Oss. • la convergenza assoluta implica la convergenza semplice (come già visto nel primo corso) - Siccome, con $x \in J$ fissato, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ è una serie numerica, la convergenza ~~assoluta~~ di $\sum_{k=0}^{\infty} |u_k(x)|$ implica quella di $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$.

Analogo discorso per la convergenza uniforme.

•• se non si riesce a calcolare $\sup_{x \in J} |u_k(x)|$ per verificare la convergenza totale è sufficiente trovare una successione

numerica $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tale che

$$v_k > 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} v_k < +\infty, \quad v_k \geq \sup_{x \in J} |u_k(x)|$$

e quindi per l'intento del confronto
le serie convergono totalmente in I .

... la convergenza totale è più forte di quella
uniforme, per cui in generale si ha

$$\text{conv. totale in } I \Rightarrow \text{conv. uniforme in } I \Rightarrow \text{conv. punt. in } I$$

∴ Non vi è un legame tra conv. assoluta puntuale
e convergenza uniforme

Esempi Relativamente all'OSS ..; un modo per
vedere se una serie converge totalmente in
un insieme, supposto che u_n siano C^1 ,
è derivare u_n , cercare i punti di
massimo e di minimo assoluti e
valutare $|u_n|$ in tali punti. Sempre che
si riescano a trovare e sempre che le
 u_n ammettano massimo e minimo.
Qualche volta può essere più semplice
stimare il $\sup |u_n|$. Si consideri,
ad esempio, la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + n^2}$$

Usando le disuguaglianze $2ab \leq a^2 + b^2$
 $\forall a, b \geq 0$
posso stimare ($a = x^2, b = u^2$)

$$2x^2u^2 \leq x^4 + u^4 \quad \text{da cui} \quad \frac{x^2}{x^4 + u^4} \leq \frac{1}{2u^2}$$

Poiché $\sum \frac{x^2}{x^4 + u^4}$ è a termini non negativi: $\left(\frac{x^2}{x^4 + u^4} \geq 0\right)$

e $\sum \frac{1}{u^2}$ converge dal criterio del confronto
si deduce che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + u^4}$ converge totalmente,
e quindi uniformemente, e quindi puntualmente,
in tutto $\mathbb{R}$.

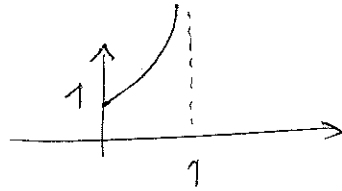
Si noti che non abbiamo stabilito chi è il
limite delle somme parziali (le somme delle serie).
Come, e in realtà peggio, con le serie numeriche
quasi mai si riesce a stabilire o calcolare
le somme delle serie.

Relativamente all'OSS :: si consideri

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \text{con} \quad x \in [0, 1)$$

Ovviamente è banalmente la serie
 converge puntualmente e anche assolutamente
 in $(0,1)$. In questo caso si può anche
 calcolare la somma che risulta $\frac{1}{1-x}$.

il cui grafico è



~~Visto che è~~ Non converge uniformemente
 in $[0,1)$. Usiamo il fatto che, delle

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k,$$

si che che, ~~Ma~~ f_n è continua in $[0,1]$

ma $f_n(1) = n+1$, quindi $f_n(1)$ non converge.

In particolare non può convergere uniformemente in
 $[0,1]$ e quindi non converge uniformemente
 in $[0,1)$.

Attenzione! Se considero $a \in (0,1)$ e l'insieme
 $[0,a]$ si ha che $x^k \leq a^k$ in $[0,a]$
 perché x^k è crescente in $[0,1]$. La serie

$\sum_{k=0}^{\infty} a^k$ converge (al valore $\frac{1}{1-a}$);

di conseguenza la serie $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ converge
totalmente (e quindi anche uniformemente)
in ogni intervallo chiuso del tipo $[0, a]$
con $a < 1$ e solo puntualmente in $[0, 1)$.

Ripetizioni (o corollari) di risultati visti
precedentemente per le successioni di funzioni
sono: tre risultati che seguono.

Teorema Se $\sum u_k$ converge uniformemente in I e f
e le u_k sono tutte continue in I allora
 f risulta continua in I .

Teorema Se $\sum u_k$ converge uniformemente in $I \subseteq \mathbb{R}$,
 I limitato, e f ; u_k integrabili secondo Riemann;
 f integrabile secondo Riemann. Allora

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b u_k(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \right) dx$$

" f

per ogni $[a, b] \in I$.

Teorema. Siano: $u_k, k \in \mathbb{N}$, di classe C^1 in $\mathbb{R}[a, b]$
e si suppone che

1. $\exists c \in [a, b]$ tale che $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(c)$ converge

2. la serie $\sum_{k=0}^{\infty} u_k'$ converge uniformemente

in $[a, b]$ ad una funzione g .

Allora $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge uniformemente ad

una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$f \in C^1([a, b])$ e $f' = g$.

Dim. : Tutte e tre le dimostrazioni seguono
semplicemente definendo $f_n := \sum_{k=0}^n u_k$
e applicando risultati precedenti a $\{f_n\}_n$. //

Serie di potenze e serie di Taylor.

Le serie di potenze sono particolari serie di funzioni in cui la k -esima funzione è un polinomio di grado $k \in \mathbb{N}$ del tipo

$$a_k (x - x_0)^k \quad a_k, x_0 \in \mathbb{R}.$$

Per cui la serie risulta essere $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ x_0 fissato.
e $\{a_k\}_k$ successione numerica.

Oss Per $k=0$ ~~$x = x_0$~~ si pone $a_0 (x - x_0)^0 := a_0$
anche se per $x = x_0$ l'espressione perde di significato

~~Oss L'insieme di convergenza di una serie di potenze può essere il solo $\{x_0\}$, un intervallo limitato e centrato su~~

Oss L'insieme di convergenza di una serie di potenze contiene sempre almeno il punto x_0 . Infatti $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ converge ad a_0 per $x = x_0$. Di conseguenza l'insieme di convergenza non è mai vuoto!

Def (raggio di convergenza)

Si dice raggio di convergenza della serie

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ la quantità

$$\rho := \sup \left\{ r \in [0, +\infty) \mid \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k \text{ converge} \right\}$$

Esempio La serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ ha

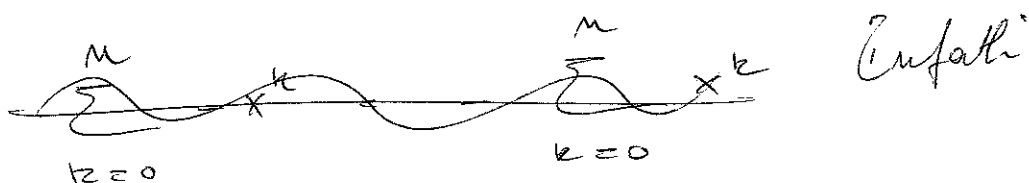
raggio di convergenza 1. Infatti

$a_k = 1 \ \forall k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ converge $\forall x \in [0, 1)$.

L'estremo superiore di $[0, 1)$ è 1.

Anche la serie $\sum_{k=0}^{\infty} (-x^k)$ ha lo stesso

raggio di convergenza. ~~D'altra parte~~



$\sum_{k=0}^n x^k$ $\sum_{k=0}^n (-x^k)$ Infatti

$a_n = -1$, $|a_n| = 1$, e si ripete il
caso di sopra.

Vediamo il significato del raggio di convergenza
nel seguente risultato.

Teorema Talora si osserva che il raggio di convergenza può essere 0, un numero positivo, $+\infty$.

Esempi: $= \sum_{k=0}^{\infty} k! x^k$ converge solo per $x=0$
(ricordo: $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{k!} = +\infty$)

e quindi ha ~~convergenza~~ raggio di convergenza 0

$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} x^k$ ha raggio di convergenza 2

$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k} \text{ converge se } \frac{x}{2} < 1 \right)$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ ha raggio di convergenza $+\infty$

$\left(\sum \frac{1}{k!} x^k \text{ converge } \forall x \geq 0 \right)$

Teorema Data la serie di potenze $\sum a_k (x-x_0)^k$
e detto ρ il suo raggio di convergenza
si ha che :

- i) la serie converge solo per $x = x_0$ se $\rho = 0$
- ii) la serie converge assolutamente
per ogni $x \in \mathbb{R}$ e totalmente in ogni
intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$ se $\rho = +\infty$
- iii) la serie converge assolutamente
per ogni $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ e totalmente
in ogni intervallo chiuso e limitato
contenuto in $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ e
~~diverga~~ non converge per ogni $x \notin [x_0 - \rho, x_0 + \rho]$
nel caso in cui $0 < \rho < +\infty$
- iv) il raggio di convergenza ρ è dato
da $\frac{1}{l}$ dove $l = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$

con la convenzione che

$$\rho = \frac{1}{l} \quad \text{se} \quad 0 < l < +\infty$$

$$\rho = 0 \quad \text{se} \quad l = +\infty$$

$$\rho = +\infty \quad \text{se} \quad l = 0$$

dim ~~dim~~ Consideriamo per semplicità $x_0 = 0$
 (altrimenti con una traslazione $y = x - x_0$ ci
 si riduce a questo caso).

- i) Ricordo: ~~esiste~~ data una successione
 +
 ii) numerica $\{x_n\}_n$ a termini positivi si ha
 +
 iii) che se $\exists h > 0$
 +
 $h < 1$ t.c. $x_n \leq h^n$ definitivamente.
 +
 iv) la serie $\sum x_n$ converge
 $h \geq 1$ t.c. $x_n \geq h^n$ definitivamente
 o per infiniti valori di n
 la serie $\sum x_n$ diverge

Consideriamo la serie $\sum |a_n| |x|^k$.

$$\sqrt[k]{|a_n| |x|^k} = |x| \sqrt[k]{|a_n|}$$

Sia $l \in (0, +\infty)$

Calcolo $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_n| |x|^k} = |x| l$

Se $|x| l < 1$ si ha che esiste

$\varepsilon > 0$ tale che $\varepsilon + |x| l < 1$

Se $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_n| |x|^k} = |x| l$

significa che $\forall \varepsilon > 0$ ~~esiste~~

si ha che $\exists N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\textcircled{\text{da}} \quad \sqrt[k]{|a_n| |x|^k} \leq |x|l + \sigma \quad \forall k \geq N$$

Scegliendo $\sigma = \varepsilon$ si ha che

$$\sqrt[k]{|a_n| |x|^k} \leq |x|l + \varepsilon =: h < 1$$

Per il criterio delle radici n -esime si ha che
la serie $\sum |a_n| |x|^k$ converge (se $|x|l < 1$)

se $|x| < \frac{1}{l}$ -

Se $|x|l \geq 1$, cioè ~~non~~ $|x| > \frac{1}{l}$,

si ha che esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$|x|l - \varepsilon > 1$$

Per infiniti valori di k si ha che

$a_n x^k$ è
illimitato

$$\sqrt[k]{|a_n| |x|^k} \geq |x|l - \varepsilon \quad \text{e quindi}$$

se $|x| > \frac{1}{l}$ la serie diverge.

Abbiamo quindi mostrato che la serie converge
assolutamente per $x \in (-l, l)$ e non
converge ~~assolutamente~~ (perché infiniti termini
non ~~sono~~ sono infinitesimi) per $|x| > l$.

Rimane da vedere che si è convergenza
totale ~~in~~ in $[a, b]$ $\forall [a, b] \subseteq (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$.

Consideriamo per semplicità ~~$[a, a]$~~ con

$$[x_0 - a, x_0 + a] \quad \text{con} \quad 0 < a < \rho.$$

Allora $\forall x \in [x_0 - a, x_0 + a]$

$$|a_n x^k| \leq |a_n| a^k$$

Si come $a \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ la serie

$\sum |a_n| a^k$ converge per cui la serie $\sum a_n x^k$
converge totalmente in $[x_0 - a, x_0 + a]$.

I casi $l = 0$, $l = +\infty$ si mostrano in
maniera analoga.

Se $l = 0$ $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_n| |x|^k} = 0 \quad \forall x$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \sqrt[k]{|a_n| |x|^k} \leq h \quad \forall k \geq N$$

$0 < h < 1$

e si conclude
come prima

$$\text{Se } l = +\infty \Rightarrow \limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_n| |x|^k} = +\infty$$

$\forall x \neq 0$

e poi definitivamente

$$|a_n| |x|^k \geq 1$$

Esempi Abbiamo già visto come il raggio di

OSS Convergenza possa essere 0 o $+\infty$

(rispettivamente $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k!} x^k$ e $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k$)

Mel caso in cui esiste $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ questo

è il reciproco del raggio di convergenza.

Se tale limite è finito e diverso da zero
si ha che la serie converge in $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$
e ~~diverge~~ in $(-\infty, x_0 - \rho) \cup (x_0 + \rho, +\infty)$.
non converge

Che succede per $x = x_0 - \rho$ e $x_0 + \rho$?

Esempio: ① $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} x^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3}$$

per cui il raggio di
convergenza è 3.

la serie converge $\forall x \in (-3, 3)$.

Per $x = 3$ e $x = -3$ si studiano
separatamente le due serie.

$$x = 3 \quad \sum \frac{1}{3^n} 3^n = +\infty$$

$$x = -3 \quad \sum \frac{1}{3^n} (-3)^n \text{ non converge} \\ \text{(è indeterminata!)}$$

$$\textcircled{2} \quad \sum \frac{1}{n 3^n} x^n \quad \lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n 3^n}} = \frac{1}{3}$$

$$x = 3 \quad \sum \frac{1}{n} = +\infty$$

$$x = -3 \quad \sum (-1)^n \frac{1}{n} \quad \text{converge}$$

$$\textcircled{3} \quad \sum \frac{1}{n^2 3^n} x^n \quad \text{il raggio di conv. è } 3$$

$$x = 3 \quad \sum \frac{1}{n^2} \quad \text{converge}$$

$$x = -3 \quad \sum (-1)^n \frac{1}{n^2} \quad \text{converge}$$

Nell'esempio $\textcircled{1}$ l'insieme di convergenza puntuale è $(-3, 3)$, nell'esempio $\textcircled{2}$ è $[-3, 3)$, nell'esempio $\textcircled{3}$ è $[-3, 3]$.

~~OSSERVAZIONE IMPORTANTE. Applicando il teorema di passaggio al limite sotto il segno di ~~integrale~~ di derivate alle serie di potenze si ~~ottiene~~ il seguente risultato:~~

$$\text{date} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$$

~~con raggio di convergenza ρ~~

Altro esempio : si consideri la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty}$$

$$x^{2k}$$

Chi è il k -esimo
coefficiente a_k ?

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ dispari} \\ 1 & \text{se } k \text{ pari} \end{cases}$$

Di conseguenza non esiste $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$.

Esiste però il $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1$.

Il raggio di convergenza è perciò 1 e
si vede facilmente che la serie converge
solamente in $(-1, 1)$.

OSSERVAZIONE IMPORTANTE

Applicando il teorema di passaggio al limite solo il segno di derivate ad una serie di potenze si ottiene il seguente risultato:

data $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ con raggio di convergenza ρ

e detta f la funzione somma della serie si ha che la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}$$

ha lo stesso raggio di convergenza di

$\sum a_k (x-x_0)^k$ e converge ~~puntuale~~ alla funzione f' ($\limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{k |a_k|} = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$)

Induttivamente si può mostrare che

$f \in C^{\infty}((x_0-\rho, x_0+\rho))$, che la serie

$$\sum_{k=h}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-h+1) a_k (x-x_0)^{k-h}$$

ha raggio di convergenza ρ e converge a $f^{(h)}$.

Esempio la serie $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ ha raggio

di convergenza 1. Converge solamente
in $(-1, 1)$ e non converge in $\mathbb{R} \setminus (-1, 1)$.
In particolare diverge a $+\infty$ in $[1, +\infty)$,
e' indeterminata in $(-\infty, -1)$.

Converge uniformemente in $[a, b] \subseteq (-1, 1)$
qualunque sia $[a, b]$, totalmente in $[a, b] \subseteq (-1, 1)$
e non converge uniformemente in
 $[-1, a]$, $a < 1$, né in $[a, 1)$, $a \geq -1$.

Se così fosse convergerebbe (uniformemente)
anche in $[-1, a]$ e/o in $[a, 1]$, ma
abbiamo visto che per $x = -1$, $x = 1$ la
serie non converge.

Stesso raggio di convergenza ha la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1}$$

in $x = -1$, $x = 1$ non converge e valgono
gli stessi ragionamenti fatti sopra.

Se $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ allora

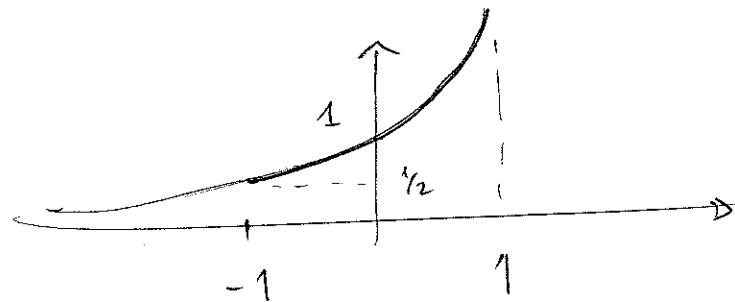
la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1}$ converge a f' .

In questo esempio (e sono pochi!) si può anche calcolare chi è f !

$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ non è altro che la serie geometrica

di ragione x e converge alla funzione

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$



alla quale converge solo in $(-1, 1)$!

La serie $\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1}$ convergerà allora

alla funzione $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

Attenzione! la serie parte da $k=1$!

Posso essere riscritta come $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k$

Analogamente si mostra che

$\sum_{k=h}^{+\infty} k(k-1) \dots (k-h+1) x^{k-h}$ converge in $(-1, 1)$

alle funzioni $f^{(h)}(x) = \frac{h!}{(1-x)^{h+1}} \begin{pmatrix} \text{mi} \\ \text{pari} \end{pmatrix}$

Integrando termine a termine si può anche ottenere :

poiché $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ converge uniformemente
in $[a,b]$ $\forall [a,b] \subset (-1,1)$

in particolare si ha che $(x^k \text{ è integrabile } \text{ovviamente})$

$$\textcircled{*} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x t^k dt = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k \right) dt$$

dove $x \in (-1,1)$ (uso la convergenza
uniforme su $[x,0]$ $x < 0$
o $[0,x]$ se $x > 0$)

$$\int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k \right) dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

Dall'uguaglianza $\textcircled{*}$ si deduce che la

serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$ converge per ogni
 $x \in (-1,1)$

alla funzione limite

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\log |1-x| = -\log(1-x)$$

La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$ ne hai studiate

in -1 e in 1 . Si ricorre che

la serie converge in $[-1, 1)$ (la serie

$\sum (-1)^k \frac{1}{k}$ converge per il criterio di Leibniz)

ti chiedo: la serie converge uniformemente

in $[-1, 1)$? ~~Certo~~ certamente No, ma

potrebbe convergere unif. in $[-1, a]$ con $a < 1$.

Inanzitutto sappiamo che converge unif.

in $[a, b]$ $\forall [a, b] \subseteq (-1, 1)$.

Vediamo in $[-1, 0]$.

Ricordo (criterio di Leibniz per le serie
a segno alternato)

Dato $\{a_k\}$ successione a termini positivi
con $\{a_k\}$ definitivamente decrescente
e $\lim a_k = 0$ allora la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \quad \text{converge ad} \\ \text{un valore } S \in \mathbb{R}.$$

Detto s_n il valore delle somme parziali

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k a_k \quad \text{si ha che}$$

$$|S - s_n| \leq a_{n+1} \quad (\text{almeno definitivamente})$$

Detta $f(x)$ la somma $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k} x^k$

(con $x \in [-1, 0]$ si osservi che la serie è
a segni alterni) si ha

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k} x^k \right| \leq \frac{1}{n+1} |x|^{n+1}$$

Verifichiamo che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$ converge uniformemente in $[-1, 0]$ significa,

detta $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} x^k$, che

$$\sup_{x \in [-1, 0]} |f(x) - f_n(x)| \text{ converge a zero per } n \rightarrow +\infty$$

Si ha che

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [-1, 0]} |f(x) - f_n(x)| &\leq \sup_{x \in [-1, 0]} \frac{1}{n+1} |x|^{n+1} = \\ &= \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

per cui concludiamo che la serie converge uniformemente in $[-1, 0]$ (e quindi in $[-1, a]$ per ogni $a < 1$).

!! Attenzione la serie non converge totalmente in $[-1, 0]$ perché

$$\sup_{[-1, 0]} \left| \frac{1}{k} x^k \right| = \frac{1}{k}$$

Def (serie di Taylor)

Se $f \in C^\infty(I)$ e $x_0 \in I$, I intervallo.

Si dice serie di Taylor nel punto x_0

la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \quad (*)$$

Si dice che f è sviluppabile in serie
di Taylor di centro x_0 in I se la serie $(*)$

converge ad f in I .

Si dice che f è analitica in I se

per ogni $x_0 \in I$ $\exists$ $p > 0$ tale che la serie

$(*)$ converge ad f in $(x_0 - p, x_0 + p)$.

Oss una funzione C^∞ può non essere analitica

$$\text{Date } f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases} \quad \text{è } C^\infty$$

$$\text{Infatti } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-1/h^2} - 0}{h} = 0 \quad \text{da cui } f'(0) = 0$$

$$\text{Inoltre } f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$$

per cui f derivabile in 0 e $C^1(\mathbb{R})$

Si verifica facilmente che $f^{(h)}(0) = 0 \quad \forall h \in \mathbb{N}$
 Quindi la sua serie di Taylor di
 centro 0 è la serie di potenze con tutti
 coefficienti nulli (la funzione nulla !)

ma $f(x) \neq 0$ per $x \neq 0$. La serie converge
 solo nel centro $x_0 = 0$ e non in un intorno
 $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ con $\rho > 0$.

Una serie di Taylor è una serie di potenze
 di centro x_0

Date una serie di potenze $\sum a_n (x-x_0)^k$
 abbiamo visto che (se la serie conv. unif. in $[a,b]$)
 $x_0 \in [a,b]$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_n (x-x_0)^{k-1}$$

$$\vdots$$

$$f^{(h)}(x) = \sum_{k=h}^{\infty} k(k-1) \dots (k-h+1) a_n (x-x_0)^{k-h}$$

In particolare $f(0) = a_0$

$$f'(0) = a_1$$

$$f''(0) = 2 a_2$$

$\vdots$

$$f^{(h)}(0) = h! a_h$$

$$a_h = \frac{f^{(h)}(0)}{h!}$$

Di fatto le serie di potenze sono serie di Taylor (se la serie di potenze $\sum a_n(x-x_0)^n$ ha raggio di convergenza $\rho > 0$ e converge ad una funzione f in $(x_0-\rho, x_0+\rho)$ si ha che tale serie è la serie di Taylor di centro x_0 di f).

Alcuni sviluppi di Taylor elementari:

(Ex)

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad x \in (-1, 1) \quad (1)$$

Da (1), considerando $-x$ ~~anziché~~ ^{anziché} ~~per~~ x , si ottiene

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x} \quad x \in (-1, 1) \quad (2)$$

Considerando $-x^2$ anziché x in (1)

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2} \quad x \in (-1, 1) \quad (3)$$

Integrando termine a termine le (2) si ottiene

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} = \log(1+x)$$

e facendo la stessa cosa con (3)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = \arctan x \quad x \in (-1, 1)$$

Da calcoli diretti si ottengono gli sviluppi

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \quad (4)$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad (5)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad (6)$$

Es. Verificare che le serie ~~(4)~~ convergono

in tutto $\mathbb{R}$. ~~In particolare la (4) converge uniformemente in $[a, b]$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$ e non converge uniformemente in $\mathbb{R}$.~~

Le serie (4), (5) e (6) convergono uniformemente in $[a, b]$ qualunque siano $a, b \in \mathbb{R}$, ma solo negli insiemi limitati. In tutto $\mathbb{R}$ non possono convergere!

(Si osservi a tal proposito che $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$

è un polinomio di grado $2n+1$ e quindi all'infinito va all'infinito, mentre

$\sin x$ è limitato! (idem per $\cos x$)